

진동 파라미터 수정을 사용한 형상변화가 있는 판의 모델개선

Model Updating of Plate with Shape Change Using Parameter Modification

최유근* · 김옥구** · 윤병옥*** · 장인식****

Yoo Keun Choi, Ok Koo Kim, Byung Ok Yoon and Insik Jang

Key Words : Parameter Model Updating(파라미터 모델 개선), Plate Chape Change(판 형상변화), Design Parameter(설계 파라미터), Finite Element Method(유한요소법), Modal Frequency(모드 주파수), Modal Vector(모드 벡터).

ABSTRACT

It is important to model the mechanical structure precisely and reasonably in predicting the dynamic characteristics, controlling the vibration, and designing the structural dynamics. In the finite element modeling, the errors can be contained from the physical parameters, the approximation of the boundary conditions, and the element modeling. From the dynamic test, more precise dynamic characteristics can be obtained. Model updating using parameter modification is appropriate when the design parameter is used to analyze the input parameter like finite element method. Finite element analysis for free-free-free-free(FFFF) and clamped-free-free-free(CFFF) plate with uniform area and shape change are carried out as model updating examples. Mass and stiffness matrices are updated by comparing test and analytical modal frequencies. The result shows that the updated frequencies become closer to the test frequencies.

기호설명

1. 서론

- m_e : element mass matrix
- k_e : element stiffness matrix
- M_U : updated mass matrix
- K_U : updated stiffness matrix
- M_A : mass matrix used in analysis
- K_A : stiffness matrix used in analysis
- P : design parameters
- ϕ_A : eigenvector from analysis
- λ_A : eigenvalue from analysis
- ϕ_T : eigenvector from test

정확한 수학적인 구조 모델은 동적 거동의 예측이나 진동의 제어, 구조적인 동역학 모델의 설계 등에 있어서 중요한 역할을 한다. 구조해석을 위해서 가장 많이 사용되는 방법으로는 유한요소법이 있다. 그러나, 유한요소는 모델링에 있어서 물리적인 파라미터나 경계조건의 근사화, 연결 부위의 불확실성과 접합 부위의 단순화에 의한 가정 등에 의하여 부정확한 요소를 내포하고 있다. 실제적으로 해석적인 결과와 실험의 결과는 상당한 차이를 나타내는 경우가 있다. 복잡한 구조물의 보다 정확한 동역학적인 특성은 동적 실험을 통해서 얻을 수 있다. 따라서, 실험적인 모드 해석은 구조 동역학이나 진동학에서는 모델을 규명하는데 널리 사용되는 방법이다. 그러나, 이러한 방법에도 불완전한 실험 데이터나 잡음 등에 의하여 생기는 문제점을 해결해야 하는 어려움이 있다. 해석 결과가 실험 결과와 일치하지 않을 경우에 고려해야 할 오차로는, 해석 모델이 실제 모델의 물리적 거동을 정확하게 표현할 수 없기 때문에 발생하는 구조 오차, 연속적인 실제 구조물을 이산화 할 때 충분한 자유도가 고려되지 않아서 발생하는 모델 차수 오차 그리고 해석 모델은 정확하지만 파라미터의 수치적인 값들이 정확하지 않아 발생하는 모델 파라미터 오차 등이 있다. 모델 개선

* 대구가톨릭대학교 대학원
E-mail : ramanet@hanmaill.net
Tel : (053) 850-2710, Fax : (053) 850-2704

** 홍익대학교 기계정보공학과 대학원

*** 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

**** 홍익대학교 기계정보공학과

(model updating)은 이러한 파라미터의 추정 및 개선을 위한 기술이며, 여러 가지의 방법이 연구되어 왔다. 그 중에서 파라미터 모델 개선법(parameter model updating) 유한요소법과 같이 설계 변수가 해석을 위한 변수로 바로 입력되는 해석법에는 가장 적당한 방법이다. 유한요소법에서 설계 변수 입력 값에는 물성치(material properties)인 Young's modulus 나 밀도 등이 있고 기하학적인 특성치(geometrical properties)로는 관성모멘트 등이 있다. 본 연구에서는 이러한 해석 모델의 개선을 통하여 실제 구조물의 변화를 추정하는 것을 목적으로 한다.

