

LQR방법에 의한 PID제어기 동조 - 시간영역에서의 접근

양지훈, 서병설

한양대학교 전자통신전파공학과

전화 : 02-2290-0364 / 핸드폰 : 016-287-6783

PID Controller Tuning Using LQR method - Time domain approach

Yang Ji Hoon, Suh Byung Suhl

Division of Electrical and Computer Engineering, Hanyang University

Email : openyj@ihanyang.ac.kr

Abstract - This paper presents optimal robust PID controller design method for second order systems to satisfy the design specifications in time domain. The parameters of PID controller are determined by the weighting factors Q and R of cost function. It is suggested that the selection of Q and R matrix can be determined by its relationship with the natural frequency of ITAE criterion.

서는 Suh^[8]가 제안한 주파수 영역의 LQ접근 방법을 시간영역에서 설계사양을 만족하도록 성능지수(performance index)인 절대오차 시간곱 적분(ITAE:integral of time multiplied by the absolute error)^[11]의 판별법에 의한 고유주파수를 만족하는 가중치 요소 Q와 R을 선정하는 PID 제어기 설계방법을 제안한다.

1. 서 론

현대 제어기술자들에게 주요 관심사 중의 하나는 강인한 안정도와 시스템의 좋은 성능을 유지하면서 설계사양을 만족시키는 것이다. 강인성 문제에 대해서는 견고한 수학적인 최적화 이론에 기초한 LQG-LTR^[1]과 H[∞]^{[2][3]}와 같은 강인 제어기 설계 방법들이 발전되어왔지만, 산업현장에서는 구조가 간단하고 강인성을 내포하고 있으며 기술자들에게 친숙한 PID 제어기가 많이 쓰인다. 그래서 Grimble^[4]은 H[∞]제어기가 PID 제어기 구조를 가짐을 연구하였고, Matterzoni와 Rocco^[5]는 강인한 PID 제어기 동조를 위해 H[∞]제어기 강인 동조 알고리즘을 개발하여 PID 제어기에 접목시키려는 연구가 있어왔다. 반면에, LQG-LTR처럼 LQR의 강인성을 이용하는 새로운 LQ 접근방법으로 Suh^[6]는 Athans^[7]의 LQ-servo 구조를 부분 상태 궤환을 가진 PI 제어기 형태로 해석을 하고 루프형성 문제를 해결했다. 또한 Suh^[8]는 Shin와 Chen^[9]이 제안한 LQ 접근방법을 루프형성기법을 이용한 새로운 강인 최적 PID 제어기 설계방법을 제안했다. 이런 설계방법들은 주파수 영역의 설계사양은 만족하지만 시간영역의 설계사양들은 잘 만족하지 않기 때문에 시간영역에서 최적 강인 PID 제어기 설계가 필요하다. He 등^[10]은 시간 지연을 가진 일차 시스템에 대해 시간영역에서 LQR 접근방법으로 PI/PID 제어기 설계를 시도하였다. 그러나 PID 제어기 동조시 시스템의 어떠한 극(pole)값과 영점인 미분계수(Kd)가 일치하는 특수한 조건에서만 가능하므로 사실상 PID 제어기 설계방법이라 할 수 없다. 본 논문

2. PID 제어기와 최적제어 법칙

다음의 2차 시스템을 고려해 보자.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = cu(t) \quad (1)$$

여기서, $y(t)$ 는 출력변수, $u(t)$ 는 제어변수, 그리고 a, b, c 는 시스템의 계수이다. 초기 조건 $y(0)$ 와 $\frac{dy(0)}{dt}$ 는 명시되어진다.

출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수를 도입하여 2차시스템의 최적제어법칙을 기존의 PID제어에 적용했다. 새로운 상태변수 $x(t)$ 는 다음과 같다.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \int_0^t y(\tau) d\tau \\ y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

그러면 식(1)은,

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

여기서 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & -a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$ 이고, $x(0)$ 는 주어진 다.

