

회전관성, 전단변형 및 축변형을 고려한 변단면 원호아치의 자유진동

오 상 진* · 모 정 만**

Free Vibrations of Tapered Circular Arches Considering Rotatory Inertia, Shear Deformation and Axial Deformation

Sang Jin Oh and Jeong Man Mo

ABSTRACT

This paper deals with the free vibrations of circular arches with variable cross-section. The differential equations governing free, in-plane vibrations of tapered circular arches, including the effects of rotatory inertia, shear deformation and axial deformation, are derived and solved numerically to obtain frequencies and mode shapes. Numerical results are calculated for the quadratic arches with hinged-hinged and clamped-clamped end constraints. Three general taper types for a rectangular section are considered. The lowest four natural frequencies and mode shapes are presented over a range of non-dimensional system parameters: the subtended angle, the slenderness ratio and the section ratio.

1. 서론

아치는 각종 구조공학 관련분야에서 단위구조로 이용되고 있어 이에 대한 많은 연구가 진행되어 왔다. 구조물의 고유한 성질 중의 하나인 자유진동 특성은 동하중이 작용하는 구조물의 동적응답 해석시 매우 중요한 변수이며, 구조물의 설계과정 또는 공용중인 구조물의 안정성 평가 등에서도 중요한 평가지수로 이용되고 있다. 따라서 대상구조의 자유진동 특성을 파악하는 것은 진동공학 분야에서 가장 먼저 선행되어야 할 연구과제 중의 하나이다.

1928년 Den Hartog⁽¹⁾가 등단면 원호아치의 자유진동에 관한 논문을 발표한 이래 많은 연구자⁽²⁻⁷⁾에 의해 아치의 자유진동에 관한 연구가 이루어져 왔다.

아치의 자유진동에 대한 많은 연구가 이루어졌음에도 불구하고 변단면 아치의 진동특성에 관한 자료는 많지 않으며, 특히 대상구조의 거동특성을 정확하게 표현할 수 있는 해석모형(회전관성, 전단변형 및 축변형 효과를 고려한 모형)을 채택한 변단면 아치에 대한 연구결과는 부족한 실정이다.

이에 본 연구에서는 회전관성, 전단변형 및 축변형 효과를 고려한 변단면 원호아치의 고유진동수 및 진동형을 산출하여 대상구조의 자유진동 특성을 분석하고자 한다.

2. 지배방정식

Fig. 1은 아치정을 기준으로 좌우대칭인 변단면 원호아치를 나타낸 것이다. 이 그림에서 a , α 와 l 은 각각 아치의 반경, 중심각 및 시간길이이며, ϕ 는 아치축상 임의점의 위치를 나타내는 각도이다. 그리고 I , I_c 와 I_e 는 각각 아치축상 임의점, 아치정 및 아치

* 정희원, 담양대학 토목공학과

** 남원농공고등학교 토목과

단부의 단면2차모멘트, A 와 A_c 는 각각 아치축상 임의점 및 아치정의 단면적을 나타낸다. 그리고 z 는 아치축상 임의점으로부터 아치정에서 그은 수직선까지의 수평거리, θ 와 θ_c 는 각각 아치축상 임의점과 아치단부에서 수평축과 접선방향에 이루는 각도이다. 한편 w , v 및 ψ 는 각각 진동시 아치축상 임의점에서의 곡률중심방향변위, 접선방향변위 및 순수회전에 의한 단면회전각을 나타낸다.

아치축상 임의점에서 A 와 I 는 다음 식과 같이 나타낸다.

$$A = A_c F, \quad I = I_c H \quad (1,2)$$

윗 식에서 F 와 H 는 ϕ 에 관한 함수이다.

아치가 면내에서 진동하면 이들 변위에 의해 부재 단면에는 축방향력 N , 전단력 Q 및 휨모멘트 M 의 합응력이 발생하게 된다. 또한 질량을 가지고 있는 부재가 진동함으로써 부재미소요소에는 곡률중심 방향 관성력 P_r , 접선방향관성력 P_t 및 회전관성

우력 T 가 발생하게 된다. Fig. 2는 부재미소요소에 발생하는 이들 합응력과 관성력을 나타낸 것으로 이 힘들의 동적평형방정식을 세우면 식(3)~(5)와 같다.

$$N' + Q - aP_r = 0 \quad (3)$$

$$Q' - N - aP_t = 0 \quad (4)$$

$$a^{-1}M' - Q + T = 0 \quad (5)$$

위의 식에서 $(\cdot) = d/d\phi$ 이다.

부재단면에 발생하는 휨모멘트 및 축방향력을 변위 방향으로 표현하면 다음 식과 같다.⁽⁸⁾

$$M = -EIa^{-1}\psi' = -EI_cHa^{-1}\psi' \quad (6)$$

$$N = EAa^{-1}(v' + w) + EIa^{-2}\psi' \\ = EA_cFa^{-1}(v' + w) + EI_cHa^{-2}\psi' \quad (7)$$

위의 식에서 E 는 부재재료의 탄성계수이다.

전단변형을 고려하는 경우 전단력은 다음 식과 같이 표현된다.

$$Q = kAG\beta = kAGa^{-1}(w' - v - a\psi) \\ = kA_cFGa^{-1}(w' - v - a\psi) \quad (8)$$

위의 식에서 k 는 단면형상에 따른 상수, G 는 부재재료의 전단탄성계수, β 는 전단변형률이다.

아치가 조화진동을 한다고 가정하면 아치미소요소에 발생하는 단위길이당 관성력 및 회전관성우력은 식(9)~(11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$P_r = -\gamma A\omega^2 w = -\gamma A_c F\omega^2 w \quad (9)$$

$$P_t = -\gamma A\omega^2 v = -\gamma A_c F\omega^2 v \quad (10)$$

$$T = -\gamma I\omega^2 \psi = -\gamma I_c H\omega^2 \psi \quad (11)$$

위의 식에서 γ 는 부재재료의 밀도, ω 는 고유각진동수(rad/s)이다.

