

유동유체에 의한 복수 스프링 지지된 파이프의 동적안정성

0류봉조*, 정승호**

Dynamic Stability of Pipes Conveying Fluid with Spring Supports

Bong-Jo Ryu and Seong-Ho Jung

ABSTRACT

The paper presents the dynamic stability of a vertical cantilevered pipe conveying fluid and having translational linear spring supports. Real pipe systems may have some elastic hanger supports or other mechanical attached parts., which can be regarded as attached spring supports. Governing equations are derived by energy expressions, and numerical technique using Galerkin's method is applied to discretize the equations of small motion of the pipe. Effects of spring supports on the dynamic stability of a vertical cantilevered pipe conveying fluid are fully investigated for various locations and spring constants of elastic supports.

1. 서론

유동유체에 의한 파이프의 진동과 동적안정성에 관한 연구는 많은 공학적인 많은 예에서 찾아볼 수 있다. 예를들어, 열교환기 튜브, 핵반응 연료 요소들, 항공기 엔진에서 열차단판으로 사용되는 가는 셸 구조물들, 유압기계에서의 구성요소들 등을 들 수 있다.

내부 유동유체에 의한 파이프 구조물의 안정성에 관한 연구의 시초는 Ashley와 Haviland⁽¹⁾에 의해 이루어졌는데, 그들은 Trans-Arabian 송유관의 진동문제를 규명하려는 시도를 하였다. 이러한 연구는 계속되어, Benjamin⁽²⁻³⁾은 2자유도계인 분절된 송수관의 동적안정성 문제를 이론과 실험을 병행한 연구를 하였다.

Becker⁽⁴⁾는 한단고정-타단자유인 외팔 수평 파이프의 자유단이 스프링 지지되어 있는 경우, 스프링 상수의 변화가 계의 동적안정성에 미치는 영향을 연구하였고, Sugiyama⁽⁵⁾는 2자유도 분절된 수평 파이프의 동적안정성에 미치는 부가질량과 지지 스프링의 영향에 대하여 연구하였다. 그 후 Sugiyama와 그의 공동연구자들⁽⁶⁾은 복수의 탄성스프링으로 지지된 수평 파이프의 동적안정성에 관한 이론 및 실험적 연구를 하였다. 위의 대부분의 연구들은 수평 파이프들로서 파이프의 자중에 의한 효과는 거의 고려치 않았고, 탄성지지된 파이프의 연구에 있어서도 스프링의 강성 변화에 의한 영향들을 주로 고려하였고, 위치변화는 단지 몇몇 특정위치에서만 조사된 연구들이었다. 최근 내부유동유체에 의한 가는 파이프 구조물의 진동과 동적안정성에 관한 연구결과가 Paidoussis⁽⁷⁻⁸⁾에 의해 발표되었다.

본 논문에서는 복수 탄성스프링 지지되고 파이프의 내부감쇠와 자중효과를 고려한 외팔 수직 파이프의 동적안정성을 지지 스프링의 위치 및 스프링 상수의 변화에 대해 연구하였다.

2. 이론

2.1 수학적 모델

Fig. 1은 외팔 파이프의 자유단과 임의의 위치에 복수 스프링 지지되고, 유속 U 의 내부 유동유체에 의해 운동하는 외팔 수직 파이프의 수학적 모델을 보여준다. Fig. 1에서 L 은 파이프의 길이, x_s 는 중

* 정회원, 한밭대학교 기계공학부

** 정회원, 한국원자력연구소

간 스프링의 위치, k_1 과 k 는 각각 중간 스프링 상수와 말단 스프링 상수, $w(x, t)$ 는 x 위치에서의 횡방향 변위, x 와 y 는 각각 축방향 및 횡방향 좌표를 나타낸다.

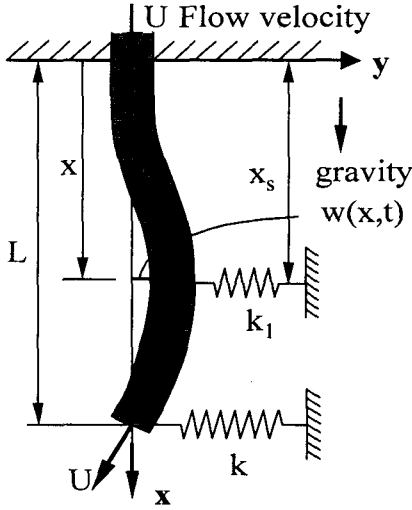


Fig. 1 A mathematical model.

