

DQM을 이용한 탄성지반 위에 놓인 보-기둥의 자유진동 해석

최 규 문* · ○ 김 무 영**

Free Vibration Analysis of Beam-Columns on Elastic Foundation Using Differential Quadrature Method

Choi, Kou Moon · Kim, Mu Young

ABSTRACT

This paper deals with the free vibration analysis of beam-columns on elastic foundation using Differential Quadrature Method. Based on the dynamic equilibrium equation of a beam element acting the stress resultants and the inertia force, the governing differential equation is derived for the in-plane free vibration of such beam-columns. For calculating the natural frequencies, this equation is solved by the Differential Quadrature Method.

It is expected that the results obtained herein can be used in application of Differential Quadrature Method to the field of civil engineering and practically in the structural engineering, the foundation engineering and the vibration control fields.

1. 서 론

컴퓨터의 기계적인 발전에 따라 공학과 자연과학에서 새로운 수치해석의 개발이 이루어지고 있다. 이에 따라 많은 동적 시스템의 시뮬레이션에 필요한 빠른 수치해석이나, 큰 컴퓨터저장공간이 필요한 경우에 빠르고 정확하고 효율적인 수치해석 시스템이 요구되고 있다. 이와 같은 요구에 부응하여 새로운 구조해석법 중에 하나인 미분구적법(Differential Quadrature Method: DQM)이 개발되었다.

미분구적법은 Bellman and Casti⁽¹⁾에 의해 1971년 처음으로 소개되었다. 이 논문에서 유한차분법의 과정에서 생기는 수치적 안정성에 관한 긴 적분항의 복잡한 계산과 많은 시간을 상대적으로 줄

이기 위해서 편미분방정식과 일반적인 초기치 문제의 수치해석에 대한 새로운 기술로서 미분구적법을 제시되었다. DQM은 단순 미적분방정식에서부터 매우 복잡하다고 알려진 문제도 매우 효율적으로 해를 산출할 수 있다. 그 후 미분구적법은 여러 분야에서 적용되었으며 다양한 분야로 확장되고 있다.

DQM의 가장 괄목할만한 발전은 1989년 Jang과 Bert⁽²⁾에 의해 구조 역학문제들에 DQM을 적용한 논문이 발표되면서부터이다. 이러한 연구들은 보나 평판의 동적, 정적 힘을 해석하는 것이었고 이를 통해 정적, 동적 문제의 해결과정에서 DQM의 효율성이 입증되었다.

공학에서 지반 위에 놓인 구조물의 거동해석에 주로 이용되고 있는 지반모형은 1867년 Winkler⁽³⁾가 제안한 탄성지반모형이다. 탄성지반모형은 Fig. 1과 같이 무한개의 독립적인 스프링으로 지반을 표현한 가장 간단한 지반모형으로 비교적 이론전

* (주) 백두플랜트

** (유) 예림건설

개가 용이하기 때문에 많은 공학분야에서 이용되고 있다.

본 연구는 위에서 언급한 DQM을 이용하여 Winkler지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동 문제를 해석하는데 연구목적이 있다. 이를 위하여 대상 기둥의 자유진동을 지배하는 지배미분방정식을 유도하고, 수치해석기법을 이용하여 유도된 지배방정식으로부터 고유진동수를 산출하기 위한 컴퓨터 프로그램을 작성하였다.

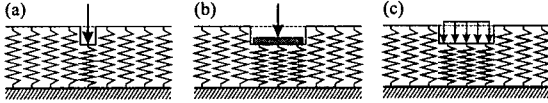


Fig 1. Winkler foundation

2. 수학적 모형

Fig. 2는 Winkler지반위에 놓인 보의 진동모드를 나타낸 것이다. 본 연구에서 보의 자유진동은 조화진동을 한다고 가정하면 이 때 보에 발생하는 변위 w , 합응력 V , M 및 관성력 F_i 의 조화진동식은 다음과 같이 표시된다.

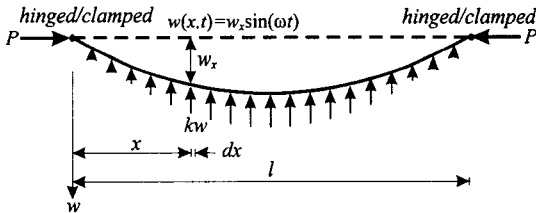


Fig 2. Geometry of beam on Elastic foundation

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega t) \quad (1)$$

$$V(x, t) = V_x \sin(\omega t) \quad (2)$$

$$M(x, t) = M_x \sin(\omega t) \quad (3)$$

$$F_i(x, t) = F_{ix} \sin(\omega t) \quad (4)$$

식 (1)~(4)에서 w_x , V_x , M_x , F_{ix} 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω 는 고유진동수, t 는 시간이다.

