

## 변위응답의 측정으로부터 변형률응답의 예측

### Prediction of Strain Responses from Displacement Response Measurements

°이건명\* · 신봉인\*\* · 이한희\*\*

Gun-Myung Lee, Bong-In Shin and Han-Hee Lee

**Key Words** : Prediction of Strain (변형률예측), Displacement Measurement (변위측정), Transformation Matrix (변환행렬), Modal Matrix (모드행렬), Strain Modal Testing (변형률 모드시험)

#### ABSTRACT

Presented is a method to predict strain responses from displacement measurements on a mechanical structure. The method consists of forming a transformation matrix, which is calculated from displacement and strain modal matrices. The modal matrices can be obtained by either finite element analysis or modal testing. One disadvantage of the method is that it requires displacements on all measuring points be measured simultaneously. The strain prediction method is applied to a simple simulated system.

#### 1. 서론

기계시스템이나 구조물이 과도한 진동으로 인하여 파괴되는 경우가 흔히 있다. 많은 경우 파괴의 원인은 반복 하중에 의한 피로파괴이며 이의 규명을 위하여 취약점에서의 변형률 또는 응력 측정이 필수적이다. 구조물상의 한 점에서의 변형률은 스트레인게이지를 사용하여 손쉽게 측정할 수 있으나 이를 직접적으로 측정하기 어려운 경우가 종종 있다. 예를 들면 발전소 보일러가 작동 중에 외부 강판이 찢어지는 경우가 있는데 이의 원인이 보일러의 진동으로 인한 피로파괴인지 아니면 또 다른 이유 때문인지를 규명하기 위해서는 찢어진 점에서의 변형률을 측정하면 된다. 그러나 작동 중의 보일러 표면 온도가 매우 높기 때문에 스트레인게이지를 부착하는 것은 불가능하다. 이럴 경우 보일러 표면의 각 점에서 진동 변위를 측정하고 이로부터 변형률을 예측하는 것이 필요하다.

본 논문에서는 구조물상의 여러 점에서 진동 변위를 측정하고, 이를 이용하여 변형률을 예측하는 기술에 대하여 고찰하고자 한다. 이미 이론적으로 알려져 있는 이 기술<sup>(1,2)</sup>을 소개하고, 이를 간단한 시스템에 적용하고자 한다. 또한 이 기술을 실제로 적용할 때의 문제점과 이의 해결방안에 대하여 연구하고자 한다.

#### 2. 이론적 배경

구조물의 각 점에서의 진동변위  $(u(t))$  는 진동 모드의 선형조합으로 나타낼 수 있다.

$$(u(t)) = [\Phi] (q(t)) \quad (1)$$

이 때  $[\Phi]$ 는 모드행렬(modal matrix)으로서 이 행렬의 각 열은 각 진동모드의 모드형(mode shape)을 나타내고,  $(q(t))$  는 모드좌표(modal coordinate)이다. 구조물의 각 점에서의 변형률  $(\epsilon(t))$ 은 진동변위의 공간 미분으로 나타낼 수 있으므로

$$\begin{aligned} (\epsilon(t)) &= D([\Phi]) (q(t)) \\ &= [\Psi] (q(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

위 식에서  $D$ 는 공간 미분을 나타내는 선형 연산자이고,  $[\Psi]$ 는 변형률 모드행렬(modal strain matrix)으로서 이 행렬의 각 열은 각 모

\* 경상대학교 수송기계공학부, ReCAPT  
E-mail : gmllee@nongae.gsnu.ac.kr  
Tel : (055) 751-5313, Fax : (055) 757-5622

\*\* 경상대학교 대학원 기계공학과

드의 변형률 모드형을 나타낸다. 식(1)에서

$$\{q(t)\} = [\Phi]^{-1} \{u(t)\} \quad (3)$$

이므로, 이를 식(2)에 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\{\epsilon(t)\} = [\Psi][\Phi]^{-1} \{u(t)\} \quad (4)$$

$$[T] = [\Psi][\Phi]^{-1} \quad (5)$$

라고 하면 최종적으로 다음 식을 얻는다.