지배방정식을 무차원 형태로 나타내기 위하여 다음의 무차원 변수들을 사용한다.

$$\delta = w/a, \quad \lambda = v/a \quad (12,13)$$

$$s = a/\sqrt{I_c/A_c}, \quad \eta = I_c/I_c, \quad \mu = kG/E \quad (14-16)$$

$$C_i = \omega_i a^2 \sqrt{\gamma A_c / (EI_c)} \quad (17)$$

위의 식에서 s 는 세장비(slenderness ratio), η 는 단면비(section ratio), μ 는 전단계수(shear parameter), C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter), 첨자 i 는 모드번호이다.

식(4)에 식(7)~(9), 식(3)에 식(7), (8), (10), 식(5)에 식(6), (8), (11)을 대입하고, 무차원 변수들을 이용하

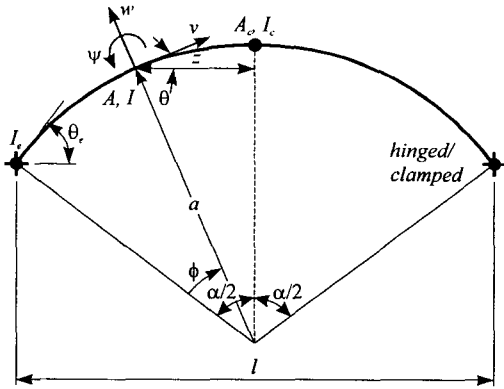


Fig. 1 Arch geometry.

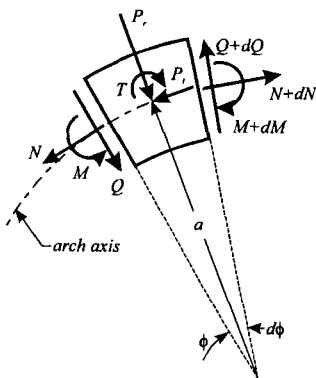


Fig. 2 Loads on an arch element.

여 정리하면 식(18)~(20)에 보인 회전관성, 전단변형 및 축변형을 고려한 변단면 원호아치의 자유진동에 대한 지배미분방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta'' = & -F^{-1}F'\delta' + \mu^{-1}(1-s^{-2}C_i^2)\delta \\ & + (1+\mu^{-1})\lambda' + F^{-1}F'\lambda \\ & + (1+\mu^{-1}s^{-2}F^{-1}H)\psi' + F^{-1}F'\psi \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \lambda'' = & -F^{-1}F'\lambda' + (\mu-s^{-2}C_i^2)\lambda \\ & - (1+\mu)\delta' - F^{-1}F'\delta - s^{-2}F^{-1}H\psi'' \\ & - s^{-2}F^{-1}H'\psi' + \mu\psi \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \psi'' = & -H^{-1}H'\psi' + (\mu s^2 FH^{-1} - s^{-2}C_i^2)\psi \\ & - \mu s^2 FH^{-1}\delta' + \mu s^2 FH^{-1}\lambda \end{aligned} \quad (20)$$

단부조건에 따른 경계조건식은 다음과 같다. 먼저 고정단인 경우 진동변위 w , v 및 ϕ 가 "0"이므로 무차원 변수들을 이용하면 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \psi = 0 \quad (21-23)$$

그리고 회전단인 경우 진동변위 w , v 및 휨모멘트 M 이 "0"이므로 식(6)과 무차원 변수들을 이용하면 경계조건식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \psi' = 0 \quad (24-26)$$

3. F 와 H 의 정의

식(1), (2)의 단면변화식과 식(18)~(20)의 지배방정식에 포함된 단면형상계수 F 와 H 를 정의하기 위하여 본 연구에서는 문헌 [9]에 소개된 아치부재의 단면변화식 중 교량축조 등에 경제적인 단면으로 알려진 2차원 변단면을 택하였다. 아치정에서 단면2차모멘트를 기준으로 2차원 변단면 아치의 단면2차모멘트 변화식을 나타내면 다음과 같다.

$$I = \frac{I_c}{\cos \theta \left[1 - \left(1 - \frac{I_c}{I_e \cos \theta_e} \right) \left(\frac{2z}{l} \right)^2 \right]} \quad (27)$$

θ 와 $2z/l$ 을 ϕ 의 함수로 나타내면 식(28), (29)와 같으며, Fig. 1에서 $\theta_e = \alpha/2$ 이다.

$$\theta = \frac{\alpha}{2} - \phi, \quad \frac{2z}{l} = \frac{\sin(\alpha/2 - \phi)}{\sin \alpha/2} \quad (28,29)$$

식(28), (29)와 $\theta_e = \alpha/2$ 를 식(27)에 대입하고 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$I = \frac{I_c}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \phi \right) \left[1 + B \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \phi \right) \right]} \quad (30)$$

여기서 B 는 식(31)과 같다.

$$B = \frac{1}{\sin^2 \alpha/2} \left(\frac{1}{\eta \cos \alpha/2} - 1 \right) \quad (31)$$

식(31)에서 η 는 식(15)에서 정의된 단면비이다.

식(2)와 (30)으로부터 단면2차모멘트 변화식 H 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H = \frac{1}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \phi \right) \left[1 + B \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \phi \right) \right]} \quad (32)$$

식(32)에서 H' 을 구하면 다음과 같다.

$$H' = H^2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \phi \right) \left\{ B \left[2 - 3 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} - \phi \right) \right] - 1 \right\} \quad (33)$$

아치가 직사각형 단면을 갖는 경우 F 와 H 사이의 관계는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = H^e, \quad F' = eH^{e-1}H' \quad (34,35)$$

위의 식에서 e 는 단면형상에 따른 상수로서 변화높이 변단면(depth taper)인 경우 $e=1/3$, 변화폭 변단면(breadth taper)인 경우 $e=1$, 정방형 변단면(square taper)인 경우 $e=1/2$ 이다.