2. 유한요소해석

2.1 평판의 모델링

모델 개선법을 적용하여 해석 모델의 정확성을 찾아내기 위한 대상 구조물로는 평판을 이용한다. 정방형(400mm×400mm×6mm)과 직사각형(400mm×600mm×6mm)의 평판에 대하여 유한요소 모델링하고 같은 형상의 평판에 폭 50mm 의 홈(두께 3 mm)이 있는 경우에 대하여도 모델링한다. 요소의 수는 각각의 평판에 대하여 가로 와 세로로 10 개를 구성하여 총 100개로 하였다. 평판 요소의 강성 및 질량 행렬은 다음 형태를 가진다.

$$M_e = \rho \alpha m$$

$$K_e = E \beta k$$

여기서, M_e 와 K_e 는 각각 요소 질량행렬과 요소강성행렬을 나타낸다. E 는 Young's modulus, ρ 는 Mass density 의 물질특성을 나타내며, α 와 β 는 각 행렬의 구성에 있어서 필요한 상수 값을 나타낸다. 또 m 과 k 요소질량행렬 및 요소강성행렬에서 곱해지는 상수항을 제외한 행렬의 형태를 가지는 부분이다. E 와 ρ 는 모델 개선을 위한 파라미터로 이용된다.

2.2 모델 개선의 방법

위에서 언급된 계산데이터와 실험데이터를 토대로 모델개선을 하게 되는데, 모델 개선은 유한요소법에서 수행된 모드 해석과 실험에 의한 데이터를 이용하여 다음과 같은 개선된 질량행렬(mass matrix)과 강성행렬(stiffness matrix)을 얻을 수 있다.

$$M_U = M_A + \Delta M = M_A + \sum \frac{\partial M}{\partial P_j} \Delta P_j \quad (1)$$

$$K_U = K_A + \Delta K = K_A + \sum \frac{\partial K}{\partial P_j} \Delta P_j \quad (2)$$

여기서, M, K 는 합성된 질량 및 강성행렬을 나타내며, U 는 개선된 모델을 나타낸 첨자이고, A 는 해석을 위한 모델을 나타내며, 오차 질량 및 오차 강성 행렬인 $\Delta M, \Delta K$ 는 각각 다음과 같은 설계 파라미터 P 에 대한 변화의 함수이다. 이러한 설계 파라미터의 변형된 값을 구하기 위하여 일반적으로는 고유치 문제(eigenvalue problem)에서 유도된 고유값과 고유 벡터로부터 유도된 모드 주파수(modal frequencies)와 모드벡터(modal vectors)를 이용한다. 고유치의 차이에 대한 파라미터의 변화는 다음 식으로 표현될 수 있는데

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial P_j} \Delta P_j \approx \lambda_T - \lambda_A = \Delta \lambda \quad (3)$$

여기서, λ 는 고유치(eigenvalue)이며 첨자 A 는 해석에 의한 결과를 나타내며, T 는 실험에 의한 결과를 나타낸다. 고유치 문제에서 파라미터에 대하여 미분하고 정리하면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\sum \frac{\phi_A^T \left(\frac{\partial K_A}{\partial P_j} - \lambda_A \frac{\partial M_A}{\partial P_j} \right) \phi_A}{\phi_A^T M_A \phi_A} \Delta P_j \approx \Delta \lambda \quad (4)$$

위의 식에서 ΔP_j 를 구하여 식 (1), (2)에 대입함으로써 개선된 강성 및 질량 행렬을 구할 수 있다. 본 연구에서는 유한요소해석을 상용 프로그램을 사용하였으므로 질량 및 강성행렬의 개선을 위하여 식 (4)로부터 직접 파라미터의 변화값을 구하는 식을 유도하였다. 강성행렬만을 개선할 때의 결과가 식 (5)에 나타나 있다.

$$K_U = \beta(E + \Delta E) k \quad (5)$$

$$\Delta E = \frac{E}{\lambda_{iA}} (\lambda_{iT} - \lambda_{iA})$$

마찬가지로 질량행렬만을 개선할 때의 변화값이 다음 식 (6)을 이용하여 구할 수 있다.

$$M_U = \alpha(\rho + \Delta\rho) m \quad (6)$$

$$\Delta\rho = \frac{\rho}{\lambda_{iA}} (\lambda_{iT} - \lambda_{iA})$$

질량행렬과 강성행렬을 모두 개선할 때는 다음의 식을 이용한다.

$$\frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\lambda_{iT} - \lambda_{iA}}{\lambda_{iA}} \quad (7)$$

이 식 하나만으로는 ΔE 와 $\Delta\rho$ 를 동시에 결정할 수가 없으므로 (7) 식의 우변에서 계산된 값을 좌변의 각각의 변

화율에 동일한 값으로 배분하여 계산한다.