$$\{\epsilon(t)\} = [T] \{u(t)\} \quad (6)$$

이 식을 풀어서 쓰면

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1(t) \\ \epsilon_2(t) \\ \vdots \\ \epsilon_n(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \cdots & T_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad (7)$$

구조물상의 측정점의 개수가  $n$ 이고 고려한 모드의 수가  $m$ 이면 행렬  $[\Phi]$ 의 크기는  $n \times m$  이 되므로 만약  $n \neq m$  이면 식(5)에서  $[\Phi]$ 의 역행렬을 구할 수 없다. 이 때는  $[\Phi]$ 의 의사역행렬(pseudo-inverse matrix)

$$[\Phi]^- = ([\Phi]^T [\Phi])^{-1} [\Phi]^T \quad (8)$$

을 구하여 역행렬 대신 사용하면 된다.

식(6)으로부터 변환행렬  $[T]$ 를 알면 구조물의 각 점에서 측정된 변위로부터 변형률을 예측할 수 있다. 변환행렬은 구조물의 변위 모드행렬과 변형률 모드행렬로부터 구할 수 있다. 모드행렬은 해석적인 방법이나 유한요소해석을 사용하여 구하거나 실험적으로 구할 수 있다. 실험적으로 구할 경우 변위 모드행렬은 일반적인 모드시험(modal testing)으로 측정된 힘-변위 주파수응답함수를 모드해석하여 구하고, 변형률 모드행렬은 변형률 모드시험으로 측정된 힘-변형률 주파수응답함수를 모드해석하여 구할 수 있다. 변형률 모드시험이란 구조물에 힘을 가하면서 스트레인게이지를 사용하여 변형률 응답을 측정하고, 힘과 변형률 데이터로부터 힘-변형률 주파수응답함수를 구하는 시험방법이다. 힘-변형률 주파수응답함수는 다음과 같이 모드매개변수의 식으로 나타낼 수 있다 [3,4]

$$S_{jk}(\omega) = \sum_r \frac{r\phi_j \cdot r\phi_k}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega} \quad (9)$$

위 식에서  $r\phi_j$ 와  $r\phi_k$ 는 각각 모드  $r$ 의  $j$ 점에서의 변형률 모드형의 성분과  $k$ 점에서의 변위 모드형의 성분을 의미한다.

변형률의 여러 방향 성분을 고려하여야 할 경우에는 식(2)를 다음과 같이 성분별로 나누어 쓸 수 있다.

$$\{\epsilon_x(t)\} = [\Psi_x] \{q(t)\} \quad (10)$$

$$\{\epsilon_y(t)\} = [\Psi_y] \{q(t)\} \quad (11)$$

이 때  $[\Psi_x]$ 와  $[\Psi_y]$ 는 각각  $x$ 방향 변형률과  $y$ 방향 변형률에 대한 모드행렬을 의미한다.

### 3. 변형률 예측방법의 적용

측정한 진동변위로부터 변형률을 예측하는 방법을 외팔보에 적용하였다. 외팔보의 치수는 300mm x 30mm x 2mm이고, 측정점은 Fig. 1과 같이 등간격의 5개점으로 하였다. 각 측정점에서의 변위응답과 변형률응답은 해석적인 방법과 유한요소해석을 사용하여 구하였다.

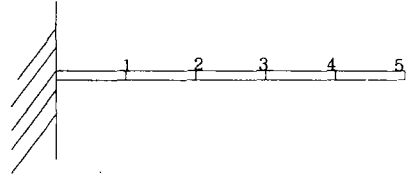


Fig. 1 Cantilever beam used for simulation.

변환행렬을 구하기 위하여 외팔보의 변위 모드행렬과 변형률 모드행렬을 해석적인 방법으로 구하였다. 조화 가진력이 작용할 때의 운동방정식의 해로부터 변위 주파수응답함수를 구하면 다음 식과 같다 [5].

$$H_{jk}(\omega) = \frac{1}{\rho AL} \sum_r \frac{Y_r(x_j) Y_r(x_k)}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega} \quad (12)$$

이 때

$$Y_r(x) = \cos \beta_r x - \cosh \beta_r x +$$

$$\frac{\sin \beta_r L - \sinh \beta_r L}{\cos \beta_r L + \cosh \beta_r L} (\sin \beta_r x - \sinh \beta_r x) \quad (13)$$

