

원통형 압전 변환기의 반경방향 진동 특성

°김진오* · 정형곤**

Radial Vibration of Cylindrical Piezoelectric Transducers

Jin Oh Kim and Hyung Gon Jeong

Key Words: Piezoelectricity(압전), Transducer(변환기), Radial Vibration(반경방향 진동), Fundamental Mode(기본모드), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

The paper deals with a theoretical study on the radial vibration of cylindrical piezoelectric transducers. The differential equations of piezoelectric radial motion have been derived in terms of the radial displacement and electrical potential. Applying mechanical and electrical boundary conditions has yielded the characteristic equations of natural vibration. Numerical results of the fundamental natural frequency have been compared with experimental observations for the transducers of several sizes, and have shown a good agreement.

1. 서론

압전 변환기는 역학적 양인 응력 또는 압력과 전기적 양인 전압 또는 전하간의 상호 변환인 압전현상⁽¹⁾을 이용하는 것으로서, 요즈음 다양한 분야에서 활용되고 있다. 특히, 전기신호를 역학적 진동으로 변환시키는 역압전현상은 액추에이터에 활용되고,⁽²⁾ 역학적 진동을 감지하여 전기신호로 변환시키는 정압전현상은 센서에 활용된다.⁽³⁾

대부분의 압전 변환기들은 원판(disk)형으로서 압전소자의 두께방향 종진동을 이용한다. 간혹 전단운동을 이용하는 사례가 있는데, 원판형이되 원주방향으로 운동하도록 압전소자를 배열하여 비틀림 진동을 발생시키는 압전 비틀림 변환기가 있다.^(4,5) 또한 원통형으로서 축방향 전단변형을 하는 종진동을 이용하는 원통형 압전 진동 자이

로스코프가 있다.⁽⁶⁾

본 논문은 원통형으로서 반경방향으로 진동하는 압전 변환기를 대상으로 한다. 이러한 변환기에 대한 진동 특성을 해석한 연구는 보고된 바 없다. 이 변환기의 압전소자는 두께방향인 반경방향으로 분극되어 있고, 두께방향 전압에 의해 구동된다. 이러한 원통형 압전 변환기는 관(pipe)의 외벽에 설치되어, 관에 반경방향 진동을 발생시켜 축대칭 파동을 전파시키고 또한 그러한 파동을 감지하여 수신하는 변환기로 활용하고자 연구 중에 있다. 그러한 연구의 일환으로 변환기의 압전 고유진동수를 계산하는 이론을 확립하는 것이 본 논문의 목적이다.

본 논문에서는 반경방향 운동변위와 전기 퍼텐셜로 표현되는 지배방정식을 구성한다. 여기에 역학적 경계조건과 전기적 경계조건을 적용하여 압전 고유진동의 특성방정식을 유도한다. 이식을 이용하여 여러 크기의 변환기들에 대한 압전 고유진동수를 계산하고, 그 결과를 측정결과와 비교하여 이론을 검증한다.

* 정회원, 숭실대학교 공과대학 기계공학과
E-mail : jokim@saint.soongsil.ac.kr
Tel : (02) 820-0662, Fax : (02) 820-0668

** 숭실대학교 대학원 기계공학과

2. 변환기 모델링

원관형 압전체가 두께방향으로 구동되어 진동하는 경우에 대해서는 전기-역학적 관계식이 잘 정리되어 있다.⁽⁷⁾ 그와 같은 방식을 따라서 반경방향으로 진동하는 원통형 압전체의 운동을 표현하기 위하여, 축대칭이고 축방향으로 균일한 반경방향 변위 $u(r, t)$ 와 전기 퍼텐셜 $\phi(r, t)$ 를 사용한다. 압전체 내의 원통형 요소에서의 반경방향 응력 σ_r 및 원주방향 응력 σ_θ 와 반경방향 전기적 변위 D 는 반경방향 역학적 변위 u 및 전기장 $(-\partial\phi/\partial z)$ 와의 관계가 다음과 같다.

$$\sigma_r = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (1)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2G \frac{u}{r} \quad (2)$$

$$D_r = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial r} - \zeta \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (3)$$

여기서 λ 와 G 는 Lamé 탄성상수로서, 영률 (Young's modulus) 및 포와송 비(Poisson's ratio)로는 다음과 같이 표현된다.⁽⁸⁾

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4a)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4b)$$

그리고 $\varepsilon (= d_{33}/s_{33}^E)$ 은 압전응력상수(piezoelectric stress constant)이고, ζ 는 유전율(permittivity)이다.

