

## Bell형 스위칭 함수를 이용한 가변구조제어계의 도달기간 제거방법

김윤업, 박태영, 곽군평, 박승규  
국립 창원대학교 전기전자제어 공학부

### Method for Removing Reaching Phase in Variable Structure Systems Using Bell Type Switching Function

KimYunUp ParkTaeYung KwakGunPyong ParkSeungKyu  
Electric Electronic Control Engineering Department  
of Changwon National University

**Abstract** - This paper presents a new method for removing reaching phase in variable structure control systems using Bell type switching function. By proposed method, during the entire control process reaching phase is removed. For effective speed control of trapezoidal type brushless DC motor, a time varying switching function based speed controller is developed as illustration.

#### 1. 서 론

산업용 시스템 제어를 위해 많이 사용되고 있는 가변구조 제어계(Variable Structure Control Systems)는 알고리즘이 간단하고, 안정도를 보장받을 수 있을 뿐만 아니라 제어계의 물리적 실현이 용이하기 때문에 실시간 제어에 유리하다는 장점을 가지고 있다. 특히 계통의 파라미터 변화나 외란에 관한 통계적인 정보를 모른 다해도 파라미터나 외란에 대한 변화의 한계치만 알고 있으면 계통을 손쉽게 제어할 수 있으므로 다른 적응제어 이론에서처럼 미지의 파라미터나 외란을 추정할 필요가 없다.

가변구조 제어이론의 중요한 특징은 불연속치 제어입력에 의해 과도기간 중 제어계통의 구조를 의도적으로 스위칭논리에 의해 바꿔줌으로서 일반 자동제어 분야에서 서로 상충관계에 있는 응답의 정확성과 속응성을 동시에 개선할 수 있다는 점이다. 또한 계통을 슬라이딩 모드(Sliding Mode)라는 특이한 동태내에 머무르도록 제어입력을 스위칭해 줌으로써 계통이 파라미터변화나 외란에 둔감해짐으로 계통의 견실성이 향상된다. 이러한 가변구조 제어계통이 여러 가지 좋은 점을 가지고 있는 반면, 도달기간(Reaching Phase)과 채터(Chattering) 현상이라는 큰 단점도 가지고 있다[1]. 첫 번째 단점인 도달기간은 상태가 초기위치에서 스위칭 평면까지 도달하는데 걸리는 시간이다. 이 기간 동안에는 슬라이딩모드가 발생하지 않는 상태에 있으므로 계통의 응답은 파라미터의 변화나 외란에 민감하다. 두 번째 단점인 채터링 현상은 상태궤적이 슬라이딩 평면을 따라 진행되는

동안 슬라이딩 모드를 얻기 위해 스위칭 논리에 따라 제어 입력의 구조를 바꾸어 주기 때문에, 제어입력은 본질적으로 불연속이며 매우 높은 고주파 성분을 포함하게 된다. 따라서 상태궤적은 스위칭 평면을 따라 'Sliding'하기보다는 'Chattering'하게 되어 계통을 불안정하게 만들 수 있다. 따라서 본 논문에서는 가변구조제어계의 2가지 단점 중 도달기간을 제거하기 위해 새로운 Bell형 스위칭 함수를 제시한다. 제안된 Bell형 스위칭 함수에 의해 전체 제어계통은 상태의 초기위치에서부터 슬라이딩 모드를 발생시켜 가변구조제어계의 단점인 도달기간을 근본적으로 제거시켰다. 끝으로 제안된 기법을 trapezoidal형 브러시리스 직류전동기에 적용하여 속도제어기를 구성하였다. 제어기가 구성되어진 trapezoidal형 브러시리스 직류전동기는 sinusoidal형 브러시리스 직류 전동기와는 달리 제어입력이 불연속적인 직류의 형태이기 때문에 토크의 리플이 생겨서 고속 운전 등에는 사용이 곤란하나 대부분의 응용에는 적합하다. 아울러 가격이 저렴하고 속도제어시 회전자의 위치 검출기가 간단하다는 장점이 있다[2]-[3].

#### 2. 시불변 스위칭 함수에 의한 기존의 가변구조제어계

다음과 같이 주어진 선형 시불변 다변수 계통을 생각하자.