이고,  $\beta_r$ 은 모드  $r$ 의 고유치에 관계되는 값이다. 식(12)를 주파수응답함수의 일반식

$$H_{jk}(\omega) = \sum_r \frac{r\phi_j \cdot r\phi_k}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2i\zeta_r \omega_r \omega} \quad (14)$$

와 비교하면

$$r\phi_j = \frac{1}{\sqrt{\rho AL}} Y_r(x_j) \quad (15)$$

임을 알 수 있다. 두께가 얇은 보의 표면에서의 변형률은 다음 식과 같이 나타나므로

$$\epsilon(x) = h \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} \quad (16)$$

유사하게 변형률 모드형은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\psi_j = \frac{h}{\sqrt{\rho AL}} \dot{Y}_r(x_j) \quad (17)$$

저차 모드 4개만을 고려하여 식(15)와 (17)로부터 외팔보의 변위 모드행렬  $[\Phi]$ 와 변형률 모드행렬  $[\Psi]$ 를 구하였다. 측정점의 개수는 5이고, 모드수는 4이므로 식(8)을 사용하여  $[\Phi]$ 의 의사역행렬을 구한 다음, 식(5)로부터 변환행렬을 구하였다. 이처럼 구한 변환행렬은 다음과 같다.

$$[T] = \begin{bmatrix} -0.58020 & 0.07692 & 0.36177 & -0.29462 & 0.09464 \\ 0.02657 & -0.28227 & -0.07595 & 0.30758 & -0.10691 \\ 0.37978 & -0.04974 & -0.31241 & 0.11703 & 0.05532 \\ -0.30974 & 0.29088 & 0.12848 & -0.54747 & 0.29334 \\ -0.24E-7 & 0.88E-7 & 0.36E-7 & -0.97E-7 & 0.36E-7 \end{bmatrix}$$

위 변환행렬을 살펴보면 마지막 행의 요소값이 다른 요소들에 비하여 매우 작은 것을 알 수 있다. 이로 말미암아 점5에서의 변형률은 다른 점에 비하여 매우 작을 것이고, 이는 외팔보 끝점에서의 변형률이 영이라는 사실과 일치한다.

외팔보의 점2에 크기가 10N인 계단하중(step force)이 작용할 때 각 점에서의 변위응답을 이 시스템의 운동방정식을 해석적으로 풀어서 구하고, 변형률은 변위를 미분함으로써 구하였다. 변환행렬을 이용하여 각 점에서의 변위응답으로부터 예측한 점4에서의 변형률은 해석적으로 구한 변형률과 정확하게 일치하였다. 이 결과를 나타내는 그래프는 뒤에서 유사한 그래프가 소개될 예정이므로 생략하기로 하겠다.

같은 크기의 계단하중이 작용할 때의 변위와 변형률을 유한요소해석 소프트웨어인 ANSYS를 사용하여 구하였다. 사용한 요소는 각 절점에서 3자유도(ux, uy, rotz)를 갖는 2차원 보요소인 BEAM3이고, 요소의 개수는 5개이다. 감쇠는  $\beta=0.0001$ 인 비례감쇠를 가정하였다. 이와 같이 구한 각 점에서의 변위응답으로부터 앞에서 구한 변환행렬을 사용하여 점4에서의 변형률을 예측하였다. 예측한 변형률과 유한요소해석으로 구한 변형률을 Fig. 2에 나타내었다. 두 변형률응답사이에 약간의 차이를 보이고 있다.

변환행렬을 구할 때 포함한 모드의 개수를 4에서 5로 증가시키고, 점2에서의 변형률응답을 다시 예측하였다. 이 경우에는 Fig. 3에서 보이는 것처럼 예측한 변형률이 유한요소해석으로 구한 변형률과 잘 일치하였다. 따라서 정확한 변형률 예측을 위해서는 고차모드를 포함하는 것이 필요함을 알 수 있는데, 이는 일반적으로 변위응답에서는 고차모드의 영향이 작으나 변형률응답에서는 그 영

향을 무시할 수 없기 때문이다.