반경방향 힘의 평형으로부터 얻은 식과 정전기적 방정식은 각각 다음과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD_r) = \frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{D_r}{r} = 0 \quad (6)$$

여기서 ρ 는 질량 밀도이다. 식 (1)~(3)을 식 (5)와 (6)에 대입하여 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{\widehat{E}_L} \frac{\varepsilon^2}{\zeta} \frac{u}{r^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\varepsilon}{\zeta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (8)$$

여기서 $c_L (= [\widehat{E}_L/\rho]^{1/2})$ 는 종파의 전파속도이고, $\widehat{E}_L = E_L + \varepsilon^2/\zeta$ 이며 $E_L = \lambda + 2G$ 이다.

전극에 가해지는 전기신호가 진동수 ω 로 시간 t 에 따라 조화함수 형태로 변화하는 신호라면, 진동 변위들도 시간 t 에 대한 조화함수 형태로 간주할 수 있다. 따라서 $u(r, t)$ 와 $\phi(r, t)$ 를 다음과 같이 변수분리 한다.

$$u(r, t) = \tilde{u}(r) e^{j\omega t} \quad (9)$$

$$\phi(r, t) = \tilde{\phi}(r) e^{j\omega t} \quad (10)$$

식 (9)와 (10)을 식 (7)과 (8)에 대입하면 다음과 같이 $\tilde{u}(r)$ 와 $\tilde{\phi}(r)$ 에 대한 지배방정식을 얻는다.

$$r^2 \frac{d^2 \tilde{u}}{dr^2} + r \frac{d\tilde{u}}{dr} + (k^2 r^2 - p^2) \tilde{u} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{\phi}}{dr} \right) = \frac{\varepsilon}{\zeta} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\tilde{u}}{dr} \right) \quad (12)$$

여기서 $k (= \omega/c)$ 는 파동수이고, p 는 다음과 같이 정의된 상수이다.

$$p^2 = 1 - \frac{1}{\widehat{E}_L} \frac{\varepsilon^2}{\zeta} \quad (13)$$

식 (11)의 해는 다음과 같은 형태로 된다.

$$\tilde{u}(r) = AJ_p(kr) + BJ_{-p}(kr) \quad (14)$$

식 (14)를 식 (12)에 대입한 후 $\tilde{\phi}(r)$ 의 해를 구하면 다음 식을 얻는다.

$$\tilde{\phi}(r) = \frac{\epsilon}{\zeta} [AJ_p(kr) + BJ_{-p}(kr)] + a \ln r + b \quad (15)$$

식 (14)와 (15)에서 결정되지 않는 A, B, a, b 는 경계조건에 따라 결정된다.

3. 반경방향 진동 특성방정식

원통형 압전 변환기는 개략적으로 Fig. 1에 보인 바와 같다. 원통형의 내부 반지름은 R_i 이고 외부 반지름은 R_o 이다. 변환기는 내면과 외면 사이에 작용하는 전압 $V_0 e^{j\omega t}$ 에 의해 구동되고 있다. 이에 대한 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$r = R_i \text{ 에서 } \quad \tilde{\sigma}_r = 0 \quad (16a)$$

$$\tilde{\phi} = 0 \quad (16b)$$

$$r = R_o \text{ 에서 } \quad \tilde{\sigma}_r = 0 \quad (16c)$$

$$\tilde{\phi} = V_0 \quad (16d)$$

전단응력 $\sigma_r (= \tilde{\sigma}(r) e^{j\omega t})$ 는 식 (1)에 표현된 관계를 가지므로, 식 (14)와 (15)에 (16a~d)를 적용하면 다음과 같다.

$$f_1(kR_i) A + f_2(kR_i) B + \frac{\epsilon}{R_i} a = 0 \quad (17a)$$

$$g_1(kR_i) A + g_2(kR_i) B + a \ln R_i + b = 0 \quad (17b)$$

$$f_1(kR_o) A + f_2(kR_o) B + \frac{\epsilon}{R_o} a = 0 \quad (17c)$$

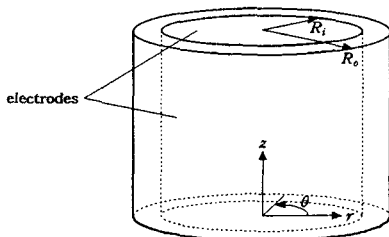


Fig. 1 Schematic diagram of a cylindrical transducer.

$$g_1(kR_o) A + g_2(kR_o) B + a \ln R_o + b = V_0 \quad (17d)$$

여기서

$$f_1(kr) = \widehat{E}_L \frac{d}{dr} [J_p(kr)] + \lambda \frac{1}{r} J_p(kr) \quad (18a)$$

$$f_2(kr) = \widehat{E}_L \frac{d}{dr} [J_{-p}(kr)] + \lambda \frac{1}{r} J_{-p}(kr) \quad (18b)$$

$$g_1(kr) = \frac{\epsilon}{\zeta} J_p(kr) \quad (18c)$$

$$g_2(kr) = \frac{\epsilon}{\zeta} J_{-p}(kr) \quad (18d)$$

이다.