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (1)$$

여기서  $X \in \mathbb{R}^n, U \in \mathbb{R}^m$ 는 상태 및 입력 벡터이다. 가변구조 제어기의 설계 목적은 임의의 초기위치  $X(0) = X_0$ 로부터  $t \rightarrow \infty$ 에 따라 계통의 상태를 점근적으로 원점으로 이동하도록 해주는 것이다. 전통적인 가변구조제어기 설계에 있어서 원점을 통과하는  $j$ 번째 스위칭 평면은 다음과 같이 정의된다.

$$S_j(X) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid C_j X = 0\} \quad (2)$$

$$j = 1, 2, \dots, m$$

여기서  $C_j \in R^{1 \times n}$ 는 행벡터로서,  $j$ 번째 스위칭평면의 스위칭표면 행렬이다. 슬라이딩 모드는 상태가 동시에 각각의 스위칭 평면  $S_j$ 에 놓여 있을 때 일어난다. 즉,

$$S = \bigcap_{j=1}^m S_j \{X | CX=0\} \quad (3)$$

스위칭 평면  $S$ 상에서 슬라이딩 모드가 존재할 조건은 스위칭 함수  $S$ 가 다음과 같은 부등식을 만족해야한다 [4].

$$S^T S < 0 \quad (4)$$

여기서

$$S = [S_1, S_2, \dots, S_m]^T \quad (5)$$

식 (1)에 대해 임의의 시간  $t_0$ 에 계통의 상태가 스위칭 평면에 도달하고, 그후 시간  $t \geq t_0$ 에서 이 평면상에 슬라이딩 모드가 존재한다고 하면 다음의 관계가 성립한다.

$$S = 0, \dot{S} = 0 \quad \forall t \geq t_0 \quad (6)$$

따라서 식 (1)과 (6)으로부터 다음의 관계를 얻는다.

$$S = CX = C(AX + B U_{eq}) = 0 \quad (7)$$

위에서 구해지는 입력  $U_{eq}$ 를 등가 제어 입력 (Equivalent Control Input)이라하며, 이 제어입력을 식 (1)에 대입하면 스위칭 평면 위에서 계통의 동특성을 나타낸다. 등가 제어 입력은 식 (7)로부터 다음과 같이 구해진다.

$$U_{eq} = -(CB)^{-1}CAX, |CB| \neq 0 \quad (8)$$

따라서, 스위칭 평면상에서의 슬라이딩 모드시 계통의 동특성은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} dX/dt &= [I_n - B(CB)^{-1}]AX = A_{eq}X \\ \forall t \geq t_0, X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (9)$$

일반적으로 가변구조 제어이론에 의한 제어입력  $u_i$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(X) & \text{if } S_i(X) > 0 \\ u_i^-(X) & \text{if } S_i(X) < 0 \end{cases} \quad (10)$$

$i=1, 2, \dots, m$

윗 식에서  $u_i^+$ 와  $u_i^-$ 는 각각 상태  $X$ 에 대하여 연속 함수이지만  $u_i$ 는 스위칭함수  $S_i$ 의 값에 따라 스위칭 논리에 의해  $u_i^+$ 와  $u_i^-$ 중 하나의 값만 취하도록 정해지므로 전체 시간 구간에서 불연속적인 값을 갖게된다. 또한 식(10)은 등가적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$u_i = u_{ieq} + u_{iN} \quad (11)$$

이것을 벡터 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$U = U_{eq} + U_N \quad (12)$$

여기서  $U_{eq}$ 는 등가 제어입력으로서 연속함수이고,

$U_N$ 은 불연속 함수이다. 불연속 제어입력  $U_N$ 을 구성하는 방법은 여러 가지가 있으나[5]-[6] 어떤 경우이든 식 (4)가 만족되도록 하면 상태는 초기위치로부터 스위칭 평면으로 향하며 슬라이딩 모드가 일어난다.

기존의 불연속 제어입력  $U_N$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$U_N = (CB)^{-1} \Omega \text{sgn}(S) \quad (13)$$

여기서

$$\begin{aligned} \Omega &= \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_m) \\ a_i &> 0, \quad i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (14)$$

$$\text{sgn}(S) = [\text{sgn}(S_1), \dots, \text{sgn}(S_m)]^T \quad (15)$$

따라서 식 (13)과 같은 불연속 성분의 제어입력을 이용하여 식 (11)의 제어입력을 구성하면 항상 식 (4)를 만족함을 알 수 있다. 즉

$$S^T S = - \sum_{i=1}^m a_i s_i \text{sgn}(s_i) = - \sum_{i=1}^m a_i |s_i| < 0 \quad (16)$$

그러므로 식 (12)와 같은 제어입력에 의해 슬라이딩 모드가 발생함을 보장할 수 있다.