4. 해석방법 및 결과

이 논문에서는 지배미분방정식 식(18)~(20)으로부터 대상구조의 고유진동수를 산출하기 위하여 문헌 [3,5]에서와 동일한 해석방법을 이용하였으며, 이의 개략적인 내용은 다음과 같다. 식(18)~(20)의 미분방정식에는 불확정량인 고유치 C_i 항이 포함되어 있으므로 먼저 이 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후에 좌단의 경계조건을 이용하여 수치적분을 시행한다. 가정한 C_i 값이 대상구조에 대한 고유치인지는 수치적분결과 얻어진 우단에서의 결과들이 경계조건을 만족하는지 여부로서 판단하며, 이 과정에서 행렬값 탐사법을 이용하였다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 높아 공학관련문제에서 많이 이용되고 있는 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 고유치 C_i 를 찾기 위해서는 Regula-Falsi method를 이용하였다. 이상의

Table 1. Comparison of results of clamped-clamped arches with uniform cross-section ($\mu=0.342$)

| α (deg.) | s | Reference | Frequency parameter, C_i | | | |
|--------------------|-----|------------|----------------------------|-------|-------|-------|
| | | | i=1 | i=2 | i=3 | i=4 |
| 60 | 20 | This study | 23.79 | 39.06 | 62.84 | 70.78 |
| | | Ref. [2] | 23.75 | 39.05 | 62.38 | 70.71 |
| | | Ref. [4] | 23.80 | 39.14 | 62.98 | 71.04 |
| | 100 | This study | 52.82 | 76.01 | 117.9 | 171.1 |
| | | Ref. [2] | 52.82 | 76.01 | 117.9 | 171.1 |
| | | Ref. [4] | 52.83 | 76.02 | 117.9 | 171.2 |
| 120 | 20 | This study | 10.63 | 15.20 | 24.75 | 30.56 |
| | | Ref. [2] | 10.61 | 15.19 | 24.72 | 30.47 |
| | | Ref. [4] | 10.63 | 15.19 | 24.76 | 30.60 |
| | 100 | This study | 11.79 | 23.25 | 42.37 | 61.43 |
| | | Ref. [2] | 11.79 | 23.25 | 42.37 | 61.43 |
| | | Ref. [4] | 11.79 | 23.25 | 42.38 | 61.44 |
| 180 | 20 | This study | 4.163 | 8.550 | 15.48 | 17.93 |
| | | Ref. [2] | 4.151 | 8.542 | 15.46 | 17.91 |
| | | Ref. [4] | 4.160 | 8.546 | 15.48 | 17.92 |
| | 100 | This study | 4.375 | 9.604 | 17.81 | 27.22 |
| | | Ref. [2] | 4.374 | 9.603 | 17.81 | 27.22 |
| | | Ref. [4] | 4.375 | 9.603 | 17.81 | 27.22 |

Table 2. Comparison of results of arches with non-uniform cross-section ($\mu=0.327$)

| Geometry* | Reference | Frequency parameter, C_i | | | |
|---|------------|----------------------------|-------|-------|-------|
| | | i=1 | i=2 | i=3 | i=4 |
| H-H, DT $\alpha=90^\circ, \eta=0.5$ $s=100$ | This study | 12.06 | 28.01 | 54.28 | 80.60 |
| | Ref. [3] | 12.06 | 28.06 | 54.64 | 82.28 |
| | SAP90 | 12.06 | 28.04 | 54.39 | 80.82 |
| H-H, DT $\alpha=90^\circ, \eta=0.5$ $s=20$ | This study | 11.32 | 16.75 | 28.58 | 39.65 |
| | Ref. [3] | - | - | - | - |
| | SAP90 | 11.39 | 16.84 | 29.15 | 40.05 |
| H-H, ST $\alpha=90^\circ, \eta=3$ $s=100$ | This study | 14.75 | 35.43 | 66.14 | 92.86 |
| | Ref. [3] | 14.81 | 35.73 | 66.98 | 93.41 |
| | SAP90 | 14.76 | 35.49 | 66.37 | 92.98 |
| H-H, ST $\alpha=90^\circ, \eta=3$ $s=20$ | This study | 13.54 | 18.57 | 31.74 | 46.35 |
| | Ref. [3] | - | - | - | - |
| | SAP90 | 13.72 | 18.73 | 32.69 | 46.70 |
| C-C, DT $\alpha=90^\circ, \eta=0.5$ $s=100$ | This study | 19.21 | 36.19 | 67.88 | 85.19 |
| | Ref. [3] | 19.29 | 36.43 | 68.73 | 85.75 |
| | SAP90 | 19.21 | 36.22 | 68.02 | 85.30 |
| C-C, DT $\alpha=90^\circ, \eta=0.5$ $s=20$ | This study | 16.71 | 16.80 | 35.33 | 40.00 |
| | Ref. [3] | - | - | - | - |
| | SAP90 | 16.82 | 16.88 | 35.91 | 40.35 |
| C-C, ST $\alpha=90^\circ, \eta=3$ $s=100$ | This study | 26.83 | 48.00 | 85.87 | 93.14 |
| | Ref. [3] | 27.12 | 48.79 | 87.87 | 93.55 |
| | SAP90 | 26.83 | 48.05 | 86.11 | 93.21 |
| C-C, ST $\alpha=90^\circ, \eta=3$ $s=20$ | This study | 19.50 | 21.92 | 41.11 | 46.54 |
| | Ref. [3] | - | - | - | - |
| | SAP90 | 19.58 | 22.12 | 41.82 | 46.87 |

* H: hinged end, C: clamped end
DT: depth taper, ST: square taper

수치해석 과정을 컴퓨터 프로그램화하였으며, 본 논문에서는 최저차 4개의 무차원 고유진동수 및 진동형을 산출하였다.

Table 1은 강제 원형단면 ($\mu=0.342$)을 갖는 양단고정 등단면 원호아치의 무차원 고유진동수를 비교한 것이다. 문헌 [2]와 [4]에서는 본 연구에서와 같이 축변형, 회전관성 및 전단변형을 고려하였으며, transfer matrix method를 이용하여 해를 산출하였다. 이 표에서 본 연구결과와 문헌들의 결과는 매우 우수하게 근접함을 알 수 있다.