식 (17a~d)의 해를 구하면 다음과 같다.

$$A = -\frac{V_0}{\Delta} [R_o f_2(kR_o) - R_i f_2(kR_i)] \quad (19a)$$

$$B = \frac{V_0}{\Delta} [R_o f_1(kR_o) - R_i f_1(kR_i)] \quad (19b)$$

$$a = \frac{V_0}{\epsilon \Delta} R_i R_o [f_i(kR_i) f_2(kR_o) - f_1(kR_o) f_2(kR_i)] \quad (19c)$$

$$b = \frac{V_0}{\Delta} \left\{ [R_o f_2(kR_o) - R_i f_2(kR_i)] g_1(kR_i) - [R_o f_1(kR_o) - R_i f_1(kR_i)] g_2(kR_i) - \frac{R_i R_o \ln R_i}{\epsilon} [f_1(kR_i) f_2(kR_o) - f_1(kR_o) f_2(kR_i)] \right\} \quad (19d)$$

여기서 Δ 는 다음과 같으며, 식 (20)이 원통형 압전 변환기의 반경방향 공진을 나타내는 특성방정식이다.

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

$$D_{11} = R_o f_1(kR_o) - R_i f_1(kR_i)$$

$$D_{12} = R_o f_2(kR_o) - R_i f_2(kR_i)$$

$$D_{21} = g_1(kR_o) - g_1(kR_i) - \frac{R_o}{\epsilon} f_1(kR_o) \ln \frac{R_o}{R_i}$$

$$D_{22} = g_2(kR_o) - g_2(kR_i) - \frac{R_o}{\epsilon} f_2(kR_o) \ln \frac{R_o}{R_i}$$

식 (19a~b)를 식 (14)에 대입하면 진동 모드형상 -1140-을 알게 된다.

4. 수치계산 및 실험

앞 절의 해석 결과를 검증하기 위하여, 수치계산과 실험을 행한다. 실제 원통형 압전 변환기의 치수와 물성치들을 대입하여 압전 고유진동수를 계산하고, 실험을 통하여 고유진동수를 측정하여 계산 결과와 비교한다.

식 (20)에서 미지수인 파동수 k 는 고유진동수 f 와 다음의 관계가 있다.

$$f = \frac{kc}{2\pi} \quad (21)$$

k 는 수치계산 도구에 의존하여 식 (20)으로부터 구할 수 있는데, Mathematica⁽⁹⁾의 FindRoot 기능

Table 1 Electromechanical properties of a PZT (EDO EC-64).

Electromechanical Properties	Values
Mass density, ρ	7,500 kg/m ³
Permittivity, ζ	6.130 × 10 ⁻⁹ C ² /Nm ²
Piezoelectric strain constant, d_{33}	0.295 × 10 ⁻⁹ C/N
Elastic constant, s_{33}^E	0.0150 × 10 ⁻⁹ m ² /N
Elastic constant, s_{44}^E	0.0388 × 10 ⁻⁹ m ² /N
Piezoelectric stress constant, ϵ ($= d_{33}/s_{33}^E$)	19.67 C/m ²
Young's modulus, E ($= 1/s_{33}^E$)	66.7 GPa
shear modulus, G ($= 1/s_{44}^E$)	25.8 GPa
Poisson's ratio, ν	0.293
Lame constant, λ	36.4 GPa

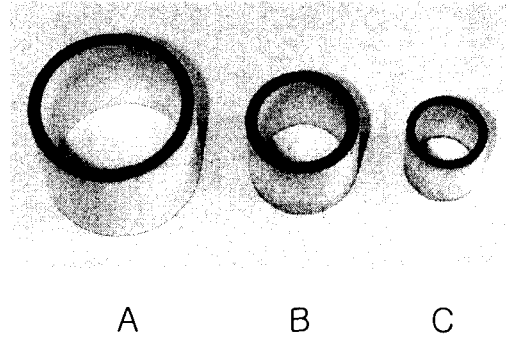


Fig. 2 Photograph of three transducers.