### 3. 새로운 Bell형 스위칭 함수에 의한 가변 구조제어 설계

본 논문에서는 식 (3)과 같이 정의된 기존의 시불변 스위칭함수 대신 식 (4)의 hitting condition을 만족하도록 식 (3)의 스위칭함수를 다음과 같은 새로운 Bell형 스위칭함수로 정의한다. 이 5개의 스위칭 함수는 초기 지점에서 가속구간 동안에는  $S_1$ 에서  $S_2$ 로 다음 등속구간에서는  $S_3$ , 마지막 감속구간에서는  $S_4$ 에서  $S_5$ 로 변하게 된다.

if  $x_1 > a_4$

$$S_1 = x_2 - b_1 / (a_4 - a_5)^2 \cdot (x_1 - a_5)^2 \quad (17)$$

if  $a_3 < x_1 < a_4$

$$S_1 = x_2 - b_1 / (a_4 - a_5)^2 \cdot (x_1 - a_5)^2 + 2b_1 \quad (18)$$

if  $a_2 < x_1 < a_3$

$$S_3 = x_2 - 2b_1 \quad (19)$$

if  $a_2 < x_1 < a_3$

$$S_1 = x_2 - b_1 / (a_4 - a_5)^2 \cdot (x_1 - a_5)^2 + 2b_1 \quad (20)$$

if  $x_2 < a_1$

$$S_5 = x_2 - b_1 / a_1^2 \cdot x_1^2 \quad (21)$$

계통이 슬라이딩 모드에 있을 때, 즉 슬라이딩 평면에서의 계통의 j번째 등가 제어 입력  $U_{ieq}$ 는 식 (1), (17), (18), (19), (20)과 (21)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$U_{1eq} = 2A_{11}b_1/B_2(a_4 - a_5)^2 \cdot x_1^2 + 2A_{12}b_1/B_2(a_4 - a_5)^2 \cdot x_1x_2 - (A_{21} + 2a_5A_{11}b_1)/B_2(a_4 - a_5)^2 \cdot x_1 - (A_{22} + 2a_5A_{12}b_1)/B_2(a_4 - a_5)^2 \cdot x_2 \quad (22)$$

$$U_{2eq} = -6A_{11}b_1/B_2(a_3 - a_4)^2 \cdot x_1^2 - 6A_{12}b_1/B_2(a_3 - a_4)^2 \cdot x_1x_2 - (A_{21} - 6a_3A_{11}b_1)/B_2(a_3 - a_4)^2 \cdot x_1 - (A_{22} - 6a_3A_{12}b_1)/B_2(a_3 - a_4)^2 \cdot x_2 \quad (23)$$

$$U_{3eq} = -A_{21}/B_2 - A_{22}/B_2 \cdot x_1 \quad (24)$$

$$U_{4eq} = -6A_{11}b_1/B_2(a_1 - a_2)^2 \cdot x_1^2 - 6A_{12}b_1/B_2(a_1 - a_2)^2 \cdot x_1x_2 - (A_{21} - 6a_2A_{11}b_1)/B_2(a_1 - a_2)^2 \cdot x_1 - (A_{22} - 6a_2A_{12}b_1)/B_2(a_1 - a_2)^2 \cdot x_2 \quad (25)$$

$$U_{5eq} = 2A_{11}b_1/B_2a_1^2 \cdot x_1^2 + 2A_{12}b_1/B_2a_1^2 \cdot x_1x_2 - A_{21}/B_2 \cdot x_1 - A_{22}/B_2 \cdot x_2 \quad (26)$$

본 연구에서는 제안된 Bell형 스위칭함수에 대한 가변 구조 제어기의 제어 입력을 다음과 같이 정의하였다.

$$U_i = -P_i \cdot |U_{ieq}| \operatorname{sgn}(S_i) \quad (27)$$

#### 4. 브러시리스 직류 전동기의 속도제어기 설계

브러시리스 직류 전동기의 동태방정식은 정류 순간의 과도상태를 무시하면 직류 타여자 전동기의 상태방정식과 동일하다. 따라서 전압 방정식과 토크 평형 방정식에 의해 직류전동기의 동태방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다[7].

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (28)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} B/J & Kt/J \\ Ke/La & -Ra/La \end{bmatrix} \\ B = [0 \quad 1/La]^T$$

윗 식에서 상태변수  $x_1, x_2$ 는 각각 전동기의 속도와 전류를 나타낸다. 그리고 J와 B는 회전자의 관성 모멘트와 마찰 계수이고,  $K_t$ 와  $K_e$ 는 토크 상수와 역기 전력 상수이며  $R_a$ 와  $L_a$ 는 아마추어 권선의 저항과 인덕턴스이다. 본 논문에서 사용된 브러시리스 직류 전동기는 Model IW 210304인 이원사 제품으로 전동기 사양은 표 1과 같다.

