

압전 변압기의 유한 요소 해석

주현우, 이창환, 정현교
서울대학교 전기역학연구소

Finite Element Analysis of piezoelectric transformer

Hyun-Woo Joo, Chang-Hwan Lee, Hyun-Kyo Jung
School of Electric Eng. Seoul National Univ.

Abstract - 본 논문에서는 유한 요소법을 이용하여 압전 트랜스듀서 (piezoelectric transducer)의 임피던스 및 기계적인 변위값을 계산하였고 이를 실험적으로 검증하였다. 이러한 수치해석을 바탕으로 압전 현상을 해석하기 위해 필요한 물질 상수들의 특성에 미치는 영향을 분석하였다. 이러한 분석을 바탕으로 수치해석에 필요한 물질 상수들을 가리고, 가려진 물질 상수들간의 관계를 규명하여 역산해야할 상수들의 개수를 줄임으로써 간단한 실험에 의해서 압전체의 수치해석에 필요한 물질 상수들을 역으로 찾아갈 수 있는 방법을 제시하였다.

이하에 하였다.

C_{11}	C_{12}	C_{13}	0	0	0	0	0	e_{31}
C_{12}	C_{13}	C_{23}	0	0	0	0	0	e_{32}
C_{21}	C_{22}	C_{23}	0	0	0	0	0	e_{33}
0	0	0	C_{44}	0	0	0	e_{15}	0
0	0	0	0	C_{44}	0	e_{15}	0	0
0	0	0	0	0	C_{66}	0	0	0
0	0	0	0	e_{15}	0	e_{11}	0	0
0	0	0	e_{15}	0	0	0	e_{11}	0
e_{31}	e_{32}	e_{33}	0	0	0	0	0	e_{33}

그림 1. X-축 분극을 위한 물질 계수 행렬

1. 서 론

최근 높은 에너지 밀도, 디자인에서의 다양한 자유도 등의 많은 이점을 가지는 압전체의 이용이 늘어나는 추세이다. 따라서 압전체의 정확한 해석이 요구되고 있다. 메이슨 법등의 단순한 1차원식 등가회로법은 적용은 용이하나 실제 시스템과의 오차가 커서 정밀한 해석 및 설계에는 사용하기가 어렵다.[1] 따라서 2 차원 또는 3차원의 수치해석이 요구되고 있는데, 이 경우 압전영역에 해당되는 복잡한 미분방정식을 해결해야 한다. 따라서 압전체의 해석을 위해 2차원 또는 3차원의 유한요소법이 많이 적용되어오고 있다. 본 논문에서는 압전체의 공진 특성을 해석하기 위하여 3차원 유한 요소법을 적용하며 그 정확성을 압전 트랜스듀서를 통하여 실험적으로 검증하였다.

이러한 수치해석에 있어서 중요한 사항 중의 하나로 압전체의 물질특성을 나타내는 상수들을 들 수 있다. 그림 1은 3차원 유한요소법을 수행하기 위해 필요한 물질 상수를 나타내는 행렬로서 유전특성, 압전특성 그리고 기계적 구조특성을 나타내는 상수들로 구성되어 있다. 그림 1에서 보여지는 것처럼 수치해석에 사용되는 물질 상수들은 개수도 많을 뿐 아니라, 압전체의 전기-기계 에너지 변환의 특성상 측정이 쉽지 않다. 따라서 압전체의 수치해석 및 압전 시스템이 설계에 있어서 많은 제한을 받고 있는 현실이다. 이러한 상수들의 값을 찾아내기 위해 간단한 구조의 경우 해석적으로 압전체의 물질 상수를 유도하기도 하지만 그 경우에도 몇 가지 경험, 실험적 요소를 필요로 하기 때문에 정확한 값을 보장하기가 힘들다.[2] 본 논문에서는 정확한 유한요소해석을 바탕으로 간단한 임피던스 측정만으로 압전체의 수치해석에 필요한 물질 상수를 찾을 수 있는 방법을 제시한다. 압전체는 공진 및 반공진 특성을 보이는데, 이 경우 공진 및 반공진 특성 나타나는 각 스텝별 임피던스를 비교 대상을 삼을 경우 조금만 틀려도 큰 오차가 발생한다. 따라서 일반적인 최적화 기법을 통한 물질값의 역산은 불가능하다고 할 수 있다. 본 논문에서는 15개의 상수들의 압전 특성에 미치는 영향을 규명하여 수치해석 시 필요한 변수의 개수를 줄였으며, 또한 수치해석에 영향을 미치는 상수 간의 관계를 규명하여 물질 상수의 역산을 용