LQR 해석은 2차가격함수 식(4)를 최소화하는 제어 $u(t)$ 를 찾는 것이다.

$$J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T R u) dt \quad (4)$$

여기서 Q는 양의 반한정(positive semi-definite) 대칭행렬인 상태가중행렬이고, R은 양의 한정(positive definite)

대칭행렬인 제어가중행렬이다. 그러면 궤환제어법칙은 다음과 같다.

$$u(t) = -Gx(t) \quad (5)$$

$$G = R^{-1}B^TK \quad (6)$$

여기서 G 는 제어게인행렬이고, K 는 양의 반한정 대칭행렬이고 다음 Riccati식의 해이다.

$$KA + A^TK + Q - KBR^{-1}B^TK = 0 \quad (7)$$

K 의 성분들을 다음과 같이 놓으면,

$$K = \begin{bmatrix} K_{00} & K_{10} & K_{20} \\ K_{10} & K_{11} & K_{21} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

식(5)의 최적제어법칙은 PID제어기 형태가 된다.

$$u(t) = -\frac{c}{R} \left(K_{22} \frac{dy(t)}{dt} + K_{21}y(t) + K_{20} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (9)$$

기존의 PID제어기의 형태는,

$$u(t) = -K_c \left(y(t) + \tau_D \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{\tau_I} \int_0^t y(\tau) d\tau \right) \quad (10)$$

이득 K_c 의 성분들과 비례이득 K_c 와 시정수 τ_I 그리고 τ_D 와의 관계는 다음과 같다.

$$K_{20} = \frac{RK_c}{c\tau_I}, \quad K_{21} = \frac{R}{c} K_c, \quad K_{22} = \frac{RK_c\tau_D}{c} \quad (11)$$

상태가중행렬 Q 를 식(12)와 같이 놓고

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Riccati방정식 식(7)에 대입하면 아래와 같이 K 에 관한 식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$Q_{00} = \frac{c^2}{R} K_{20}^2 \quad (13)$$

$$Q_{11} = \frac{c^2}{R} K_{21}^2 + 2bK_{21} - 2K_{10} \quad (14)$$

$$Q_{22} = \frac{c^2}{R} K_{22}^2 + 2aK_{22} - 2K_{21} \quad (15)$$

$$0 = \frac{c^2}{R} K_{20}K_{22} + aK_{20} - K_{10} \quad (16)$$

PID 동조 파라미터를 구하기 위해서는 K 를 Q 에 관한 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$K_{20} = \frac{\sqrt{RQ_{00}}}{c} \quad (17)$$

$$K_{21}^2 + \frac{4bR}{c^2} K_{21} + \left(\frac{4b^2R^2}{c^4} - \frac{2R}{c^2} Q_{11} \right) K_{21}^2 - \left(\frac{4bR^2}{c^4} Q_{11} + \frac{8R^2}{c^4} Q_{00} \right) K_{21} + \left(\frac{R^2}{c^4} Q_{11}^2 - \frac{4R^2}{c^4} Q_{00}Q_{22} - \frac{4a^2R^2}{c^6} Q_{00} \right) = 0 \quad (18)$$

$$K_{22} = \sqrt{\frac{2R}{c^2} K_{21} + \frac{RQ_{22}}{c^2} + \frac{a^2R^2}{c^4} - \frac{aR}{c^2}} \quad (19)$$

식(18)은 식(13),(15),(16)을 식(14)에 대입하면 K_{21} 에 대한 4차방정식이 나온다.

식 (17),(18),(19)에서 K_{20} , K_{21} , K_{22} 는 PID 제어기 동조 파라미터들이다. 이들은 Q 와 R 에 의해 결정되어지므로 LQR문제에 해석되므로 LQR의 특성인 무한대의 이득여유와 60° 위상여유의 강인성을 갖게된다. 그러나 LQR은 출력궤환이 없어서 성능에 관해 논하기가 어렵기 때문에 본 논문에서 고려한 2차 시스템에서는 출력측에 새로운 상태변수를 도입하는 방법을 이용해 출력궤환을 가지는 LQR 구조를 고려했다.

3. 시간영역에서 Q와 R의 선정

현대 제어이론에서는 필요한 시스템 성능을 기술자가 정량적으로 성능지수를 계산하거나 측정할 수 있으며 이를 이용하여 시스템의 성능을 평가할 수 있다. 성능지수(performance index)는 시스템의 성능을 나타내는 정량적인 척도이며 시스템의 중요한 규격을 강조할 수 있도록 선정한다. 시간영역의 설계사양인 제동비(damping ratio)와 고유주파수(natural frequency)의 관계는 2차 계통 시스템에서만 잘 유도될 수 있기 때문에 본 논문에서는 페루프 시스템이 식(21)과 같이 3차이기 때문에 이 관계를 적용할 수 없어서 3차시스템의 ITAE 성능지수를 이용해서 시간영역에서 고유주파수에 의한 Q 와 R 을 선정하는 방법을 강구한다.