Fig. 1 모델에 대한 운동방정식을 얻기 위해 다음과 같은 에너지 표현식을 사용한다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L m_p \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L m_f \left\{ U^2 + 2U \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - mg(L-x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{2} k_1 w^2(x_s, t) + \frac{1}{2} k w^2(L, t) \quad (2)$$

$$\delta W_{nc, id} = - \int_0^L E^* I \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \quad (3)$$

$$\delta W_f = -m_f U \left(\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) + U \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \delta w \Big|_{x=L} + m_f U^2 \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \quad (4)$$

식(1)-(4)에 있어서, m_p 와 m_f 는 각각 파이프와 유체의 단위길이당 질량을 나타내고, E 는 파이프

의 영률, I 는 단면의 2차모멘트, m 은 $m_f + m_p$, g 는 중력가속도, E^* 는 내부점성저항계수를 나타낸다.

식(1)-(4)를 다음과 같은 확장된 해밀톤 원리

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \delta T - \delta V + \delta W_{nc, id} + \delta W_f \} dt = 0 \quad (5)$$

에 대입하고 변분을 정리한 후, 계산상의 편의를 위하여 다음과 같은 무차원화된 파라미터들과 좌표들

$$\beta = \frac{m_f}{m}, \quad u = UL \sqrt{\frac{m_f}{EI}}, \quad \varphi = \frac{mgL^3}{EI},$$

$$\xi_s = \frac{x_s}{L}, \quad \gamma = \frac{E^*}{EL^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad K = \frac{kL^3}{EI},$$

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad K_1 = \frac{k_1 L^3}{EI} \quad (6)$$

을 도입하면 다음과 같은 무차원화된 운동방정식과 경계조건식을 얻게된다.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + 2\beta^{\frac{1}{2}} u \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial \xi} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \varphi \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} - (1-\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \gamma \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \tau} + K_1 \delta(\xi - \xi_s) w(\xi, \tau) + K \delta(\xi - 1) w(1, \tau) = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 w(1, \tau)}{\partial \xi^2} + \gamma \frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \xi^2 \partial \tau} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^3 w(1, \tau)}{\partial \xi^3} + \gamma \frac{\partial^4 w(1, \tau)}{\partial \xi^3 \partial \tau} = 0 \quad (9)$$

$$w(0, \tau) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial w(0, \tau)}{\partial \xi} = 0 \quad (11)$$

식(7)의 해 $w(\xi, \tau)$ 를 내부 유동유체가 없는 경우의 한단고정-타단자유의 경계조건을 만족시키는 고유함수(eigen-function)

$$\phi_j(\xi) = \cosh s_j \xi - \cos s_j \xi - \sigma_j (\sinh s_j \xi - \sin s_j \xi) \quad (12)$$

를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$w(\xi, \tau) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\tau) \phi_j(\xi) \quad (13)$$

여기서, s_j 는 외팔보의 j 번째 고유치(eigenvalue)이며, σ_j 는 다음과 같다.

$$\sigma_j = \frac{\sinh s_j - \sin s_j}{\cosh s_j + \cos s_j} \quad (14)$$

식(13)으로 가정된 해를 식(7)에 대입하여 Galerkin 적분을 최종 정리하면 다음과 같은 행렬 형태의 방정식을 얻게된다.

$$[A]\{\ddot{a}\} + [B]\{\dot{a}\} + [C]\{a\} = \{0\} \quad (15)$$

여기서, $[A], [B], [C]$ 의 성분들은 다음과 같다.

$$A_{ij} = \delta_{ij} \quad (16)$$

$$B_{ij} = (s_j^4 \gamma) \delta_{ij} + 2u\beta \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi \quad (17)$$

$$C_{ij} = s_j^4 \delta_{ij} + \varphi \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi + (u^2 - \varphi) \int_0^1 \phi_i \phi_j d\xi + \varphi \int_0^1 \xi \phi_i \phi_j d\xi + K_1 \phi_i(\xi_s) \phi_j(\xi_s) + K \phi_i(1) \phi_j(1) \quad (18)$$

식(15)는 고유치 문제를 풀기 위하여 다음과 같은 1차 미분형태

$$\{\dot{Z}\} = [P]\{Z\} \quad (19)$$

로 변환되며, 여기서,

$$\{Z\} = \begin{pmatrix} \dot{a} \\ a \end{pmatrix}, \quad [P] = \begin{bmatrix} -[V] & -[W] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[V] = [A]^{-1}[B], \quad [W] = [A]^{-1}[C]$$

이고, $[I]$ 는 단위행렬을 나타낸다.