표 1. 브러시리스 직류 전동기의 사양  
Table 1. Specification of Brushless DC Motor

Parameter	Symbol	Value	Unit
Rotor Inertia	J	0.000796	N-m-sec <sup>2</sup>
Mechanical Time Constant	$\tau_m$	0.4	sec
Back EMF Constant	$K_e$	0.437	V-sec
Torque Constant	$K_t$	0.437	N-m/A
Armature DC Resistance	$R_a$	10.55	$\Omega$
Electrical Time Constant	$\tau_e$	0.025	sec
Friction Coefficient	B	0.00199	N-m-sec

상기 서보 시스템에 대해 식 (17), (18), (19), (20), (21)과 같이 Bell형 스위칭함수를 설정하고 식 (22), (23), (24), (25), (26)과 같은 제어입력을 계통에 인가하면 전동기의 속도와 전류응답 그리고 인가전압은 그림 1, 2, 4와 같다. 그림 1, 2에서 보듯이 모터의 속도와 전류 응답이 안정하게 원점으로 수렴됨을 알 수 있었다. 본 시뮬레이션에서는 제어 이득 행렬은  $P=5$ 이다. 그림 3은 제안된 Bell형 스위칭 함수에 의한 계통의 Phase 선도를 보여주고 있다. 여기서 보면 제시된 스위칭함수에 의해 상태가 초기위치에서부터 슬라이딩 모션을 일으켜 계통의 도달기간이 완전히 제거됨을 알 수 있다.

## 5. 결 론

새로이 제안된 Bell형 스위칭 함수에 의해 계통의 도달기간을 완전히 제거할 수 있었다. 설정된 Bell형 스위칭 함수에 의해 가변구조제어계의 단점인 도달기간이 완전히 제거되어 결국 제어계통은 전체 제어기간 동안 계통에 인가되는 파라미터 변동이나 외란에 대해서 둔감한 응답특성을 나타낼 수 있으며, 이러한 결과로부터 가변구조제어계의 Invariance Condition이 만족된다.

### (참 고 문 헌)

- [1] Hung, J.Y., Gao, W. and Hung, J.C., "Variable Structure Control: Survey", IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol.40, No.1, pp.2-22, (1993)
- [2] Comstock, R.H., "Trends in brushless PM Drive and Motor Technology", Proc. of Motor-Con, pp.1-15, (1986)
- [3] "DC Motors, Speed Controls, Servo Systems", Electro-craft Corp.
- [4] Decarlo, R.A., Zak, S.H. and Matthews, G.P., "Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems", Proc. of the IEEE, Vol.76, No.3, pp.212-232, (1988)
- [5] Kiriakidis, K., Tzes, A., "Design of a Fuzzy Logic Adaptive Sliding Controller and its Application to an Air Flow/Cooling System", Proc. of the 4th IEEE Conference on Control Applications, pp.341-346, (1995)
- [6] Morioka, H., Wada, K., Sabanovic, A., "Neural Network based Chattering Free Sliding Mode Control", Proc. of the 34th SICE, pp.1303-1308, (1995)
- [7] Yeo, H.G., "Design of Fully Digitalized Position Controller for Trapezoidal Type Brushless DC Motor Using Digital Signal Processor", Korea Univ., (1990)

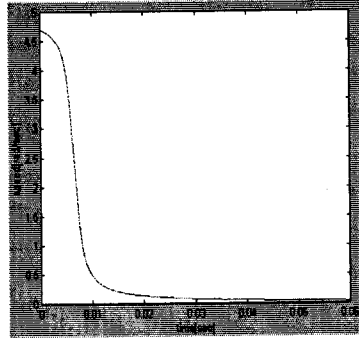


그림. 1 브러시리스 직류 전동기의 속도 응답  
Fig.1 Speed Response of Brushless DC Motor

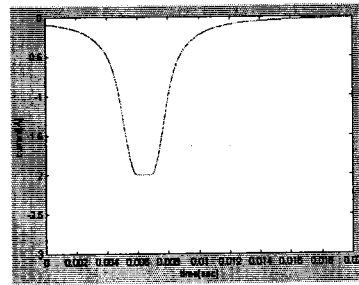


그림. 2 브러시리스 직류 전동기의 전류 응답  
Fig.2 Current Response of Brushless DC Motor

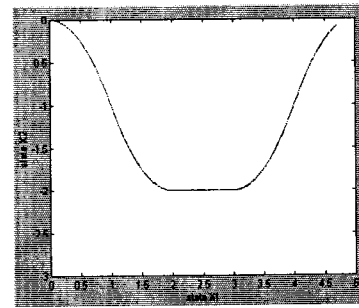


그림. 3 브러시리스 직류 전동기의 위상선도  
Fig.3 Phase Diagram of Brushless DC Motor

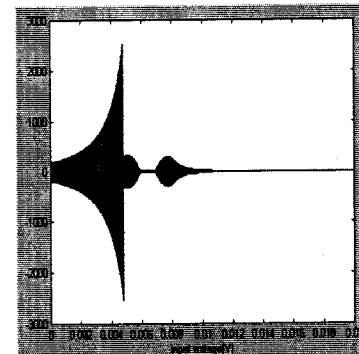


그림. 4 브러시리스 직류 전동기의 제어입력  
Fig.4 Control input of Brushless DC Motor