축하중을 받는 보-기둥 미소요소에서 자유진동하게 되면 Fig. 2에서와 같이 보-기둥 미소요소에 단부축하중에 의한 P 가 작용하며, 시간에 따

라 변화하는 진동변위에 의해 전단력 V , 휨모멘트 M 및 지반반력 kw 가 발생하고, 질량을 가지고 있는 부재의 미소요소가 진동함으로써 관성력 F_i 가 작용하게 된다. Fig. 3에서 부재 미소요소에 작용하는 이 힘들의 동적평형방정식을 세우면 다음과 같다.

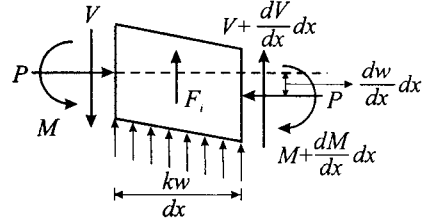


Fig 3. Loads on a small element

$$V - \frac{dM}{dx} - P - \frac{dw}{dx} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{dV}{dx} + F_i + kw = 0 \quad (6)$$

$$M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (7)$$

$$F_i = \rho A \omega^2 w \quad (8)$$

여기서 k , E 는 각각 지반 탄성계수 및 재료의 탄성계수이며, I , A , ρ 는 각각 부재의 단면 2차 모멘트, 단면적 및 단위체적당 질량이다. 또한 식 (7)은 보-기둥의 모멘트-곡률관계를 나타낸 것이고, 식 (8)은 단위길이당 관성력이다.

식 (7)로부터 dM/dx 를 구하여 식 (5)에 대입하고 이로부터 dV/dx 를 구하면 식 (9)와 같고, 식 (6)에 식 (8)과 (9)를 대입하면, 축하중을 받는 탄성지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식을 다음 식 (10)과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{dV}{dx} = EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (9)$$

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + P \frac{d^2 w}{dx^2} + \rho A \omega^2 w + kw = 0 \quad (10)$$

상미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같이 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = x/l \quad (11)$$

$$\eta = w_x/l \quad (12)$$

$$p = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI} \quad (13)$$

$$\lambda = kl^4/\pi^4 EI \quad (14)$$

$$C_i = \omega_i l^2 (\rho A/EI)^{1/2}, \quad i=1,2,3,4,\dots \quad (15)$$

여기서, ξ , η , p 는 각각 무차원 축방향 좌표, 무차원 변위 및 무차원 하중이고, λ , C_i 는 각각 무차원 지반계수와 무차원 고유진동수이며, i 는 모드번호(mode number)이다.

식 (11)~(15)에서 정의한 무차원 변수를 대입하면 다음 식 (16)과 같이 축하중을 받는 탄성지반 위에 놓인 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식이 유도된다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -\pi^2 p \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + (C_i^2 - \pi^4 \lambda) \eta \quad (16)$$

위에서 구한 상미분방정식을 이용하여, 본 연구에서 채택하고자 하는 단부조건에 대한 경계조건식은 다음과 같다.

먼저 회전단인 경우 보-기둥의 좌단 ($x=0$) 또는 우단 ($x=l$)에서 변위 및 휨모멘트가 "0"이므로 식 (7), (11), (12)를 이용하면 다음과 같은 경계조건식이 유도 된다.

$$\xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서 } \eta=0 \quad (17.1)$$

$$\xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서 } \eta'=0 \quad (17.2)$$

고정단인 경우 보-기둥의 좌단 ($x=0$) 또는 우단 ($x=l$)에서 변위 및 단면회전각 (dw_x/dx)이 "0"이므로 식 (11), (12)를 이용하면 다음과 같은 경계조건식이 유도 된다.

$$\xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서 } \eta=0 \quad (18.1)$$

$$\xi=0 \text{ 또는 } \xi=1 \text{에서 } \eta'=0 \quad (18.2)$$

위에서 구한 회전단 및 고정단의 경계조건식을 이용하면 식 (16)의 미분방정식을 해석하여 대상 보-기둥의 고유진동수를 구할 수 있다.

3. DQM에 의한 수치해석

본 연구에서 유도한 미분방정식 식 (16)에서 고유진동수 C_i 값을 산출하는 것은 고유치문제이며, 이 연구에서는 DQM을 이용하여 고유진동수 C_i 값을 산출한다.