3. 평판모델의 진동실험

3.1 실험 방법

본 연구에서 사용된 평판은 Fig.1과 같이 400×400×6mm, 400×600×6mm의 사각 평판에 가운데 폭 50mm의 홈(groove)이 있는 것과 없는 것 두 종류의 평판으로 재질은 일반구조용 압연강판(SS41)을 사용하였다.

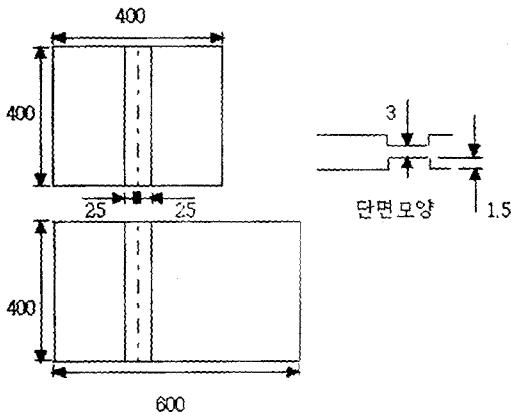


Fig. 1. Plate model with groove used in the study

실험은 경계조건이 Clamped-Free-Free-Free(CFFF)와 Free-Free-Free-Free(FFFF) 상태에서 홈이 없는 시편과 홈(groove)이 있는 시편에 대하여 가속도계(accelerometer)를 기하학적으로 대칭이 되지 않는 곳에 부착한 후 충격 해머(impact hammer)로 가격하고 고속푸리에변환기(FFT Analyzer)에서 주파수에 따른 신호를 얻은 후 고유진동수와 고유모우드를 구하였다. CFFF는 대형 바이스를 사용하여 시편 끝 40mm를 고정하였고, FFFF는 시편끝 두곳에 구멍을 뚫어 매달아서 실험을 하였다. 실험은 해석의 결과와 비교하기 위해 유한요소의 절점에서 임팩트 해머로 가진 하였고 가진 포인트는 400×400mm 모델에서는 40mm 간격으로 121 포인트이고 400×600mm 모델에서는 165 포인트에서 각각 실시하였다.

3.2 실험 결과

가속도 신호를 측정후 시편의 전달함수(transfer function)을 구하면 Fig. 2와 같다. 실험에서 구한 경계조건이 FFFF인 400×400mm 평판인 경우의 고유모우드는 Fig. 3 ~ Fig. 6과 같고, 이는 해석을 통해서 구한 모우드 형태와 잘 일치하였다. 그리고 경계조건이 변화와 시편에

따른 고유진동수는 Table 1 ~ Table 6에 f_T 값으로 나타나 있다.

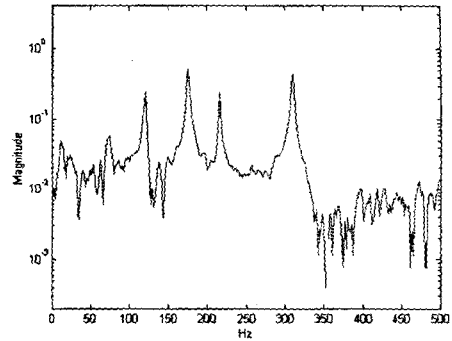


Fig. 2 Frequency response function measured at the 29th node for square plate(FFFF)

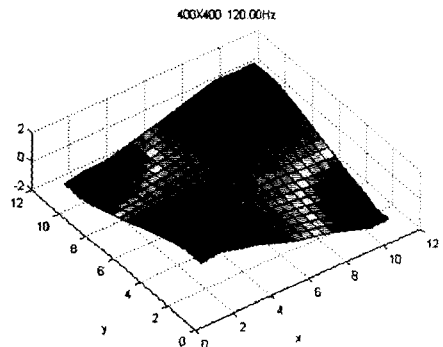


Fig. 3 The first mode shape for square plate without groove(FFFF)

