

일정 일반속력으로 구동되는 구속 다물체계의 선형화기법 및 진동해석

Linearization Method and Vibration Analysis of a Constrained Multibody System Driven by Constant Generalized Speeds

최동환* · 박정훈** · 유홍희***

D. H. Choi, J. H. Park and H. H. Yoo

Key Words: Linearization Method(선형화기법), Equilibrium Position(평형위치), Linear Vibration Analysis(선형진동해석), Generalized Speed(일반속력), Partial Velocity Matrix(편속도행렬), Constrained Multibody Systems(구속다물체계)

ABSTRACT

This paper presents a vibration analysis method for constrained mechanical systems driven by constant generalized speeds. Equilibrium positions are obtained first and vibration analysis are performed around the positions. The method developed in this paper employs partial velocity matrix to obtain a minimum number of differential equations. To verify the accuracy of the proposed algorithm, linear vibration analyses of two numerical examples are performed and the results are compared with results from a commercial program or previous literature.

1. 서론

일반적으로 구속 다물체계는 정적 평형점 근방에서 선형 진동특성을 갖게되며 이를 해석하기 위해서 시스템 운동방정식의 선형화가 필요하다. 이러한 선형화는 진동해석을 위해서 뿐만 아니라 제어시스템 설계나 시스템의 민감도해석에 있어서도 필수적이다. 본 논문에서는 일정 일반속력으로 구동되는 다물체계가 정상상태를 가질 때, 즉 계를 구성하는 각 물체간 상대위치가 일정한 값으로 수렴하는 동적 평형위치를 가질 때 고유진동수를 구하기 위한 방법을 제안하고자 한다. 구속 다물체계에 대한 선형화기법과 관련해 Fuehrer와 Wallrapp은⁽¹⁾ SVD(singular value decomposition)와 Householder 변환 등의 행렬연

산기법을 이용하여 독립좌표를 선정, 구속력을 제거하고 선형방정식을 얻는 방법을 제안하였다. 그러나 구체적인 구속 조건식 및 좌표에 대한 언급 없이 단순히 행렬관계식만 제안함으로써 이를 그대로 다물체계에 적용하는데 어려움이 있다. Sohoni와 Whitesell은⁽²⁾ 정적 평형위치에 대한 선형화기법과 고유치 문제에서 좌표분할법을 이용하여 라그랑지 승수를 제거하는 구속력 제거기법을 제안하였다. 그러나 이 방법은 어떤 좌표를 종속좌표로 선정할 것인가에 대해서는 언급하지 않았다. Lynch와 Vanderploeg는⁽³⁾ 정적 평형위치에서 기호연산 프로그램을 이용한 선형화기법 및 QR분해법을 이용해 구속력을 제거한 후에 독립좌표만으로 구성된 최소한의 운동방정식 및 고유치문제를 얻는 방법을 제안하였다. Kim 등은⁽⁴⁾ 편속도행렬을⁽⁵⁾ 이용하여 구속력을 제거함으로써 최소한의 운동방정식을 얻어서 구속 다물체계의 정적 평형해석 및 정적평형위치에서의 선형 진동해석을 수행하였다. 이상에서 언급한 해석방법들은 정적평형해석에 적용할 수 있는 효과적인 방법들이기는 하나 일정 일반속력으로 구동되는 다

* 한양대학교 대학원 기계설계학과
** FunctionBay, Inc. 선임연구원
*** 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2290-0446, Fax : (02) 2293-5070

물체계의 정상상태 평형위치를 구하는 데는 사용할 수 없다. 최근 Choi 등은⁽⁶⁾ 일정 일반속력으로 구동되는 다물체계의 정상상태 평형위치를 구하기 위한 방법을 제시하였다. 본 논문에서는 이 선행연구에서 제안된 평형해석방법에 근거하여 일정 일반속력을 가지는 시스템에 대한 선형화기법을 제안하고자 한다. 본 논문에서는 계의 일반좌표로 상대좌표를^(7,9) 사용하였으며 일정 일반속력을 가지는 좌표와 나머지 일반좌표로 일반좌표들을 분할하였다. 제안된 해석방법의 타당성을 검증하기 위하여 두 가지 예제를 사용해 정상상태 평형위치를 구하였고, 제안된 선형화기법으로부터 얻어진 선형방정식으로부터 평형위치에서의 선형 진동해석을 수행하고 정확성을 검증하였다.