Table 2는 변단면 원호아치의 무차원 고유진동수를 비교한 것이다. 문헌 [3]의 결과는 축변형 및 회전관성 효과를 고려하고 전단변형은 무시한 Rayleigh이론에 의해 얻어진 결과이며, SAP90의 결과는 전단면적 (shear area)을 고려하여 아치를 100개의 직선요소로 모형화하여 얻은 충분히 수렴된 결과이다. 이 표에서 Rayleigh이론에 의한 문헌 [3]의 결과는 본 연구결과에 비해 항상 큼을 알 수 있다. 한편 본 연구결과와 SAP90의 결과는 잘 근접함을 알 수 있지만, SAP90의 결과가 본 연구결과에 비해 약간 큰 값을 나타냄을 알 수 있다. 이상에서 등단면 및 변단면 원호아치에 대한 본 연구결과와 문헌의 결과 비교를 통해 본 연구결과의 타당성을 검증할 수 있다.

Table 3과 4는 각각 양단고정 및 양단회전의 단부조건을 갖는 변화높이, 변화폭 및 정방형 변단면 아치의 무차원 고유진동수 및 진동형을 나타낸 것이다. 여기서 전단계수 μ 는 0.327, 아치 중심각 α 는 $10^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ 및 150° 를 고려하였으며, 세장비 s 는 20과 100, 단면비 η 는 1, 3, 5와 7을 택하였다. Table 3과 4에서 무차원 고유진동수의 우측에 기록된 괄호 안의 기호는 진동형을 의미하는 것으로 S는 대칭 진동형 (symmetric mode), A는 역대칭 진동형 (anti-symmetric mode)임을 나타내고 있다.

5. 요약 및 결론

이 논문에서는 회전관성, 전단변형 및 축변형 효과를 고려한 변단면 원호아치의 자유진동을 지배하는 삼미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출하였다. 직사각형 단면을 갖는 변화높이, 변화폭, 정방형 2차원 변단면 아치의 중심각, 세장비, 단면비의 변화에 따른 고유진동수 및 진동형을 구하였으며, 타문헌의 결과와 비교하여 본 연구결과의 타당성을 검증하였다.