미분구적법을 이용하기 위하여 $0 \leq x \leq l$ 의 영역에서 $(N-1)$ 개의 간격을 갖는 절점 x_1, x_2, \dots, x_N 을 Shu⁽⁴⁾가 제시한 방법을 이용하여 나타내면 절점 x_i 는 다음과 같다.

$$x_i = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\cos \frac{i-1}{N-1} \cdot \pi \right) \right] \quad (19)$$

$$i=1, 2, \dots, N$$

위 식을 이용하면 미분구적법에서 필요한 가중계수를 계산할 수 있으며, 미분구적법을 이용하여 위의 식 (16)을 이산화 시키면 다음과 같다.

$$\sum_{k=1}^N c_{ik}^{(4)} \eta_k + \pi^2 p \sum_{k=1}^N c_{ik}^{(2)} \eta_k = (C_i^2 - \pi^4 \lambda) \eta_i \quad (20)$$

여기서 η_i , $i=1, 2, 3, \dots, N$ 은 격자점 x_i 에서 함수값이며, $c_{ik}^{(n)}$ 에서 $n=2, 4$ 는 n 계미분의 가중계수이다.

앞에서 구한 탄성 지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식의 경계조건식 식 (17), (18)을 DQM에 적용하면 다음과 같다.

$$\eta_1 = 0 \quad (21)$$

$$\sum_{k=1}^N c_{1,k}^{(n)} \eta_k = 0 \quad (22)$$

$$\eta_N = 0 \quad (23)$$

$$\sum_{k=1}^N c_{1,k}^{(n)} \eta_k = 0 \quad (24)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{AXN} \sum_{k=3}^{N-2} AXK1 \eta_k \quad (25)$$

$$\eta_{N-1} = \frac{1}{AXN} \sum_{k=3}^{N-2} AXKN \eta_k \quad (26)$$

여기서 $AXK1 = c_{1,k}^{(n)} c_{N,N-1}^{(n)} - c_{1,N-1}^{(n)} c_{N,k}^{(n)}$, $AXKN = c_{1,2}^{(n)} c_{N,k}^{(n)} - c_{1,k}^{(n)} c_{N,2}^{(n)}$, $AXN = c_{N,2}^{(n)} c_{1,N-1}^{(n)} - c_{1,2}^{(n)}$

$c_{N,N-1}^{(n)}$ 이며, 고정-고정이면 $n_0=1, n_1=1$, 고정-회전이면 $n_0=1, n_1=2$, 회전-고정이면 $n_0=2, n_1=1$, 회전-회전이면 $n_0=2, n_1=2$ 이다.

이상의 경계조건식들을 이용하여 탄성 지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식 식 (20)을 다음 식 (27)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum_{k=3}^{N-2} c_3 \eta_k + \pi^2 p \sum_{k=3}^{N-2} c_1 \eta_k = (C_i^2 - \pi^4) \eta_i \quad (27)$$

for $i = 3, 4, \dots, N-2$

여기서

$$c_1 = c_{i,k}^{(2)} - \frac{c_{i,2}^{(2)} AXK1 + c_{i,N-1}^{(2)} AXKN}{AXN}$$

$$c_3 = c_{i,k}^{(4)} - \frac{c_{i,2}^{(4)} AXK1 + c_{i,N-1}^{(4)} AXKN}{AXN}$$

$\eta_i, i = 1, 2, 3, \dots, N$ 은 격자점 X_i 에서 함수 값이며, $c_{i,k}^{(n)}, n = 2, 3, 4$ 는 n 계미분의 미분구적 가중 계수이다.

앞에서 언급한 경계조건을 적용시키면 식 (27)은 다음 식 (28)과 같이 행렬식으로 표시된다.

$$[A_v]\{\eta\} = \Omega^2\{\eta\} \quad (28)$$

위와 같은 형태의 문제를 푸는데는 여러 가지 방법이 있으나, 여기서는 QR알고리즘을 이용하여 행렬의 고유치 Ω 를 구하고 이를 통해 고유진동수 C_i 를 산출하였다.

4. 수치해석 결과 및 토의

Table 1은 본 연구결과를 비교 검증하기 위해 타 문헌의 결과들과 비교한 것이다. Table 1에서 볼 수 있듯이 본 연구의 결과와 문헌들의 결과는 아주 우수하게 접근하고 있어 본 연구결과의 타당성을 입증할 수 있다.

Table 2는 Winkler지반계수가 $\lambda = 4.5$ 이고 축하중 $p=0$ 인 경우 무차원 고유진동수 C_i 와 부재

의 등분수 N 의 관계를 나타낸 것이다. $N=18$ 일 때 $i=4$ 의 값이 정확한 무차원 고유진동수 값에 수렴함을 알 수 있었다.