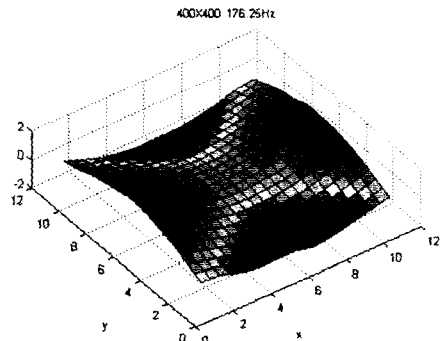


Fig. 4 The second mode shape for square plate without groove(FFFF)

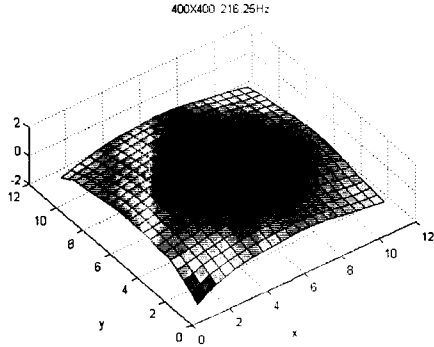


Fig. 5 The third mode shape for square plate without groove(FFFF)

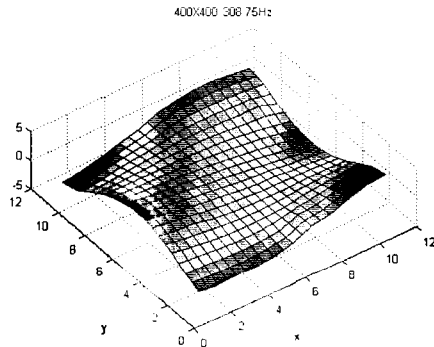


Fig. 6 The fourth mode shape for square plate without groove(FFFF)

4. 개선된 모델의 주파수 계산

모델 개선을 위한 파라미터로는 질량행렬의 개선을 위하여 밀도(ρ)를 선택하였으며, 강성행렬의 개선을 위하여 영률(Young's modulus : E)을 선택하였다. 설계 파라미터의 변화에 의한 행렬의 변화는 실험값과 처음 계산값 모드 주파수(modal frequency)를 비교한 후 이를 식 (5), (6), (7)에 대입하여 개선된 강성, 질량 행렬을 구한다. 본 연구에서는 각 주파수마다 $\Delta\rho$ 와 ΔE 를 계산하여 사용 프로그램에 새로운 값을 입력하는 방식으로 개선된 주파수를 구하였다.

Table 1은 정방형 평판에 대하여 각 모드별로 모델 개선 알고리즘을 적용하여 새로 계산된 주파수를 나타낸다.

Table 1 Comparison of updated frequencies for square plate without groove(FFFF)

mode	1st	2nd	3rd	4th
f_T	120.00	176.25	216.25	308.75
matrices				
$M_A \cdot K_A$	137.72	194.50	194.50	336.53
$M_A \cdot K_U$	120.00	176.25	216.25	308.74
$M_U \cdot K_A$	123.64	179.14	222.55	313.38
$M_U \cdot K_U$	122.04	177.90	218.98	310.91

첫 번째 열에는 계산에 사용된 행렬의 종류를 나타낸다. 여기서 M_A, K_A 는 각각 원래의 유한요소 모델에서의 질량, 강성 행렬을 나타내며, K_U 와 M_U 는 개선된(updated) 강성 및 질량 행렬을 나타낸다. 따라서, 계산된 주파수의 첫 번째 경우는 개선되기 전 본래의 유한요소 해석에 의한 것이며, 마지막 경우는 질량과 강성 행렬이 모두 개선된 경우를 나타낸다. f_T 는 각 모드에서 측정된 주파수를 나타낸다. 첫 번째 행의 계산에서 두 번째와 세 번째 모드는 같은 주파수에 대하여 대칭(symmetric) 및 반대칭(antisymmetric)모드를 나타낸다. 표에서도 알 수 있듯이 질량 행렬을 개선하지 않고, 강성 행렬만을 개선한 경우에는 실험에서 측정된 주파수와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 네 번째 행에서 두 가지 행렬을 모두 개선한 경우의 주파수가 질량행렬만을 개선한 경우보다 실험치에 근접해 있음을 알 수 있다.