Table 3. Frequency parameter C_i for clamped-clamped arch

| α (deg.) | s | η | Depth taper | | | | Breadth taper | | | | Square taper | | | | |
|--------------------|-----|--------|-------------|----------|----------|----------|---------------|----------|----------|----------|--------------|----------|----------|----------|----------|
| | | | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ | |
| 10 | 20 | 1 | 198.5(S) | 357.8(A) | 364.5(A) | 463.0(A) | 198.5(S) | 357.8(A) | 364.5(A) | 463.0(A) | 198.5(S) | 357.8(A) | 364.5(A) | 463.0(A) | |
| | | 3 | 213.5(S) | 379.9(A) | 393.3(A) | 504.5(A) | 236.6(S) | 414.2(A) | 429.6(A) | 504.3(A) | 219.4(S) | 389.9(A) | 400.8(A) | 504.4(A) | |
| | | 5 | 218.5(S) | 387.4(A) | 401.6(A) | 521.1(A) | 249.0(S) | 432.4(A) | 451.2(A) | 521.4(A) | 226.4(S) | 400.6(A) | 412.2(A) | 521.2(A) | |
| | | 7 | 221.1(S) | 391.3(A) | 405.9(A) | 529.8(A) | 255.1(S) | 441.8(A) | 461.9(A) | 530.4(A) | 230.0(S) | 406.2(A) | 418.1(A) | 530.0(A) | |
| | | 100 | 1 | 599.7(S) | 1361.(A) | 1804.(A) | 2277.(S) | 599.7(S) | 1361.(A) | 1804.(A) | 2277.(S) | 599.7(S) | 1361.(A) | 1804.(A) | 2277.(S) |
| | | | 3 | 704.0(S) | 1486.(A) | 1919.(A) | 2398.(S) | 723.5(S) | 1525.(A) | 2148.(A) | 2448.(S) | 709.8(S) | 1498.(A) | 1977.(A) | 2414.(S) |
| | 5 | | 741.5(S) | 1531.(A) | 1958.(A) | 2444.(S) | 770.2(S) | 1595.(A) | 2257.(A) | 2530.(S) | 750.3(S) | 1552.(A) | 2034.(A) | 2471.(S) | |
| | 7 | | 761.2(S) | 1556.(A) | 1979.(A) | 2470.(S) | 795.0(S) | 1634.(A) | 2311.(A) | 2578.(S) | 771.8(S) | 1581.(A) | 2064.(A) | 2504.(S) | |
| | 30 | 20 | 1 | 54.60(S) | 104.5(A) | 123.7(A) | 173.4(S) | 54.60(S) | 104.5(A) | 123.7(A) | 173.4(S) | 54.60(S) | 104.5(A) | 123.7(A) | 173.4(S) |
| | | | 3 | 61.44(S) | 111.5(A) | 131.5(A) | 179.5(S) | 65.14(S) | 119.1(A) | 146.1(A) | 185.8(S) | 62.45(S) | 113.6(A) | 135.1(A) | 181.2(S) |
| | | | 5 | 63.80(S) | 114.0(A) | 134.2(A) | 182.1(S) | 68.90(S) | 124.6(A) | 153.5(A) | 191.9(S) | 65.24(S) | 117.0(A) | 139.0(A) | 184.6(S) |
| | | | 7 | 65.03(S) | 115.4(A) | 135.6(A) | 183.6(S) | 70.85(S) | 127.6(A) | 157.2(A) | 195.5(S) | 66.69(S) | 118.9(A) | 141.1(A) | 186.7(S) |
| 100 | | | 1 | 114.2(S) | 208.3(A) | 396.4(S) | 591.5(A) | 114.2(S) | 208.3(A) | 396.4(S) | 591.5(A) | 114.2(S) | 208.3(A) | 396.4(S) | 591.5(A) |
| | | | 3 | 128.8(S) | 242.1(A) | 443.7(S) | 634.7(A) | 131.4(S) | 234.0(A) | 425.3(S) | 648.8(A) | 129.5(S) | 240.2(A) | 439.5(S) | 648.1(A) |
| | | 5 | 134.6(S) | 255.6(A) | 462.4(S) | 649.2(A) | 137.6(S) | 246.2(A) | 440.9(S) | 668.1(A) | 135.5(S) | 253.6(A) | 457.9(S) | 668.5(A) | |
| | | 7 | 137.7(S) | 263.3(A) | 473.1(S) | 656.8(A) | 140.9(S) | 253.4(A) | 450.8(S) | 680.4(A) | 138.7(S) | 261.3(A) | 468.6(S) | 679.5(A) | |
| 60 | | 20 | 1 | 23.72(S) | 38.69(A) | 62.78(A) | 69.96(S) | 23.71(S) | 38.72(A) | 62.74(A) | 70.03(S) | 23.71(S) | 38.70(A) | 62.77(A) | 69.97(S) |
| | | | 3 | 26.65(S) | 43.14(A) | 67.01(A) | 74.51(S) | 27.56(S) | 44.12(A) | 74.79(A) | 74.91(S) | 26.91(S) | 43.49(A) | 68.94(A) | 74.72(S) |
| | | | 5 | 27.79(S) | 44.83(A) | 68.51(A) | 76.27(S) | 28.97(S) | 46.49(A) | 77.56(S) | 78.88(A) | 28.14(S) | 45.43(A) | 71.10(A) | 76.81(S) |
| | | | 7 | 28.40(S) | 45.77(A) | 69.32(A) | 77.28(S) | 29.73(S) | 47.87(A) | 79.22(S) | 80.95(A) | 28.80(S) | 46.54(A) | 72.26(A) | 78.05(S) |
| | 100 | | 1 | 52.73(A) | 75.91(S) | 117.8(S) | 170.6(A) | 52.80(A) | 75.87(S) | 117.9(S) | 170.9(A) | 52.75(A) | 75.90(S) | 117.8(S) | 170.7(A) |
| | | | 3 | 62.85(A) | 81.35(S) | 130.5(S) | 192.8(A) | 59.72(A) | 85.74(S) | 122.7(S) | 180.1(A) | 62.09(A) | 82.55(S) | 128.6(S) | 189.7(A) |
| | | 5 | 67.13(A) | 85.85(S) | 136.3(S) | 201.6(A) | 63.18(A) | 88.51(S) | 126.1(S) | 185.5(A) | 66.19(A) | 84.45(S) | 133.9(S) | 197.8(A) | |