2. 운동방정식

일반적으로 절대좌표계에 대한 구속 다물체계의 운동방정식은 다음과 같은 확장 라그랑지 운동방정식으로 표현된다.

$$M\ddot{x} + \Phi_x^T \lambda = Q \quad (1)$$

위 식에서 M 은 시스템의 관성행렬(system inertia matrix), Q 는 일반력(generalized force), Φ_x 는 절대좌표에 대한 구속방정식 ($\Phi = 0$)의 자코비안행렬(Jacobian matrix), 그리고 λ 는 라그랑지 승수(Lagrange multipliers)이다.

본 논문에서는 일반좌표 q_i 를 물체 i 와 물체 i 의 기준물체(reference body) 사이의 조인트 형태에 따라 정의되는 상대좌표를 사용하였다. 일반적으로 시스템의 절대속도 \dot{x} 는 시스템의 일반속도 \dot{q} 와 다음과 같은 속도변환관계식을^(7,8) 가진다.

$$\dot{x} = B\dot{q} \quad (2)$$

여기서 B 는 속도변환행렬이다.

본 논문에서는 일정 일반속력으로 구동되어지는 시스템의 운동방정식을 구하기 위하여 일반좌표를 다음과 같이 분할하였다.

$$q = [q_D^T \quad q_R^T]^T \quad (3)$$

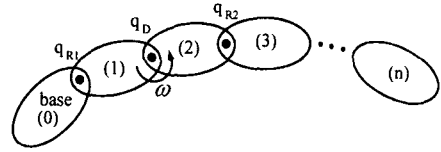


Fig. 1 Generalized coordinates q_D and q_R

여기서 q_D 는 일정 일반속력의 구동구속조건(driving constraints)을 갖는 좌표를, q_R 은 나머지 일반좌표를 나타내는데, Fig. 1에 간단한 시스템을 이용해 예를 도시하였다. 따라서 시스템의 절대속도 \dot{x} 는 다음과 같다.

$$\dot{x} = B_D \dot{q}_D + B_R \dot{q}_R \quad (4)$$

여기서 \dot{q}_D 는 일정 일반속력을 나타내며 B_D 와 B_R 은 다음과 같이 B 를 구성한다.

$$B = [B_D \quad B_R] \quad (5)$$

따라서 일정 일반속력으로 구동되는 시스템의 운동방정식은 절대좌표계에 대한 운동방정식으로부터 속도변환관계식과 미분의 연쇄법칙 등을 이용하여 다음과 같이 유도된다 (상세 과정은 참고문헌 [6]을 참조할 것).

$$M^* \ddot{q}_R + \Phi_{q_R}^{cT} \lambda^c = Q^* \quad (6)$$

여기서 Φ^c 는 폐쇄계에서의 절단조인트에⁽⁹⁾ 의한 구속방정식을 나타내며 M^* 와 Q^* 는 각각 다음과 같다.

$$M^* = B_R^T M B_R \quad (7)$$

$$Q^* = B_R^T Q - B_R^T (M \dot{B}_D \dot{q}_D + M \dot{B}_R \dot{q}_R) \quad (8)$$

그런데 일반좌표 q_R 에 대한 구속방정식의 2차 시간미분식은 다음과 같이 구해진다.

$$\Phi_{q_R}^c \ddot{q}_R = \gamma^c \quad (9)$$

여기서

$$\gamma^c = -(\Phi_{q_R}^c \dot{q}_R)_{q_R} \dot{q}_R - 2\Phi_{q_R t}^c \dot{q}_R - \Phi_H^c \quad (10)$$

위 식 (6)과 식 (9)를 결합하면 다음과 같은 미분 대수방정식형태의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} M^* & \Phi_{q_R}^{cT} \\ \Phi_{q_R}^c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_R \\ \lambda^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^* \\ \gamma^c \end{bmatrix} \quad (11)$$

일정 일반속력으로 구동되는 구속 다물체계의 동적 해석은 식 (11)을 이용하여 수행될 수 있다.

3. 선형화기법

일정 일반속력으로 구동되는 구속 다물체계의 운동방정식은 식 (6)으로부터 다음과 같다.

$$M^* \ddot{q}_R + \Phi_{q_R}^{cT} \lambda^c - Q^* = 0 \quad (12)$$

여기서 일반좌표 q_R 은 서로 독립적이지 않으며 다음과 같이 구속방정식 수만큼의 종속좌표 u 와 독립좌표 v 로 분할할 수 있다.

$$q_R = [u^T \ v^T]^T \quad (13)$$

참고문헌 [5]로부터 일반속도 \dot{q}_R 는 독립속도 \dot{v} 와 다음과 같은 관계식을 갖는다.

$$\dot{q}_R = R \dot{v} \quad (14)$$

여기서 R 은 편속도행렬로 다음 같이 정의된다.