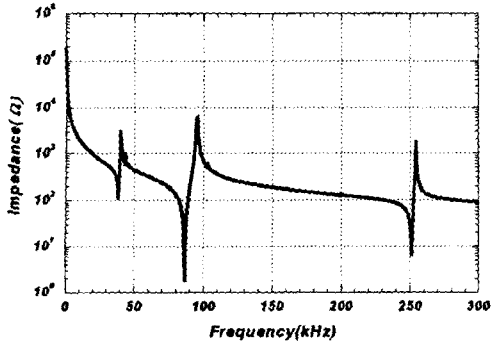
을 사용하면 계산이 간편하다.

계산과 실험에 사용된 압전소자는 미국 EDO사의 PZT (EC-64)로서, 필요한 물성치들이 Table 1에 정리되어 있는데 일반 문헌에 나와있는 물성치와 비슷하다.^(10,11) 세가지 크기의 변환기 A, B, C를 사용하였고, 이들의 치수인 외부 반경 R_o , 내부 반경 R_i , 두께가 Table 2에 기재되어 있다. 변환기의 길이는 A가 20 mm, B가 15 mm, C가 12 mm인데, 이 값들은 고유진동수 계산에 필요하지는 않다. 세 개의 변환기에 대하여 기본모드의 압전 고유진동수를 식 (20)과 (21)로부터 계산하여 Table 2에 기재하였다.

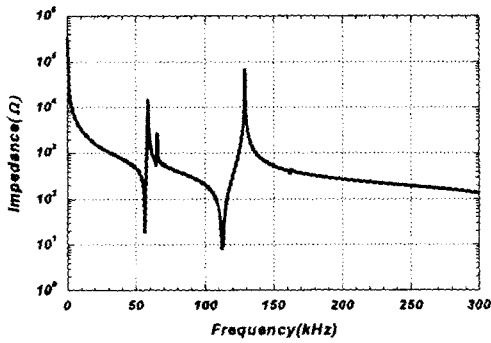
계산된 결과와 비교하기 위하여, Fig. 2에 보이는 세 개의 변환기에서의 압전 고유진동수를 측정하였다. Impedance Gain/Phase Analyzer (HP 4194A)를 사용하여 변환기의 임피던스를 주파수의 함수로 측정한 결과가 Fig. 3에 있다. 이 그래프에서 임피던스가 극소값을 나타내는 주파수가 압전 고유진동수이며, 그중 가장 작은 진동수가 기본모드의 고유진동수이다. 세 개의 변환기에 대하여 이와 같이 측정된 압전 고유진동수를 Table 2에 기재하였다.

Table 2 Comparison of the calculated and measured natural frequencies of the fundamental mode for the transducers of three sizes.

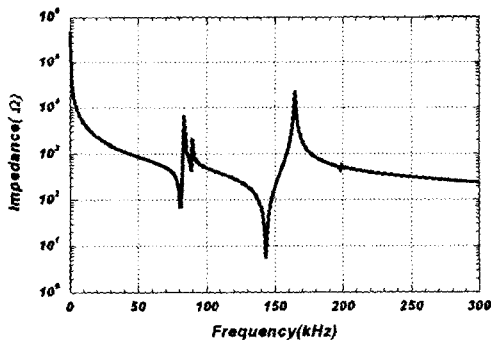
Transducer	Size (mm)			Fundamental frequency (kHz)	
	outer radius	inner radius	thickness	calculated	measured
A	14.3	12.0	2.3	37.9	38.8
B	10.05	7.80	2.25	56.0	56.3
C	7.10	5.50	1.60	79.4	80.8



(a) transducer A



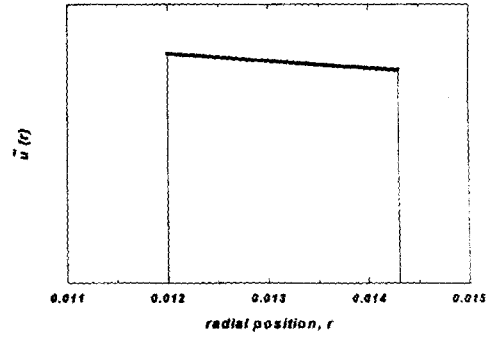
(b) transducer B



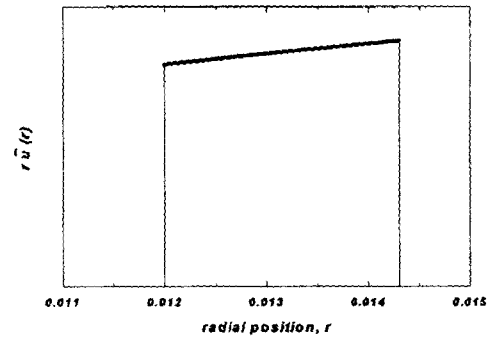
(c) transducer C

Fig. 3 Impedance curves of the piezoelectric transducers measured as a function of the frequency.