변환행렬을 사용하여 측정된 변위로부터 변형률을 예측할 때의 한 가지 문제점은 구조물의 여러 점에서 변위 응답을 동시에 측정하여야 한다는 점이다. 측정점의 개수가 많을 때에는 측정 장비의 제약으로 인하여 동시에 측정하는 것이 불가능한 경우가 있다. 이러한 경우에 각 측정점에서의 변위응답을 순차적으로 측정할 수 있다. 측정점  $i$ 에서의 변형률응답의 rms값은 변환행렬을 사용하여

$$\begin{aligned} (\epsilon_i)_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum (T_{i1} u_1 + T_{i2} u_2 + \dots + T_{in} u_n)^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{N} \sum (T_{i1}^2 + \dots + T_{in}^2)(u_1^2 + \dots + u_n^2)} \\ &= \sqrt{(T_{i1}^2 + \dots + T_{in}^2)(u_{1rms}^2 + \dots + u_{nrms}^2)} \end{aligned} \quad (18)$$

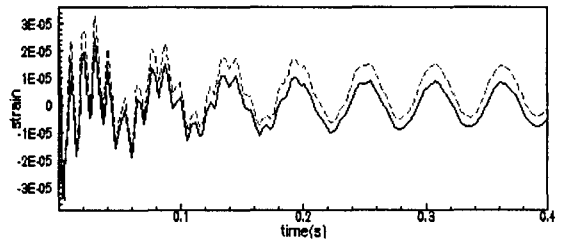


Fig. 2 Comparison of the calculated and predicted strain responses when 4 modes are considered ;— calculated, - - predicted.

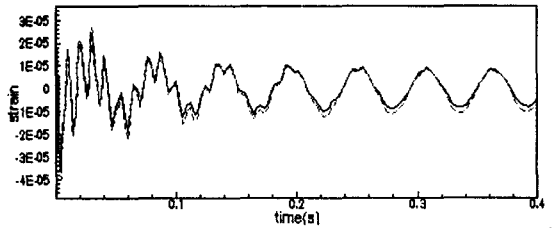


Fig. 3 Comparison of the calculated and predicted strain responses when 5 modes are considered ;— calculated, - - predicted.

위 식에서는 Schwarz 부등식이 사용되었고, 변위응답의 rms값은 시간에 따라 변화하지 않는다고 가정하였다. 그리고  $N$ 은 rms값의 계산에 사용된 측정 데이터의 개수이다. 위 식을 사용하면 각 측정점에서의 변위응답의 rms값으로부터 임의의 점  $i$ 에서의 변형률응답의 rms값의 상한치를 구할 수 있다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 구조물의 각 점에서 측정된 변위응답으로부터 변형률응답을 예측하는 방법을 제시하였다. 이 방법에서는 변위와 변형률사이의 변환행렬을 사용하며, 변환행렬은 변위 모드행렬과 변형률 모드행렬로부터 구한다. 이 방법은 측정점의 개수가 모드행렬에 포함된 모드의 개수보다 많거나 같을 때 적용할 수 있다. 이 변형률 예측방법을 시뮬레이션 시스템에 적용하였을 때 정확한 변형률응답을 예측하였다. 기계시스템의 변형률응답은 고차모드의 영향을 많이 받으므로 이 방법을 적용할 때 모드행렬에 가능한한 고차의 모드를 포함하여야 한다.

#### 후 기

이 논문은 2001년도 두뇌한국 21사업에 의하여 지원되었음.

#### 참 고 문 헌

- (1) 서순우, 1996, "변위-변형률 변환행렬을 이용한 운전중 변형률 예측 및 응용", 한국과학기술원 석사학위논문.
- (2) Okubo, N., and Yamaguchi, K., 1995, "Prediction of Dynamic Strain Distribution under Operating Condition by Use of Modal Analysis," Proceedings of the International Modal Analysis Conference, pp. 91~96.
- (3) Bernasconi, O., and Ewins, D. J., 1989, "Modal Strain/Stress Field," The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol. 4, No. 2, pp. 68~76.
- (4) 차주환 등, 1998, "변형률 모드시험방법의 특성 및 응용", 한국소음진동공학회지, 제8권, 제3호, pp. 420~427.
- (5) Meirovitch, L., 1986, Elements of Vibration Analysis, McGraw-Hill, Inc.