2.2 안정성 해석

이제 식(19)의 고유치를 λ_i 라 할 때, 송수관의

안정성은 이 고유치 λ_i 에 의해 지배되며 일반적으로 감쇠가 존재하는 경우의 고유치는 다음과 같이 복소수 형태로 표현된다.

$$\lambda_i = \alpha_i \pm i\omega_i \quad (21)$$

3. 수치해석 결과 및 검토

복수 병진 스프링 지지되고, 내부 유동유체에 의한 파이프의 동적안정성에 대한 수치해는 Galerkin 방법에 의한 12항 근사해에 의해 결과를 얻었으며, 스프링이 없는 경우의 참고문헌(8)의 결과와 비교하여 근사한 일치를 보임으로써 본 논문의 수치해의 타당성을 검토하였다.

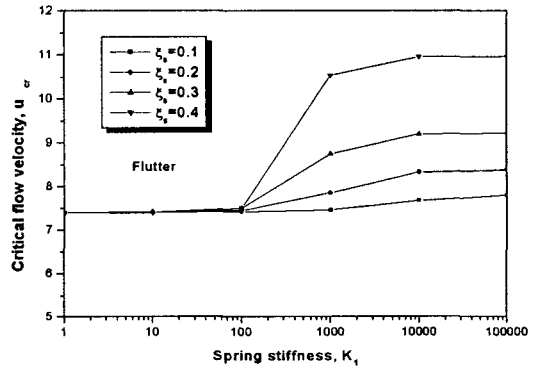


Fig. 2 Critical flow velocity and instability types depending on the spring stiffness and spring position ($\xi_s = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ and $K = 1.0$).

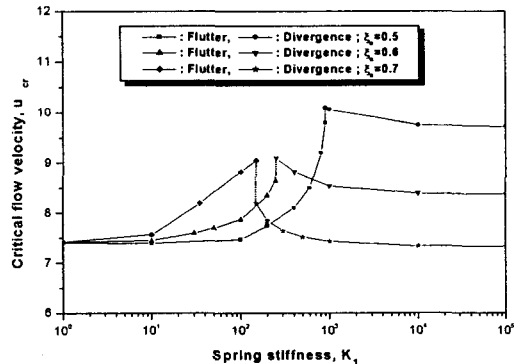


Fig. 3 Critical flow velocity and instability types depending on the spring stiffness and spring position ($\xi_s = 0.5, 0.6, 0.7$ and $K = 1.0$).

Fig. 2에서 Fig. 4는 말단 스프링 상수 K 값이 $K=1.0$ 일때 중간스프링 상수 K_1 값과 중간스프링 위치 ξ_s 의 변화에 따른 임계유속값과 불안정 형태를 보여주는 그림들이다.

먼저 $\xi_s=0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ 의 Fig. 2에서, 중간 스프링의 위치 ξ_s 가 $\xi_s \leq 0.4$ 인 경우에는 불안정 형태가 플러터형 불안정만이 일어난다. 또한, 각각의 고정된 중간스프링의 위치에서 중간스프링 상수값이 증가될수록 임계유속값은 증가됨을 알 수 있다.

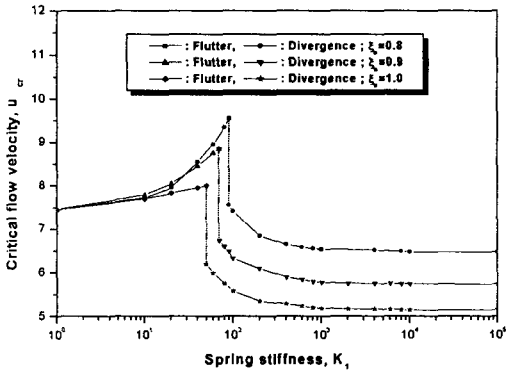


Fig. 4 Critical flow velocity and instability types depending on the spring stiffness and spring position($\xi_s=0.8, 0.9, 1.0$ and $K=1.0$).