$$R = \begin{bmatrix} -\Phi_u^{c-1} \Phi_v^c \\ I \end{bmatrix} \quad (15)$$

일정 일반속력을 가지는 구속 다물체계의 운동방정식 (12)의 좌변에 R^T 를 곱하면 다음과 같이 구속력이 소거되어 독립좌표만으로 구성된 최소한의 운동방정식을 얻을 수 있다. (상세 과정은 참고문헌 [5]를 참조할 것)

$$R^T M^* R \ddot{v} + R^T M^* \dot{R} \dot{v} - R^T Q^* = 0 \quad (16)$$

운동방정식 (16)을 평형위치 q^* 에서 선형화하면, 다음과 같은 선형방정식을 얻을 수 있다.

$$\hat{M}^* \delta \ddot{v} + \hat{C}^* \delta \dot{v} + \hat{K}^* \delta v = 0 \quad (17)$$

여기서 2차 이상의 항을 소거한 선형화된 질량, 감쇠 그리고 강성행렬은 각각 다음과 같다.

$$\hat{M}^* = R^T B_R^T M B_R R \Big|_{q^*} \quad (18)$$

$$\hat{C}^* = \frac{\partial}{\partial \dot{v}} R^T B_R^T [M \dot{B}_D \dot{q}_D - Q] \Big|_{q^*} \quad (19)$$

$$\hat{K}^* = \frac{\partial}{\partial v} R^T B_R^T [M \dot{B}_D \dot{q}_D - Q] \Big|_{q^*} \quad (20)$$

여기서 \hat{C}^* 과 \hat{K}^* 는 유한차분법을 이용하여 구한다.

4. 수치예제

4.1 일정각속도를 가지는 자동조심기구

Fig. 2는 일정 각속도 $\omega = 11.0174$ rad/s로 구동되는 스피ن들을 갖는 자동조심기구를 나타낸다. 그림에서 물체 1, 2, 3 그리고 4는 각각 스피ن들(spindle), 볼(ball), 볼 그리고 칼리(collar)를 나타낸다. 위 시스템은 1자유도 강체시스템으로 지면과 물체 1, 물체 1과 물체 2 그리고 물체 1과 물체 3은 각각 회전조인트로, 물체 1과 물체 4는

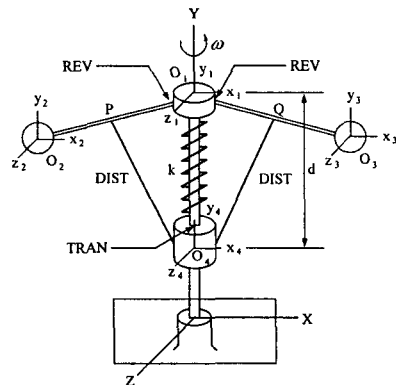


Fig. 2 Governor mechanism driven by constant angular velocity

Table 2 Inertia properties of the governor mechanism

| Body | Mass [kg] | Moment of inertia [kg · m ²] | | |
|---------|-------------|---|-------------------|-------------------|
| | | I _{x'x'} | I _{y'y'} | I _{z'z'} |
| Spindle | 200.0 | 25.0 | 50.0 | 25.0 |
| Ball 1 | 1.0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| Ball 2 | 1.0 | 0.1 | 0.1 | 0.1 |
| Collar | 1.0 | 0.15 | 0.125 | 0.15 |

Table 3 Initial values of the governor mechanism

| Point | Initial Position [m] |
|----------------|----------------------|
| O ₁ | [0.0, 0.2, 0.0] |
| O ₂ | [-0.16, 0.2, 0.0] |
| O ₃ | [0.16, 0.2, 0.0] |
| O ₄ | [0.0, 0.1256, 0.0] |
| P | [-0.08, 0.2, 0.0] |
| Q | [0.08, 0.2, 0.0] |

병진조인트로, 물체 2와 물체 4 그리고 물체 3과 물체 4는 각각 거리가 0.10922 m인 일정 거리의 조인트(distance joint)로 연결되어 있다. 물체 1과 물체 4는 스프링상수 값이 $k_t = 1000$ N/m인 병진스프링과 감쇠상수 값이 $c_t = 30$ Nsec/m인 감쇠기로 연결되어 있으며, 초기상태에서 변형된 길이는 0.15 m이다. 초기상태에서 스펀들과 칼리의 상대거리는 0.0744 m, 스펀들과 볼과의 상대각은 0 rad이며, 초기에 각 물체의 자세는 모두 절대좌표계의 자세와 일치한다. 이 시스템에 관한 관성 특성치는 Table 2에 나타나 있다. Table 3은 초기상태에서 이 시스템을 구성하는 각 물체의 질량중심점 위치와 일정거리 조인트의 조인트 정의점 위치들을 나타낸다. 위 시스템은 2개의 페루프를 가지는 폐쇄계로, 개방계로 만들기 위하여 볼과 칼리를 연결하는 두 개의 일정거리 조인트를 절단하였다. 참고문헌 [6]에서 제안된 평형해석방법으로부터 정상상태에서의 평형위치를 구하면 스펀들과 칼리의 상대거리는 0.15 m, 스펀들과 볼이 이루는 상대회전각의 크기는 0.7856 rad이다. 진동해석을 위해 본 논문에서는 스펀들과 칼리의 상대거리 d 를 독립좌표로 선정하였다. 그리고 제안된 선형화기법으로부터 구한