Table 2 Comparison of updated frequencies for square plate with groove(FFFF)

mode	1st	2nd	3rd	4th
f_T	106.25	191.25	270.00	280.00
matrices				
$M_A \cdot K_A$	123.63	189.46	299.10	304.70
$M_A \cdot K_U$	106.25	191.25	270.00	280.00
$M_U \cdot K_A$	103.78	191.28	274.75	283.45
$M_U \cdot K_U$	108.37	191.17	272.46	281.79

Table 2는 Fig.1에서와 같이 가운데에 홈(groove)이 있는 정방형 평판에 대하여 각 모드별로 모델 개선 알고리즘을 적용하여 새로 계산된 주파수를 나타낸다. Table 1의 경우

와 마찬가지로 강성 행렬만 개선한 경우는 실험치와 같은 주파수를 나타낸다. 흠의 영향으로 각 모드별 주파수가 Table 1의 경우보다 전체적으로 작게 나타났으며 같은 주파수에 대하여 다른 모드가 나타나는 현상도 없다. 위와 마찬가지로 첫 번째 모드를 제외하고 네 번째 행에서 두 가지 행렬을 모두 개선한 경우의 주파수가 질량행렬만을 개선한 경우보다 실험치에 근접해 있음을 알 수 있다.

Table 3 Comparison of updated frequencies for rectangular plate without groove(FFFF)

mode	1st	2nd	3rd	4th
f_T	78.75	85.00	182.50	200.00
$M_A \cdot K_A$	91.46	86.53	202.71	194.23
$M_A \cdot K_U$	78.75	85.00	182.50	200.06
$M_U \cdot K_A$	81.52	85.06	185.87	200.37
$M_U \cdot K_U$	80.33	84.99	185.73	200.15

Table 4 Comparison of updated frequencies for rectangular plate with groove(FFFF)

mode	1st	2nd	3rd	4th
f_T	112.6	75.00	171.25	201.25
$M_A \cdot K_A$	57.47	83.88	195.82	234.00
$M_A \cdot K_U$	61.25	75.00	171.25	201.25
$M_U \cdot K_A$	57.51	76.55	174.60	201.57
$M_U \cdot K_U$	61.24	75.87	173.00	201.38

Table 3, Table 4 는 두께가 일정한 경우와 흠이 있는 직사각형 평판에 대하여 각 모드별로 모델 개선 알고리즘을 적용하여 새로 계산된 주파수를 나타낸다. 평판의 크기가 커짐으로서 각 모드별 주파수가 Table 1, Table 2의 경우보다 전체적으로 작게 나타났다. 위와 마찬가지로 네 번째 행에서 두 가지 행렬을 모두 개선한 경우의 주파수가 질량행렬만을 개선한 경우보다 실험치에 근접하며 오차가 매우 작게 나타났다.

Table 5 Comparison of updated frequencies for square plate with groove (CFFF)

mode	2nd	3rd	4th
f_T	72.50	142.50	256.25
$M_A \cdot K_A$	90.46	198.06	329.02
$M_A \cdot K_U$	72.50	142.50	256.25
$M_U \cdot K_A$	77.64	162.68	278.73
$M_U \cdot K_U$	75.49	154.90	269.48

Table 6 Comparison of updated frequencies for rectangular plate with groove (CFFF)

mode	2nd	3rd	4th
f_T	63.75	147.50	207.50
$M_A \cdot K_A$	75.16	176.80	215.61
$M_A \cdot K_U$	63.75	147.50	207.50
$M_U \cdot K_A$	66.42	154.83	208.06
$M_U \cdot K_U$	65.28	151.53	207.77

Table 5와 Table 6 에는 흠을 가지고 있는 정방형 및 직사각형 평판의 한 변이 고정(fixed)되어 있을 때 각 모드별로 모델 개선 알고리즘을 적용하여 새로 계산된 주파수를 나타낸다. 실험조건이 까다로우 실험치와 계산치의 차이가 자유경계조건보다는 크다. 그러나, 주파수를 개선한 결과에 대해서는 전체적인 경향이 자유 경계조건일 때와 유사하게 나타났다. 부록에는 ΔE 와 $\Delta \rho$ 를 계산하는 과정을 나타내었다.