Table 2에서 세 개의 변환기에 대해 계산 결과와 측정 결과를 비교하는데, 서로 잘 일치하고 있다. 따라서 앞 절에서 보인 해석은 원통형 압전 변환기의 고유진동 특성을 정확히 묘사하고 있으며, 변환기를 설계할 때 원하는 고유진동수를 갖는 변환기 치수를 결정하는 데에 활용될 수 있겠다.



(a) radial displacement



(b) radius × displacement

Fig. 4 Mode shape of the fundamental mode for the radial vibration of transducer A.

한편, 변환기 A와 B는 두께가 비슷하지만 고유진동수는 크게 다르다. 즉, 두께가 비슷하더라도 직경이 다른 고유진동수가 다를 수 있다. 이는 원판형 압전 변환기에서의 두께방향 진동⁽⁷⁾과는 다른 원통형 변환기의 특성이다.

변환기의 반경방향 진동 모드형상은 식 (14)로부터 구할 수 있다. 기본모드의 진동형상을 계산하였는데, 세 개의 변환기 중에서 변환기 A에 대한 모드 형상을 Fig. 4(a)에 나타내었다. 중심에서 멀어질수록 진동 변위가 줄어드는데, 이는 원주 길이 $2\pi r$ 의 증가 때문이기도 하다. 원주 길이의 영향을 배제할 때 진동 변위가 어떤 형상을 보이는지 파악하기 위하여, 반경방향 진동 변위 $\tilde{u}(r)$ 에 반경 좌표 r 을 곱한 값을 Fig. 4(b)에 나타내었다. 이는 일반적으로 압전 평판에서 두께 방향 진동의 기본 모드 형상과 유사하다.

5. 결론

반경방향으로 진동하는 원통형 압전 변환기의 압전 고유진동을 해석하여 특성방정식을 유도하였다. 구한 방정식에 물성치를 대입하여 기본모드의 압전 고유진동수를 계산하였다. 계산된 고유진동수를 측정된 값과 비교함으로써 해석 결과를 검증하였다. 원통형 압전 변환기를 설계하거나 선정할 때에 원하는 고유진동수에 맞는 반경과 두께 등을 예측하는 데에 활용될 이론을 제시하였다.

세가지 크기의 변환기에 대하여 기본 고유진동수를 구하여 서로 비교해 본 결과, 원통형 압전 변환기의 고유진동수는 원통형 탄성체에서와 마찬가지로 두께와 반경에 의존되는 경향을 확인하였다. 또한 두께가 같더라도 반경에 따라 고유진동수가 다르게 됨을 확인하였다.

후 기

본 논문은 숭실대학교 2000년도 교내학술연구비 지원과제로 수행된 연구의 결과이다. 실험에 사용하도록 압전 변환기를 제공한 ISTECS(주)에 감사한다.

참고문헌

(1) Ikeda, T., 1996, Fundamentals of Piezoelectricity, Oxford University Press, Oxford.

(2) Uchino, K., 1997, Piezoelectric Actuators and Ultrasonic Motors, Kluwer Academic Publishers, Boston.

(3) Elwenspoek, M. and Wiegerink, R., 2001, Mechanical Microsensors, Springer, Berlin.

(4) 권오수, 김진오, 2000, "압전 비틀림 변환기의 진동특성 해석", 한국소음진동공학회지, 제10권, 제6호, pp. 955~962.

(5) 권오수, 김진오, 2001, "광주방형 압전 비틀림 변환기의 진동특성", 대한기계학회논문집(A), 제25권, 제8호, pp. 1197~1205.

(6) 이영신, 강이석, 김용환, 문흥기, 오재문, 변영철, 1997, "원통형 압전 진동 자이로 개발", 한국항공우주학회지, 제25권, 제1호, pp. 106~116.

(7) Miu, D. K., 1993, Mechatronics : Electromechanics and Contromechanics, Springer-Verlag, New York, chap. 6.

(8) Achenbach, J. D., 1975, Wave Propagation in Elastic Solids, North Holland, Amsterdam, chap. 2.

(9) Wolfram, S. 1988, Mathematica : A System for Doing Mathematics by Computer, Addison-Wesley Publishing Co., New York.

(10) 岡崎清, 1983, セラミック誘電体工学, 第3版, 學獻社, 第8章.

(11) Berlincourt, D. A., Cmolik, C., Jaffe, H., 1960, "Piezoelectric Properties of Polycrystalline Lead Titanate Zirconate Compositions," Proceedings of the IRE, pp. 220~229.