선형화된 질량행렬 \hat{M}^* 과 강성행렬 \hat{K}^* 는 각각 다음과 같다.

$$\hat{M}^* = [31.4647] \quad (21)$$

$$\hat{K}^* = [1350.9635] \quad (22)$$

이로부터 시스템의 고유진동수는 6.553 rad/s로 구해진다. 이렇게 구해진 고유진동수를 검증하기 위해 본 논문에서는 대표적인 상용프로그램을⁽¹¹⁾ 이용하여 시스템을 모델링 한 후 정상상태에서 충격하중을 가한 후 그 응답을 얻고, 그 응답을 FFT변환하여 고유진동수를 구하였다. Fig. 3은 정상상태인 20초에 충격하중을 가했을 때 스펀들과 칼리의 상대거리 d 의 변화를 나타낸다. Fig. 4는 Fig. 3의 해석결과로부터 sampling frequency를 100Hz로 하고서 22초에서 30초간의 데이터를 FFT해석을 한 결과를 나타낸다. FFT해석결과로

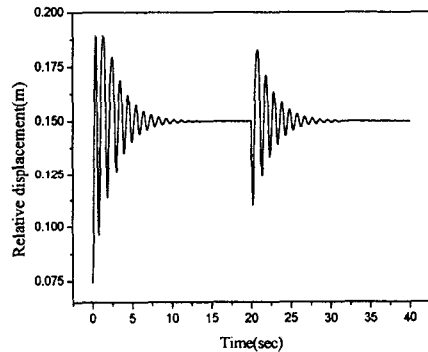


Fig. 3 Relative displacement between spindle and collar

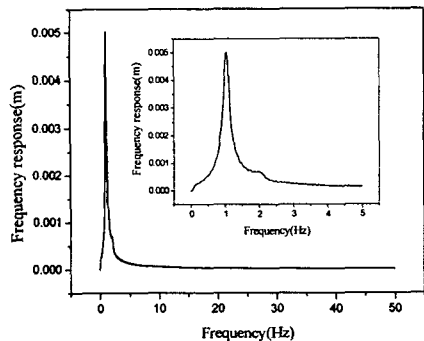


Fig. 4 FFT result of the relative displacement between spindle and collar

부터 1.042Hz의 고유진동수를 얻었으며 이는 본 논문에서 구한 결과(1.042 Hz)와 일치함을 보여 준다.

4.2 회전하는 외팔보의 면내방향 굽힘진동해석

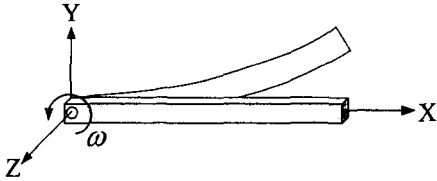


Fig. 5 A cantilever beam driven by constant angular velocity

Fig. 5는 일정 각속도로 회전하는 단면이 일정한 외팔보를 나타낸다. 보의 길이 L 은 1.0 m 이고, 밀도는 100.0 kg/m^3 , Young 계수는 $E = 20.0 \times 10^9$ 이다. 그리고 단면의 면적은 0.01 m^2 이고 관성모멘트 값은 $I_{zz} = 0.00001 \text{ kgm}^2$ 이다. 본 논문에서는 위 시스템을 30개의 lumped mass 요소로 분할한 후 참고문헌 [12]에서 제안하는 Beam Force 이론을 이용해 무차원 각속도 $\bar{\omega}$ 가 2.0과 10.0인 경우에 대하여 위 시스템을 해석하였다. 여기서 무차원 각속도 $\bar{\omega}$ 는 다음과 같다.

$$\bar{\omega} = \sqrt{\left(\frac{\rho L^4}{EI}\right)} \omega \quad (23)$$

여기서 ρ 는 보의 단위 길이 당 질량을 나타낸다.