Fig. 3은 고정된 말단 스프링 상수값에서, 중간 스프링의 위치 ξ_s 가 $\xi_s=0.5, 0.6, 0.7$ 일 때, 중간스프링 상수값의 변화에 따른 임계유속값의 변화를 나타낸 그림이다.

이 그림을 통해 알 수 있는 것은 각각의 고정된 중간스프링의 위치에서 중간스프링 상수값의 증가에 따라 파이프의 불안정 형태가 플러터 형태의 불안정에서 발산형태의 불안정으로 천이가 일어난다는 것이다. 즉, 그림에서 알 수 있듯이, $\xi_s=0.5$ 와 $\xi_s=0.6$ 의 경우는 중간스프링 상수값의 증가에 따라 플러터를 일으키는 임계유속값이 증가되다가 특정 중간스프링 상수값에서 임계유속값이 상승점프되어 발산형태의 불안정을 일으킨다. 또한, 발산형태의 불안정이 일어나면, 중간스프링 상수값의 증가에 따라 임계유속값은 감소된다. 그러나, $\xi_s=0.7$ 에 있어서는 중간스프링 상수값의 증가에 따라 불안정이 천이되는 현상은 $\xi_s=0.5$ 와 $\xi_s=0.6$ 의 경우와 동일하나, 플러터 불안정의 유속값에서 하강

점프하여 발산형 불안정 임계유속값을 나타낸다.

Fig. 4도 중간스프링의 위치 $\xi_s=0.8, 0.9, 1.0$ 에서, 중간스프링 상수값의 증가에 따른 임계유속값의 변화를 나타낸 그림이다. 이 경우도 $\xi_s=0.7$ 의 경우에서와 같이 스프링 상수값이 증가함에 따라 플러터 형태에서 발산형 불안정으로 천이가 일어나고, 임계유속값이 점프하강하게 된다.

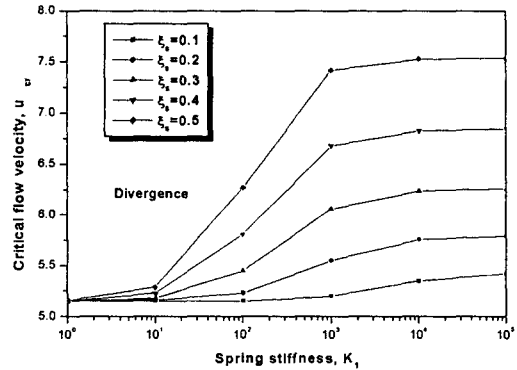


Fig. 5 Critical flow velocity and instability types depending on the spring constant and spring position($\xi_s=0.1 \sim 0.5$ and $K=10^5$).

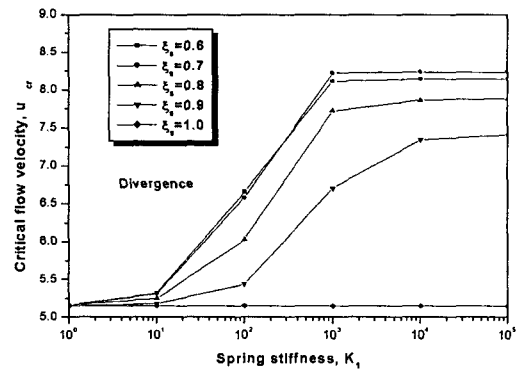


Fig. 6 Critical flow velocity and instability types depending on the spring constant and spring position($\xi_s=0.6 \sim 1.0$ and $K=10^5$).

Fig. 5와 Fig. 6은 말단 스프링 상수가 큰 $K=10^5$ 인 경우에 있어서, 중간 스프링 상수값과 중간스프링 위치변화에 따른 임계유속값과 불안정 형태를 나타낸 그림들이다.

이 그림들을 통해 알 수 있는 것은 말단 스프링 상수값이 큰 경우에 있어, 중간스프링 상수값과 위

치에 상관없이 항상 발산형 불안정만이 일어난다는 것이다. 또한, Fig. 5의 $\xi_s=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 의 경우에는 고정된 ξ_s 의 값에 대해, 임계 유속값은 중간 스프링 상수값의 증가와 함께 증가된다.