Table 1. Comparison of C_i between this study and reference

Constraint	Comparison	Frequency parameter, C_i		
		C_1	C_2	C_3
Hinged-hinged $p=0, \lambda=3$	this study	19.74	43.20	90.46
	reference[5]	19.75	43.02	90.45
Hinged-clamped $p=0, \lambda=4.5$	this study	6.979	36.93	86.32
	reference[6]	6.989	36.95	86.33
Clamped-clamped $p=0, \lambda=4.5$	this study	30.64	65.13	122.7
	reference[5]	30.64	65.24	-
Clamped-clamped $p=2, \lambda=0$	this study	15.95	53.76	112.5
	reference[6]	15.97	53.97	113.0

Table 2. Comparison of C_i with changing the number of dividing elements

N	Frequency parameter, C_i			
	C_1	C_2	C_3	C_4
6	30.13	52.77	0.00	0.00
8	30.69	66.91	115.99	139.17
10	30.64	65.06	125.30	236.97
12	30.64	65.13	122.50	198.48
14	30.64	65.13	122.72	201.16
16	30.64	65.13	122.70	200.94
18	30.64	65.13	122.70	200.95
20	30.64	65.13	122.70	200.95

Fig. 4는 축하중이 작용하지 않는 경우 ($p=0$)에 무차원 고유진동수 C_i 와 Winkler지반계수 λ 의 관계를 나타낸 것이다. Fig. 4에서 지반계수 λ 가 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 증가한다.

Fig. 5는 Winkler지반계수가 $\lambda=4.5$ 인 경우, 무차원 고유진동수 C_i 와 축하중 p 의 관계를 나타낸 것이다. 축하중 " - "하중 즉 축인장응력이 작용

하면 하중이 커짐에 따라 무차원 고유진동수 값은 증가하고, 축압축력이 작용하는 경우 무차원 고유진동수는 감소함을 알 수 있다. 또한, 무차원 고유진동수 C_i 가 0이 되는 □으로 표시된 지점의 하중이 좌굴하중임을 알 수 있다.

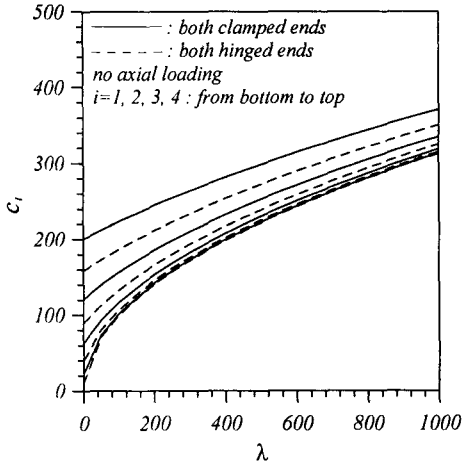


Fig 4. C_i versus λ curves

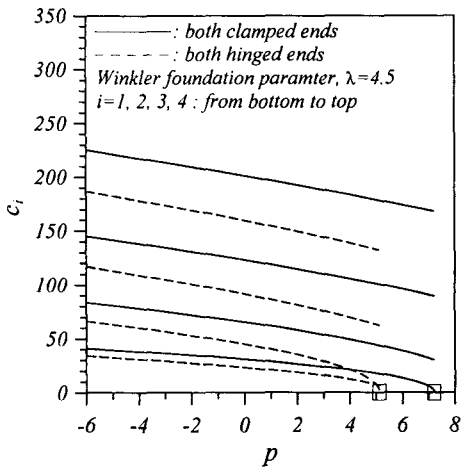


Fig 5. C_i versus p curves

5. 결론

이 논문은 Winkler형 지반위에 놓인 보-기둥의 자유진동 및 좌굴하중 해석에 관한 연구이다. Winkler형 지반위에 놓인 축하중을 받는 보-기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하였으며, 이를 DQM를 이용하여 수치해석 하였다. 이 연구의 수치해석결과가 타문헌과의 결과와 일치하므로 본 연구에서 실시한 수치해석방법이 타당함을 검증할 수 있었으며, 이를 통해 DQM가 고유치 문제에 매우 유용하게 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

참고문헌

1. Bellman, R. and Casti, J. 1971, Differential Quadrature and Long-Term Integration, Journal of Mathematical Analysis and Application, Vol. 34, pp.235-238.
2. Jang, S. K., Bert, C. W., and Striz, A. G., 1989, "Application of Differential Quadrature to Static Analysis of Structural Components," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.28, pp.561-577.
3. 이병구, 오상진, 이재만, 1998, "탄성지반위에 놓인 곡선형 Timoshenko보의 자유진동", 한국전산구조공학회 논문집, 제11권 제2호, pp.273-280.
4. Shu, C. and Xue, H. 1997, Explicit Computation of Weighting Coefficients in the Harmonic Differential Quadrature, Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, , Iss 3, pp.549-555.
5. Nielsen, M. T. 1982, Resistance of a Soil Layer to Horizontal Vibration of a Pile, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pp.497-510.4.
6. Bokaian, A., 1988, Natural Frequencies of Beams under Compressive Axial Loads, Journal of Sound and Vibration, Vol. 126, pp. 49-65.