5. 결론

본 연구에서는 구조물의 동특성을 정확히 파악하기 위해 유한요소 모델과 실험 모델을 일치하도록 개선하는 방법을 구현하였고, 구조물의 형상변화 및 측정 오차 등이 있는 경우의 영향을 살펴보았다. 설계변수들 모드 주파수(modal frequency)와 모드 벡터(modal vector)를 사용하여 계산한 후 유한 요소모델의 개선을 실현하였고, 경계조건에 따라 구조물의 형상 변화 및 측정오차가 존재할 경우의 영향을 실험과

계산을 통해 비교한 후 유한요소 모델을 개선하였다.

균일한 평판과 홈(groove)을 가진 평판에 대한 여섯 가지 경우에 대하여 해석과 실험을 수행하였으며 모델개선은 모드 주파수를 이용하여 질량 행렬과 강성 행렬에 대하여 독립적으로 수행하였다. 각 경우에서 개선된 모델의 주파수를 비교해 보면, 강성행렬만을 개선한 경우에는 실험결과와 개선된 모델에서의 결과가 매우 잘 일치하였고 질량과 강성행렬을 모두 개선한 경우는 실험 결과보다는 고유진동수가 높게 계산되었지만 질량행렬만을 개선한 경우보다 실험치에 근접해 있음을 알 수 있었다.

부 록

$$K_U = K_A + \frac{K_A}{E} \Delta E \quad (K_A = E \beta k)$$

$$K_U = E \beta k + \beta k \Delta E = \beta(E + \Delta E) k$$

마찬가지로 $M_U = \alpha(\rho + \Delta\rho) m$

식 (4)에서

$$\frac{\phi_i^T \beta k \phi_i}{\phi_i^T M_A \phi_i} \Delta E - \frac{\phi_i^T \lambda_{iA} \alpha m \phi_i}{\phi_i^T M_A \phi_i} \Delta \rho = \lambda_{iT} - \lambda_{iA}$$

$$\frac{1}{E} \frac{\phi_i^T \beta E k \phi_i}{\phi_i^T M_A \phi_i} \Delta E - \frac{\lambda_{iA}}{\rho} \frac{\phi_i^T \rho \alpha m \phi_i}{\phi_i^T M_A \phi_i} \Delta \rho = \lambda_{iT} - \lambda_{iA}$$

$$\lambda_i = \frac{\phi_i^T K_A \phi_i}{\phi_i^T M_A \phi_i} \quad \text{이므로}$$

$$\frac{\lambda_{iA}}{E} \Delta E - \frac{\lambda_{iA}}{\rho} \Delta \rho = \lambda_{iT} - \lambda_{iA}$$

$$\frac{\Delta E}{E} - \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\lambda_{iT} - \lambda_{iA}}{\lambda_{iA}}$$

이식으로부터 K_A 만을 개선할 때 ΔE 는

$$\Delta E = \frac{E}{\lambda_{iA}} (\lambda_{iT} - \lambda_{iA})$$

또, M_A 만을 개선할 때 $\Delta \rho$ 는

$$\Delta \rho = \frac{\rho}{\lambda_{iA}} (\lambda_{iA} - \lambda_{iT})$$

참 고 문 헌

- (1) J. E. Mottershead and M. I. Friswell, "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey", Journal of Sound and Vibration, 167(2), pp.347-375, 1993
- (2) L. M. Zhang, "A Consistent Derivation & Assesment of Different Model Updating Procedures", Proc. of the 14th International Modal analysis Conference, pp 769-775, 1996
- (3) J. E. Mottershead and M. I. Friswell, Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer, 1995
- (4) 김홍준, 박영필, "특이값 분해와 고유치해석을 이용한 유한요소모델의 개선", 한국 소음진동공학회지 제 9 권 제 1 호 pp. 163 ~ 173
- (5) 장경진, 박영필, "Model Updating of a Car Body Structure using a Generalized Free-Interface Mode Sensitivity Method", 대한기계학회논문집 A권, 제24권, 제5 호, pp.1133~1145, 2000
- (6) J. H. Gordis, "Artificial Boundary Conditions For Model Updating And Damage Detection", Mechanical Systems and Signal Processing 13(3), pp 437~448, 1999
- (7) Francois M. Hemez, "Can Model Updating Tell The Truth?", IMAC, pp 1~10, 1998
- (8) 박남규, 박윤식, "모델 보정을 위한 구조물 매개변수 규명시 가진점·측정점의 선정", 대한기계학회논문집 A권, 제24권 제5호, pp. 1271~1280, 2000