Table 4는 선형진동해석결과로부터 첫 번째 고유진동수와 두 번째 고유진동수 값들을 기존의 참고문헌[13]에서의 결과와 비교하여 나타낸 표이다. 두 결과는 서로 근접한 모습을 보이는데 본 논문에서의 고유진동수가 참고문헌에서의 값

Table 4 Comparison of natural frequencies

| | | $\bar{\omega}=2.0$ | $\bar{\omega}=10.0$ |
|------------------------------|-----------|--------------------|---------------------|
| The first natural frequency | Present | 1641.44 | 2245.01 |
| | Reference | 1641.44 | 2258.43 |
| The second natural frequency | Present | 10053.36 | 14292.95 |
| | Reference | 10075.72 | 14364.50 |

보다 다소 낮은 값을 나타내는 이유는 참고문헌 [13]에서는 consistent mass를 사용하고 본 논문에서는 lumped mass를 사용함에 기인한다. 일반적으로 consistent mass를 사용하면 실제 고유진동수 값보다 다소 높은 값의 고유진동수를 얻게 되는 반면에, lumped mass를 사용하면 실제 값보다 다소 낮은 값을 얻게된다.⁽¹⁴⁾

5. 결론

본 논문에서는 일정 일반속력을 가지는 구속 다물체계의 정상상태 평형위치에서의 선형화 및 진동해석 방법을 제안하였다. 특히 구속조건이 있는 폐쇄계의 경우에는 편속도행렬을 이용하여 구속력을 제거하고 최소한의 미분방정식을 얻는 방법을 이용하였다. 제안된 해석방법의 타당성을 검증하기 위하여 두 가지 예제를 사용해 정상상태 평형위치를 구하였고, 제안된 선형화기법으로부터 얻어진 선형방정식으로부터 평형위치에서의 선형 진동해석을 수행하여 그 고유진동수들을 구했으며 그 정확성을 검증하였다.

후기

본 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적 설계신기술연구센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Fuehrer, C., and Wallrapp, O., 1984, "A Computer-Oriented Method for Reducing Linearized Multibody System Equations by Incorporating Constraints," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 46, pp. 169~175.
- (2) Sohoni, V. N., and Whitesell, J., 1986, "Automatic Linearization of Constrained Dynamical Models," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 300~304.
- (3) Lynch, A. G., and Vanderploeg, M. J., 1995, "A Symbolic Formulation for Linearization of Multibody Equation of Motion," *ASME*

- Journal of Mechanical Design*, Vol. 117, pp. 441~445.
- (4) 김종인, 박정훈, 유홍희, 배대성, 1999, "구속 다물체계의 정적 평형 및 선형 진동해석," 대한기계학회논문집 A권, 제 23권, 제 5호, pp. 871~880.
 - (5) Park, J. H., Yoo, H. H., and Hwang. Y., 2000, "Computational Method for Dynamic Analysis of Constrained Mechanical Systems Using Partial Velocity Matrix Transformation," *KSME International Journal*, Vol. 14, No. 2, pp. 159~167.
 - (6) 최동환, 박정훈, 유홍희, 2001, "일정 일반속력으로 구동되는 다물체계의 정상상태 평형해석," 대한기계학회, 2001년도 춘계학술대회 논문집 B, pp. 465~470.
 - (7) Kim, S. S. and Vanderploeg, M. J., 1986, "A General and Efficient Method for Dynamic Analysis of Mechanical Systems Using Velocity Transformations," *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. 108, pp. 176~182.
 - (8) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part I. Open Loop Systems," *Mech. Struct. & Mach.*, Vol. 15, No. 3, pp. 359~382.
 - (9) Bae, D. S. and Haug, E. J., 1987, "A Recursive Formulation for Constrained Mechanical System Dynamics: Part II. Closed Loop Systems," *Mech. Struct. & Mach.*, Vol. 15, No. 4, pp. 481~506.
 - (10) Yoo, H. H., 1989, "Dynamic Modeling of Flexible Bodies in Multibody Systems," Ph. D. thesis, University of Michigan.
 - (11) *ADAMS (Version 10.1) User's Guide*, 2000, Mechanical Dynamics, Inc.
 - (12) *ADAMS/Solver User's Guide*, 2000, Mechanical Dynamics, Inc.
 - (13) 유홍희, 1992, "회전 외팔보의 굽힘 진동해석," 대한기계학회논문집 A권, 제 16권, 제 5호, pp. 891~898.
 - (14) Yeh, H. F. and Dopker, B., 1989, "The Reduction of a Consistent Mass Matrix to a Lumped Mass Matrix," Technical Report R-41, The University of Iowa.