| | | 7 | 69.62(A) | 83.59(S) | 139.8(S) | 206.8(A) | 65.31(A) | 89.83(S) | 128.6(S) | 189.2(A) | 68.60(A) | 85.36(S) | 137.2(S) | 202.8(A) | |
| | 90 | 20 | 1 | 17.76(S) | 18.82(A) | 37.79(S) | 42.17(A) | 17.71(S) | 18.92(A) | 38.08(S) | 42.04(A) | 17.75(S) | 18.85(A) | 37.87(S) | 42.14(A) |
| | | | 3 | 19.22(S) | 21.91(A) | 41.36(S) | 45.22(A) | 20.27(S) | 21.74(A) | 40.09(S) | 50.40(A) | 19.50(S) | 21.92(A) | 41.11(S) | 46.54(A) |
| | | | 5 | 19.79(S) | 23.19(A) | 42.83(S) | 46.36(A) | 21.09(S) | 23.12(A) | 41.50(S) | 53.43(A) | 20.16(S) | 23.27(A) | 42.63(S) | 48.19(A) |
| | | | 7 | 20.11(S) | 23.94(A) | 43.70(S) | 46.99(A) | 21.51(S) | 23.97(A) | 42.49(S) | 55.03(A) | 20.51(S) | 24.08(A) | 43.58(S) | 49.10(A) |
| 100 | | | 1 | 22.29(A) | 41.19(S) | 75.97(A) | 88.70(S) | 22.48(A) | 41.35(S) | 76.61(A) | 88.96(S) | 22.34(A) | 41.23(S) | 76.17(A) | 88.76(S) |
| | | | 3 | 27.21(A) | 48.31(S) | 87.56(A) | 92.61(S) | 25.64(A) | 46.70(S) | 80.64(A) | 94.45(S) | 26.83(A) | 48.00(S) | 85.87(S) | 93.14(S) |
| | | 5 | 29.41(A) | 51.08(S) | 92.34(A) | 94.00(S) | 27.32(A) | 49.00(S) | 83.09(A) | 96.31(S) | 28.91(A) | 50.73(S) | 90.10(A) | 94.69(S) | |
| | | 7 | 30.74(A) | 52.68(S) | 94.78(S) | 95.23(A) | 28.40(A) | 50.44(S) | 84.84(A) | 97.23(S) | 30.18(A) | 52.35(S) | 92.74(A) | 95.53(S) | |
| 120 | | 20 | 1 | 10.37(A) | 14.90(S) | 24.51(S) | 30.09(A) | 10.62(A) | 14.71(S) | 25.30(S) | 30.14(A) | 10.43(A) | 14.86(S) | 24.71(S) | 30.11(A) |
| | | | 3 | 12.62(A) | 16.32(S) | 26.90(S) | 32.94(A) | 12.32(A) | 17.50(S) | 25.48(S) | 34.59(A) | 12.57(A) | 16.64(S) | 26.58(S) | 33.56(A) |
| | | | 5 | 13.64(A) | 16.81(S) | 28.03(S) | 34.03(A) | 13.22(A) | 18.42(S) | 26.03(S) | 36.14(A) | 13.59(A) | 17.25(S) | 27.62(S) | 34.99(A) |
| | | | 7 | 14.27(A) | 17.07(S) | 28.76(S) | 34.67(A) | 13.83(A) | 18.88(S) | 26.54(S) | 37.08(A) | 14.23(A) | 17.58(S) | 28.33(S) | 35.84(A) |
| | 100 | | 1 | 11.49(A) | 22.56(S) | 41.31(A) | 59.96(S) | 11.85(A) | 23.01(S) | 42.72(A) | 61.84(S) | 11.58(A) | 22.67(S) | 41.66(A) | 60.43(S) |
| | | | 3 | 14.50(A) | 27.45(S) | 48.88(A) | 69.39(S) | 13.65(A) | 26.07(S) | 44.83(A) | 65.11(S) | 14.29(A) | 27.14(S) | 47.88(A) | 68.50(S) |
| | | 5 | 15.94(A) | 29.53(S) | 52.10(A) | 73.03(S) | 14.65(A) | 27.44(S) | 46.13(A) | 66.85(S) | 15.63(A) | 29.08(S) | 50.64(A) | 71.88(S) | |
| | | 7 | 16.86(A) | 30.82(S) | 54.10(A) | 75.10(S) | 15.35(A) | 28.35(S) | 47.11(A) | 68.06(S) | 16.49(A) | 30.29(S) | 52.41(A) | 73.91(S) | |
| | 150 | 20 | 1 | 5.901(A) | 10.82(S) | 19.73(S) | 20.26(A) | 6.446(A) | 10.80(S) | 21.29(S) | 21.43(A) | 6.041(A) | 10.85(S) | 20.10(S) | 20.61(A) |
| | | | 3 | 7.634(A) | 12.87(S) | 20.81(S) | 23.35(A) | 7.570(A) | 13.29(S) | 20.82(S) | 23.65(A) | 7.624(A) | 13.00(S) | 20.82(S) | 23.50(A) |
| | | | 5 | 8.462(A) | 13.68(S) | 21.44(S) | 24.59(A) | 8.166(A) | 14.35(S) | 20.83(S) | 24.52(A) | 8.409(A) | 13.92(S) | 21.29(S) | 24.78(A) |
| | | | 7 | 9.012(A) | 14.14(S) | 21.90(S) | 25.33(A) | 8.598(A) | 14.99(S) | 20.91(S) | 25.08(A) | 8.944(A) | 14.47(S) | 21.66(S) | 25.59(A) |
| 100 | | | 1 | 6.272(A) | 12.99(S) | 24.11(A) | 36.18(S) | 6.980(A) | 13.96(S) | 27.19(A) | 40.97(S) | 6.448(A) | 13.24(S) | 24.86(A) | 37.34(S) |
| | | | 3 | 8.357(A) | 16.58(S) | 29.79(A) | 44.04(S) | 8.132(A) | 16.11(S) | 28.36(A) | 42.04(S) | 8.302(A) | 16.46(S) | 29.44(A) | 43.57(S) |
| | | 5 | 9.399(A) | 18.26(S) | 32.36(A) | 47.52(S) | 8.759(A) | 17.04(S) | 29.06(A) | 42.86(S) | 9.244(A) | 17.98(S) | 31.55(A) | 46.43(S) | |
| | | 7 | 10.11(A) | 19.35(S) | 34.00(A) | 49.69(S) | 9.224(A) | 17.65(S) | 29.60(A) | 43.49(S) | 9.896(A) | 18.97(S) | 32.92(A) | 48.26(S) | |