2. 유한 요소 정식화

행렬식 (1)은 압전체에서 기계적인 물리량과 전기적인 물리량의 상관관계를 표현하는 식으로 압전체의 유한 요소 정식화의 기본이 되는 식이다[4].

$$\begin{aligned} T &= c^E S - e^t E \\ D &= e S + \epsilon^t E \end{aligned} \quad (1)$$

- T : 응력 벡터
- S : 변형 벡터
- E : 전기 벡터
- D : 유전 변위 벡터
- C^E : 기계 계수행렬식 (E=상수)
- ϵ^S : 유전상수 (S=상수)
- e : 압전상수

해밀턴의 변분법을 압전체에 적용하면 아래와 같이 유한 요소법을 이용하여 압전체를 해석하기 위한 선형 차분 방정식을 얻을 수 있다[4].

$$\begin{aligned} -\omega^2 M + j\omega D_{uu} u + K_{uu} u + K_{u\phi} \Phi \\ = F_B + F_S + F_P \end{aligned} \quad (2)$$

$$K^t_{u\phi} u + K_{\phi\phi} \Phi = Q_S + Q_P$$

- K_{uu} : 기계 계수 행렬식
- D_{uu} : 기계 감쇠 행렬식
- $K_{u\phi}$: 압전 결합 행렬식
- $K_{\phi\phi}$: 유전 계수 행렬식
- M : 질량 행렬식
- F_B : 기계적인 체적 힘
- F_S : 기계적인 면적 힘
- F_P : 기계적인 point 힘
- Q_S : 면전하
- Q_P : 점전하
- u : 기계적인변위
- Φ : 전위

3. 압전체의 유한 요소 해석

3.1 압전체의 임피던스 해석

압전체의 전기적인 임피던스는 임피던스 analyzer를 통해 실험적으로 쉽게 검증될 수 있는 물리량이며 또한 압전체의 임피던스 해석을 통해 압전체의 공진 특성 즉 공진 주파수와 반공 주파수를 알 수 있다. 유한 요소법을 통한 임피던스 해석은 (3)과 같이 전극에서의 외부 전하량과 전위와의 비를 이용하여 계산된다(4).

$$Z(\omega) = \frac{\phi(\omega)}{j\omega Q} \quad (4)$$

그림 1은 유한 요소법을 통해 구한 압전체의 전기적인 임피던스 파형과 실험에 의한 임피던스 파형의 비교를 나타낸다. 또한 임피던스 파형 해석을 통해 그림 1의 시험 모델에 대한 공진 주파수와 반공진 주파수를 구할 수 있다. 압전체의 공진 주파수는 단락회로 전극에 대한 고유 진동수를 나타내기 때문에 압전체의 최소 임피던스에 의해 표현되며 반공진 주파수는 개방회로 전극에 대한 고유 진동수를 나타내기 때문에 압전체의 최대 임피던스에 의해 표현된다. 유한 요소법을 이용한 해석 결과와 참고 문헌 [4]에서 인용된 실험 결과와 유사한 경향을 나타내므로 그림 1의 임피던스 파형은 본 논문에서의 유한 요소법 과정이 타당성을 보여준다.

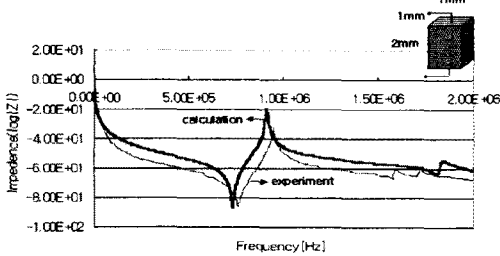


그림 2. 임피던스 파형의 비교

3.2 압전체의 변위 해석

그림 3은 유한 요소법을 통해 해석한 기계적인 변위와 실험을 통해 구한 기계적인 변위의 비교를 나타낸다. 압전체는 하나 이상의 공진 모드를 가지며 각각의 모드는 행렬식 (2)의 고유 특성 방정식의 해로 구해진다. 그림의 결과는 각각의 모드에 대해 정규화 계수를 이용하여 해석한 결과를 보여준다. 첫 번째 공진 모드에서는 5.0[nm/V]의 정규화 계수를 두 번째 공진 모드에 대해서는 2.2[nm/V]의 정규화 계수를 이용한 것이며 유한 요소법을 이용한 해석 결과와 참고문헌 [4]에 언급된 실험 결과가 유사한 경향을 보임을 알 수 있다. 그림 3의 변위 파형 비교를 통해 본 논문에서의 유한 요소법이 타당성을 검증하였다.