Fig. 6의 $\xi_s=0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0$ 의 경우에도 Fig. 5와 유사한 경향을 보이지만, 중간 스프링 상수값 K_1 이 $K_1 \geq 10^4$ 에서는 중간 스프링 상수값이 증가하더라도 임계유속값의 변화가 거의 없음을 알 수 있다.

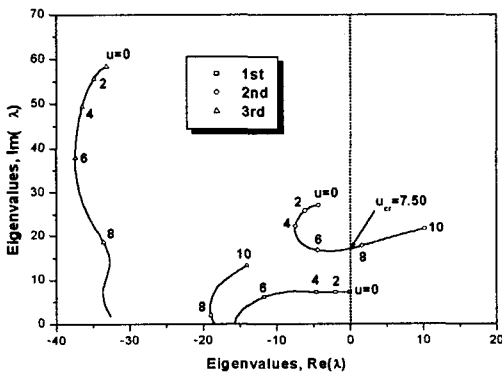


Fig. 7 Eigenvalue trajectories depending on the flow velocities ($\xi_s=0.3, K_1=10^2, K=1.0$).

Fig. 7은 말단과 중간스프링의 어떤 특정 스프링 상수값과 중간스프링의 어떤 특정 위치에 대해, 유속값의 변화에 따른 가장 낮은 처음 3개의 고유치의 변화를 보여주는 그림이다.

유속값이 $u=0.0$ 에서 증가됨에 따라 1차와 3차 모드는 안정함을 보여주지만, 2차 모드에 있어서는 $u_{cr}=7.50$ 이 임계유속값으로, 이를 중심으로 유속값이 증가됨에 따라 고유치의 실수부가 양(positive)의 값으로 되어 플러터 형태의 불안정을 일으킴을 알 수 있다.

4. 결론

복수 스프링 지지된 외팔 수직파이프의 동적안정성에 관한 수치해석 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 말단 스프링 상수값 K 가 작은 경우, 중간스프링의 위치 ξ_s 가 $\xi_s \leq 0.4$ 에서는 플러터 형태의 불안정만이 발생되며, 스프링 상수값이 증가됨에 따라

임계유속값이 증가된다. 그러나, $\xi_s=0.5$ 이상에서는 중간스프링 상수값이 증가됨에 따라 플러터에서 발산형태의 불안정으로의 천이가 일어난다.

(2) 말단 스프링 상수값 K 가 큰 경우, 중간 스프링 상수값과 위치변화에 관계없이 항상 발산형 불안정만이 일어나며, 고정된 중간스프링의 위치에 대해 전반적으로 임계유속값은 중간스프링 상수값의 증가와 함께 증가된다.

참고문헌

- (1) Ashley, H. and Haviland, G., 1950, "Bending Vibrations of a Pipeline Containing Flowing Fluid", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.17, pp.229~232.
- (2) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (I. Theory)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol.261, pp.457~486.
- (3) Benjamin, T. B., 1961, "Dynamics of a System of Articulated Pipes Conveying Fluid (II. Experiment)", Proceedings of the Royal Society, Series A, Vol.261, pp.487~499.
- (4) Becker, O., 1979, "Zum Stabilitätsverhalten des durchströmten geraden Rohres mit elastischer Ouerstützung", Maschinenbautechnik, Vol.28, pp.325-327.
- (5) Sugiyama, Y., 1984, "Studies on Stability of Two-Degree-of-Freedom Articulated Pipes Conveying Fluid (The Effect of a Spring Support and a Lumped Mass)", Bulletin of the JSME, Vol.27, pp.2658-2663.
- (6) Sugiyama, Y., Katayama, T., Akesson, B. and Sällström, J.H., 1991, "Stability of Cantilevered Pipes Conveying Fluid and Having Intermediate Spring Support", 11th International Conference on SMIRT, ToKyo, Paper J10/1.
- (7) Paidoussis, M.P., and Semler, C., 1998, "Nonlinear Dynamics of a Fluid-Conveying Cantilevered Pipe with an Intermediate Spring Support", Journal of Fluids and Structures, Vol.7, pp.269-298.
- (8) Paidoussis, M.P., 1998, "Fluid-Structure Interactions Slender Structures and Axial Flow", Academic Press, Vol. 1, pp. 196-276.