감사의 글

본 연구는 한국과학기술재단의 목적기초연구(2001-1-31100-009-1)지원으로 수행되었음.

참고 문헌

(1) Den Hartog, J.P., 1928, "The Lowest Natural Frequency of Circular Arcs," Philosophical Magazine, Vol. 5, pp.400-408.

(2) Irie, T., Yamada, G. and Tanaka, K., 1983, "Natural Frequencies of In-Plane Vibration of Arcs," Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 50, pp.449-452.

(3) Wilson, J.F., Lee, B.K and Oh, S.J., 1994, "Free Vibrations of Circular Arches with Variable Cross-Section," Structural Engineering and Mechanics, Vol. 2, pp.345-357.

(4) Yildirim, V., 1997, "A Computer Program for the Free Vibration Analysis of Elastic Arcs,"

Table 4. Frequency parameter C_i for hinged-hinged arch

| α (deg.) | s | η | Depth taper | | | | Breadth taper | | | | Square taper | | | | | |
|--------------------|-----|----------|-------------|----------|----------|----------|---------------|----------|----------|----------|--------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| | | | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ | $i=1$ | $i=2$ | $i=3$ | $i=4$ | | |
| 10 | 20 | 1 | 167.8(S) | 228.6(A) | 357.4(A) | 388.0(A) | 167.8(S) | 228.5(A) | 357.4(A) | 388.0(A) | 167.8(S) | 228.6(A) | 357.4(A) | 388.0(A) | | |
| | | 3 | 170.8(S) | 200.7(A) | 374.2(S) | 379.6(A) | 177.6(S) | 214.4(A) | 400.6(S) | 414.6(A) | 172.8(S) | 204.6(A) | 380.7(S) | 389.8(A) | | |
| | | 5 | 169.8(S) | 188.7(A) | 351.0(S) | 387.1(A) | 176.7(S) | 203.6(A) | 385.2(S) | 432.4(A) | 172.0(S) | 193.1(A) | 359.5(S) | 400.4(A) | | |
| | | 7 | 168.5(S) | 181.4(A) | 338.1(S) | 391.1(A) | 174.9(S) | 196.5(A) | 376.2(S) | 441.8(A) | 170.7(S) | 185.9(A) | 347.7(S) | 406.0(A) | | |
| | | 100 | 1 | 317.1(S) | 1059.(A) | 1803.(A) | 2032.(S) | 317.1(S) | 1059.(A) | 1803.(A) | 2032.(S) | 317.1(S) | 1059.(A) | 1803.(A) | 2032.(S) | |
| | | | 3 | 324.6(S) | 1105.(A) | 1918.(A) | 2114.(S) | 318.7(S) | 1053.(A) | 2033.(S) | 2147.(A) | 323.4(S) | 1093.(A) | 1976.(A) | 2096.(S) | |
| | | | 5 | 325.5(S) | 1111.(A) | 1957.(A) | 2127.(S) | 317.5(S) | 1044.(A) | 2021.(S) | 2256.(A) | 323.9(S) | 1096.(A) | 2033.(A) | 2103.(S) | |
| | 7 | | 325.5(S) | 1111.(A) | 1978.(A) | 2127.(S) | 316.6(S) | 1036.(A) | 2010.(S) | 2310.(A) | 323.7(S) | 1095.(A) | 2063.(A) | 2101.(S) | | |
| | 30 | 20 | 1 | 35.15(S) | 92.25(A) | 130.3(A) | 166.2(S) | 35.15(S) | 92.26(A) | 122.6(A) | 166.2(S) | 35.15(S) | 92.25(A) | 122.6(A) | 166.2(S) | |
| | | | 3 | 35.74(S) | 94.96(A) | 122.3(A) | 169.5(S) | 35.86(S) | 92.30(A) | 145.2(A) | 165.1(S) | 35.81(S) | 94.47(A) | 133.9(A) | 168.5(S) | |
| | | | 5 | 35.71(S) | 94.79(A) | 132.8(A) | 168.0(S) | 35.76(S) | 90.89(A) | 152.5(A) | 162.4(S) | 35.79(S) | 94.05(A) | 137.7(A) | 166.7(S) | |
| | | | 7 | 35.62(S) | 94.29(A) | 134.1(A) | 165.8(S) | 35.62(S) | 89.74(A) | 156.1(A) | 160.2(S) | 35.70(S) | 93.41(A) | 139.7(A) | 164.5(S) | |
| | | | 100 | 1 | 95.95(S) | 137.5(A) | 304.9(S) | 515.9(A) | 95.95(S) | 137.5(A) | 305.0(S) | 515.9(A) | 95.95(S) | 137.5(A) | 304.9(S) | 515.9(A) |
| | | | | 3 | 98.62(S) | 147.0(A) | 327.6(S) | 555.1(A) | 102.3(S) | 136.7(A) | 303.5(S) | 518.6(A) | 99.68(S) | 144.5(A) | 321.6(S) | 546.5(A) |
| 5 | | | | 99.40(S) | 149.1(A) | 333.1(S) | 565.3(A) | 103.6(S) | 135.8(A) | 302.3(S) | 518.1(A) | 100.7(S) | 145.8(A) | 325.6(S) | 554.3(A) | |
| 7 | | 99.78(S) | | 149.9(A) | 335.5(S) | 569.8(A) | 104.1(S) | 135.2(A) | 301.4(S) | 517.4(A) | 101.2(S) | 146.4(A) | 327.2(S) | 557.6(A) | | |
| 60 | | 20 | 1 | 19.40(S) | 28.65(A) | 60.11(S) | 62.52(A) | 19.40(S) | 28.69(A) | 60.18(S) | 62.47(A) | 19.40(S) | 28.66(A) | 60.13(S) | 62.50(A) | |
| | | | 3 | 19.90(S) | 30.42(A) | 63.18(S) | 66.61(A) | 20.64(S) | 28.82(A) | 59.89(S) | 74.65(A) | 20.12(S) | 30.06(A) | 62.40(S) | 68.61(A) | |
| | | | 5 | 20.01(S) | 30.74(A) | 63.78(S) | 68.04(A) | 20.86(S) | 28.62(A) | 59.57(S) | 78.76(A) | 20.29(S) | 30.27(A) | 62.80(S) | 70.74(A) | |
| | | | 7 | 20.06(S) | 30.83(A) | 63.93(S) | 68.81(A) | 20.92(S) | 28.44(A) | 59.29(S) | 80.84(A) | 20.35(S) | 30.31(A) | 62.85(S) | 71.87(A) | |
| | | | 100 | 1 | 33.31(A) | 68.92(S) | 101.4(S) | 137.3(A) | 33.37(A) | 68.93(S) | 101.5(S) | 137.5(A) | 33.33(A) | 68.92(S) | 101.4(S) | 137.3(A) |
| | | | | 3 | 36.13(A) | 76.30(S) | 103.3(S) | 150.9(A) | 33.29(A) | 75.14(S) | 100.4(S) | 138.2(A) | 35.43(A) | 76.36(A) | 102.3(S) | 147.7(A) |
| | 5 | | | 36.79(A) | 78.36(S) | 103.8(S) | 154.7(A) | 33.09(A) | 76.22(S) | 100.3(S) | 138.2(A) | 35.88(A) | 78.47(S) | 102.6(S) | 150.6(A) | |