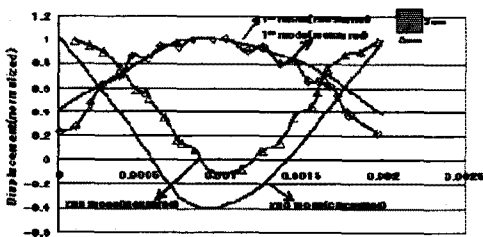
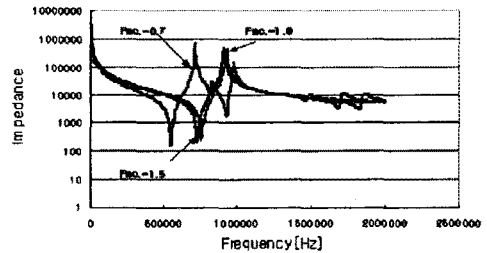


그림 3. 압전체의 변위 비교

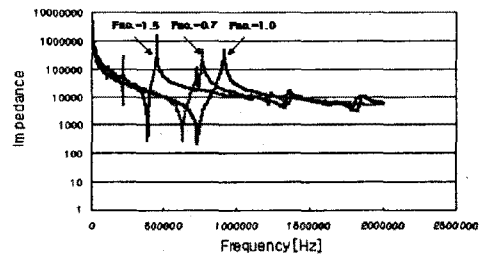
4. 물질 상수 분석

4.1 물질 상수들의 압전 특성에 미치는 영향

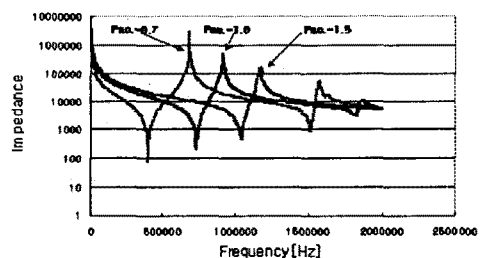
압전체의 3차원 유한요소 해석을 위해서는 그림 1의 행렬로 주어지는 물질 상수들이 필요하다. 그 중 다른 상수들의 값에 의해 찾을 수 있는 것을 제외하면 15 개의 독립적인 상수들이 있다. 수치해석에 반드시 필요한 이러한 상수들을 수치해석을 하는 입장에서 실험적으로 정확하게 찾아내기가 어려우며 따라서 압전체의 해석 및 설계에 있어서 제한적인 요소가 될 수 있다. 따라서 보다 효율적인 압전시스템의 수치해석 및 설계를 위해서는 주어진 압전체의 간단한 임피던스 측정만으로도 물질 상수를 찾는 것이 필요하다. 하지만 압전시스템의 공진, 반공진 특성상 일반적인 수치적인 역산방법으로는 물질 상수를 찾아내는 것이 사실상 불가능하다. 본 논문에서는 각 물질 상수들의 압전 시스템에 미치는 영향과 상수들간의 상호 관계를 수치적, 해석적 방법을 이용하여 규명함으로써 찾아야하는 물질 상수의 개수를 줄여 역산을 가능하게 하였다. 물질 상수는 압전 특성에 미치는 영향에 따라서 크게 두 가지로 분류될 수 있다. 즉, 수치적 해석 결과에 전혀 영향을 미치지 못하는 것들과 영향을 미치는 것으로 나누어지며 이를 잘 이용하면 영향을 미치지 못하는 상수들은 수치해석 시, 일반적인 대표적인 값들을 이용하여도 무관하다는 결론을 얻게 된다. 그림 4는 이중 영향을 크게 미치는 4 개의 상수들에 대한 해석 결과를 보여주는 것으로 모델은 그림 2의 트랜스듀서를 사용하였으며 각각 원래의 값에 대하여 0.7과 1.5의 팩터를 곱한 값을 이용했을 때의 결과이다.



(a) Cemat(1,1)

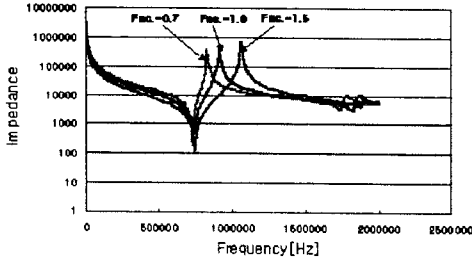


(b) Cemat(1,3)



(c) Cemat(3,3)

5. 결 과



(d) Emat(3,3)