| | 7 | 37.07(A) | | 79.34(S) | 104.1(S) | 156.5(A) | 32.95(A) | 76.54(S) | 100.2(S) | 138.1(A) | 36.06(A) | 79.47(S) | 102.6(S) | 151.9(A) | | |
| | 90 | 20 | 1 | 12.58(A) | 17.47(S) | 30.34(S) | 42.00(A) | 12.68(A) | 17.42(S) | 30.60(S) | 41.91(A) | 12.61(A) | 17.46(S) | 30.41(S) | 41.98(A) | |
| | | | 3 | 13.76(A) | 18.26(S) | 32.39(S) | 45.18(A) | 12.82(A) | 19.35(S) | 29.73(S) | 48.12(A) | 13.54(A) | 18.57(S) | 31.74(S) | 46.35(A) | |
| | | | 5 | 14.03(A) | 18.49(S) | 32.90(S) | 46.34(A) | 12.75(A) | 19.74(S) | 29.49(S) | 48.88(A) | 13.74(A) | 18.88(S) | 32.06(S) | 47.95(A) | |
| | | | 7 | 14.13(A) | 18.60(S) | 33.09(S) | 46.97(A) | 12.69(A) | 19.87(S) | 29.35(S) | 49.01(A) | 13.81(A) | 19.02(S) | 32.17(S) | 48.81(A) | |
| | | | 100 | 1 | 13.57(A) | 31.59(S) | 60.31(A) | 86.79(S) | 13.69(A) | 31.76(S) | 60.81(A) | 87.25(S) | 13.60(A) | 31.63(S) | 60.44(A) | 86.90(S) |
| | | | | 3 | 15.06(A) | 35.99(S) | 67.72(A) | 92.53(S) | 13.79(A) | 33.51(S) | 61.41(A) | 92.35(S) | 14.75(A) | 35.43(S) | 66.14(A) | 92.86(S) |
| 5 | | | | 15.43(A) | 37.28(S) | 69.99(A) | 93.99(S) | 13.71(A) | 33.74(S) | 61.52(A) | 94.21(S) | 15.01(A) | 36.50(S) | 67.88(A) | 94.65(S) | |
| 7 | | 15.59(A) | | 37.89(S) | 71.10(A) | 94.69(S) | 13.65(A) | 33.76(S) | 61.53(A) | 95.12(S) | 15.12(A) | 36.99(S) | 68.71(A) | 95.53(S) | | |
| 120 | | 20 | 1 | 6.332(A) | 14.03(S) | 20.78(S) | 27.41(A) | 6.539(A) | 14.00(S) | 21.31(S) | 27.88(A) | 6.384(A) | 14.03(S) | 20.91(S) | 27.53(A) | |
| | | | 3 | 7.254(A) | 15.98(S) | 21.23(S) | 30.61(A) | 6.727(A) | 16.28(S) | 20.09(S) | 29.30(A) | 7.128(A) | 16.15(S) | 20.89(S) | 30.45(A) | |
| | | | 5 | 7.495(A) | 16.62(S) | 21.36(S) | 31.72(A) | 6.704(A) | 16.78(S) | 19.83(S) | 29.55(A) | 7.310(A) | 16.89(S) | 20.82(S) | 31.46(A) | |
| | | | 7 | 7.602(A) | 16.94(S) | 21.40(S) | 32.30(A) | 6.668(A) | 16.88(S) | 19.81(S) | 29.62(A) | 7.385(A) | 17.28(S) | 20.76(S) | 31.97(A) | |
| | | | 100 | 1 | 6.605(A) | 16.69(S) | 32.38(A) | 50.86(S) | 6.839(A) | 17.08(S) | 33.45(A) | 52.59(S) | 6.663(A) | 16.79(S) | 32.65(A) | 51.29(S) |
| | | | | 3 | 7.658(A) | 19.72(S) | 37.55(A) | 58.88(S) | 7.020(A) | 18.23(S) | 33.98(A) | 53.61(S) | 7.501(A) | 19.37(S) | 36.66(A) | 57.61(S) |
| | 5 | | | 7.947(A) | 20.73(S) | 39.35(A) | 61.80(S) | 6.997(A) | 18.41(S) | 34.15(A) | 54.00(S) | 7.715(A) | 20.20(S) | 38.05(A) | 59.94(S) | |
| | 7 | 8.081(A) | | 21.24(S) | 40.29(A) | 63.36(S) | 6.964(A) | 18.44(S) | 34.21(A) | 54.18(S) | 7.809(A) | 20.60(S) | 38.76(A) | 61.19(S) | | |
| | 150 | 20 | 1 | 3.174(A) | 8.587(S) | 16.78(A) | 19.22(S) | 3.540(A) | 8.996(S) | 18.36(A) | 20.10(S) | 3.265(A) | 8.707(S) | 17.18(A) | 19.43(S) | |
| | | | 3 | 3.969(A) | 10.51(S) | 19.38(S) | 19.82(A) | 3.817(A) | 10.25(S) | 19.06(A) | 19.69(S) | 3.933(A) | 10.47(S) | 19.48(S) | 19.66(A) | |
| | | | 5 | 4.236(A) | 11.32(S) | 19.44(S) | 21.01(A) | 3.848(A) | 10.55(S) | 19.27(A) | 19.71(S) | 4.145(A) | 11.19(S) | 19.52(S) | 20.65(A) | |
| | | | 7 | 4.370(A) | 11.78(S) | 19.47(S) | 21.69(A) | 3.840(A) | 10.63(S) | 19.38(A) | 19.77(S) | 4.246(A) | 11.59(S) | 19.54(S) | 21.22(A) | |
| | | | 100 | 1 | 3.243(A) | 9.210(S) | 18.37(A) | 29.70(S) | 3.639(A) | 9.979(S) | 20.68(A) | 33.63(S) | 3.341(A) | 9.408(S) | 18.93(A) | 30.65(S) |
| | | | | 3 | 4.100(A) | 11.49(S) | 22.46(A) | 36.03(S) | 3.922(A) | 10.95(S) | 21.08(A) | 33.83(S) | 4.056(A) | 11.36(S) | 22.13(A) | 35.50(S) |
| 5 | | | | 4.397(A) | 12.45(S) | 24.16(A) | 38.70(S) | 3.955(A) | 11.20(S) | 21.27(A) | 34.07(S) | 4.289(A) | 12.16(S) | 23.44(A) | 37.57(S) | |
| 7 | | 4.548(A) | | 13.00(S) | 25.15(A) | 40.30(S) | 3.950(A) | 11.27(S) | 21.38(A) | 34.24(S) | 4.403(A) | 12.60(S) | 24.21(A) | 38.80(S) | | |

Computers and Structures, Vol. 62, pp.475-485.

- (5) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 1999, "Natural Frequencies of Non-Circular Arches with Rotatory Inertia and Shear Deformation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 219, pp.23-33.
- (6) Liu, G.R. and Wu, T.Y., 2001, "In-Plane Vibration Analyses of Circular Arches by the Generalized Differential Quadrature Rule," International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 43, pp.2597-2611.

- (7) Rakowski, J. and Litewka, P., 2001, "Free Vibrations of Shear-Flexible and Compressible Arches by FEM," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 52, pp.273-286.
- (8) Borg, S.F. and Gennaro, J.J., 1959, Advanced Structural Analysis, Van Nostrand.
- (9) Leontovich, V., 1969, Frames and Arches, McGraw-Hill.