그림 4. 압전체 특성에 영향을 미치는 물질 상수들의 변화에 따른 압전체 공진 특성 변화

4.2 물질 상수간의 연관 관계

압전 상수간에도 정확하게 규정하기는 어렵지만 복잡한 연관성이 존재한다. 이러한 연관성을 보이기 위해 해석적인 방법을 이용하였다. 간단한 모델에 대해서 임피던스 특성이 주어질 경우 물질 상수들을 유도할 수 있다. 하지만 이렇게 유도될 경우 몇 가지 전제 조건과 함께 경험적, 실험적 데이터에 의한 팩터가 필요하며 특정 모델에 대해서만 가능하다는 단점이 있다. (4)-(7)은 각각 디스크판의 압전체에 대한 Cemmat(1,1), Cemmat(1,3), 그리고 Cemmat(3,3)에 해당되는 수식이며 그림 5는 공진 주파수에 따라서 중요 상수간의 관계를 나타낸 것이다.[2]

$$Cemat(1,1) = \frac{s_{11}s_{33} - s_{13}^2}{f(s)} \quad (4)$$

$$Cemat(1,2) = -\frac{s_{12}s_{33} - s_{13}^2}{f(s)} \quad (5)$$

$$Cemat(1,3) = -\frac{s_{13}(s_{11} - s_{12})}{f(s)} \quad (6)$$

$$Cemat(3,3) = \frac{s_{11}^2 - s_{12}^2}{f(s)} \quad (7)$$

(s_{ij} 는 문헌 [2]를 참조)

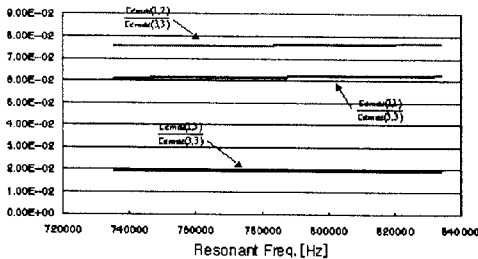


그림 5. 공진주파수에 따른 Cemmat(1,1), Cemmat(1,3)이 Cemmat(3,3)과 가지는 비율적 관계

압전 특성에 대한 물질 상수들의 영향, 그리고 상수들 상호간의 관계를 분석해 보면 압전체의 특성에 영향을 미치는 상수들은 전체 중에서 Cemmat(1,1), Cemmat(1,2), Cemmat(1,3), Cemmat(1,4) 그리고 Emat(3,3)으로 결정할 수 있다.

Esmat(3,3)은 공진특성에는 영향을 미치지 않고 반공진 특성에 영향을 미친다. 따라서 임피던스 측정시 반공진 특성을 알면 어렵지 않게 알 수 있다. 압전체의 특성에 가장 영향을 크게 미치는 상수는 분극 방향의 특성을 좌우하는 것으로 이 모델에 대해서는 Cemmat(3,3)이다. Cemmat(1,1), Cemmat(1,2) 그리고 Cemmat(1,3)은 Cemmat(3,3)에 크게 좌우되는 상수들로서 공진 특성에는 영향을 미치지 못 하지만 Cemmat(3,3)과의 관계가 정의되어진 범위에서 벗어나면 공진 특성은 정상적인 모습에서 벗어나게 되며 이러한 성질을 이용하여 찾아가게 된다. 따라서 측정되어진 공진-반공진 주파수에 의해 Cemmat(3,3)을 찾고 그 후에 비정상적인 공진 특성을 보이지 않도록 Cemmat(3,3)과 일정한 범위 내에서 Cemmat(1,1), Cemmat(1,2) 그리고 Cemmat(1,3)을 찾아가면 압전 물질의 수치해석을 위한 물질 상수들을 역산할 수 있다.

6. 결 론

본 논문에서는 유한 요소법을 이용한 압전체의 임피던스 및 기계적인 변위의 결과를 실험에 의한 검증을 통해 본 논문에서 적용된 유한 요소법의 과정이 타당함을 보였으며 이를 이용해서 물질 상수들이 압전체의 공진 특성에 미치는 영향과 상수간의 연관성을 해석하여 일반적인 역산 기법으로는 계산하기 어려운 수치해석을 위한 압전체의 물질 상수들을 역산하였다.

(참 고 문 헌)

- [1]R. Lerch, H. Kaarmann, Three-Dimensional Finite Element Analysis of Piezoelectric Media, *Proceeding of IEEE Ultrasonics Symposium 1987*
- [2]A.J. Moulson and J.M.Herbert. *Electroceramics* Chapman and Hall
- [3]F.Stuart Foster, Daniel H. Turnbull, "Characteristic of Lead Zirconate Titanate Cerami Use in Miniature High-Frequency (20-80 Transducers", *IEEE Transactions on Ultrasonics*, NO.5 pp. 446-453, Sep.1991
- [4]Reinhard Lerch, "Simulation of Piezoelectric Devices by Two- and Three-Dimensional Finite Elements." *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control*, vol. 37, pp. 233-247, May 1990
- [5]H. W. Katz, "Solid State Magnetic and Dielectric Devices" 1959, John Wiley and Sons, Inc.