다음과 같은 페루프 전달함수에서

$$\pi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0} \quad (20)$$

계단입력에 대한 ITAE 성능판별법을 최소화시키는 계수들은 전달함수가 6차일때까지 표1와 같이 정해진다.^[11] 이때, w_n 에 따라서 극점들의 실수부와 허수부가 s -평면 상에서 좌반면의 대각선을 따라 이동한다. 즉, 감쇠비가 일정하므로 퍼센트 오버슈트가 동일하게 유지되게 된다. 그리고 상승시간, 정착시간을 조절할 수 있다.

$s + w_n$ $s^2 + 1.4w_n s + w_n^2$ $s^3 + 1.75w_n s^2 + 2.15w_n^2 s + w_n^3$ $s^4 + 2.1w_n s^3 + 3.4w_n^2 s^2 + 2.7w_n^3 s + w_n^4$ $s^5 + 2.8w_n s^4 + 5.0w_n^2 s^3 + 5.5w_n^3 s^2 + 3.4w_n^4 s + w_n^5$ $s^6 + 3.25w_n s^5 + 6.60w_n^2 s^4 + 8.60w_n^3 s^3 + 7.45w_n^4 s^2 + 3.95w_n^5 s + w_n^6$

표1. 계단입력에 대하여 ITAE 판별법에 근거한 $\pi(s)$ 의 최적계수

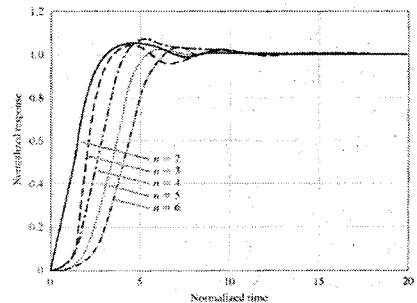


그림1. ITAE에 근거한 최적계수 표준화 전달함수의 계단응답

시간영역의 성능지수인 절대오차 시간곱 적분(ITAE)의 고유주파수(w_n)를 만족하는 Q 와 R 을 결정하기 위해서 궤환제어법칙 $u(t) = -Gx(t)$ 을 식(3)에 대입하면 페루프

시스템은 다음과 같다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - BG)x(t)$$

$$A_c = A - BG = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c^2}{R} K_{20} & -b - \frac{c^2}{R} K_{21} & -a - \frac{c^2}{R} K_{22} \end{bmatrix}$$

페루프 시스템의 특성방정식과 3차시스템의 ITAE의 $\pi(s)$ 의 최적계수는 다음과 같다.

$$\Delta = s^3 + (a + \frac{c^2}{R} K_{22})s^2 + (b + \frac{c^2}{R} K_{21})s + \frac{c^2}{R} K_{20} \quad (21)$$

$$\text{ITAE} : s^3 + 1.75w_n s^2 + 2.15w_n^2 s + w_n^3 \quad (22)$$

식(21)과 식(22)의 계수들을 비교하면 아래와 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$w_n^3 = \frac{c^2 R Q_{20}}{R} \quad (23)$$

$$2.15w_n^2 = b + \frac{c^2}{R} K_{21} \quad (24)$$

$$1.75w_n = a + \frac{c^2}{R} (\sqrt{\frac{2R}{c^2} K_{21} + \frac{RQ_{22}}{c^2} + \frac{a^2 R^2}{c^4}} - \frac{aR}{c^2}) \quad (25)$$

다시 Q 를 w_n 에 관한 식으로 나타내면

$$Q_{20} = \frac{Rw_n^3}{c^2} \quad (26)$$

$$Q_{22} = \frac{R}{c^2} (1.75w_n)^2 - \frac{a^2 R}{c^2} - 2K_{21} \quad (27)$$

나머지 Q_{11} 은 식(18)의 K_{21} 에 대한 4차방정식의 해를 Ferrari해법으로 구하고 식(24)에 대입하면 w_n 에 대한 식으로 계산할 수 있다. 그러므로 LQR의 가중치 요소 Q 와 R 은 고유주파수(w_n)에 의해서 선정됨을 알 수 있다.

4. 예 제

2차 시스템이 다음과 같을 때

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 5\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = u(t)$$

출력변수에 적분요소를 첨가시킨 새로운 상태변수를 도입하면 시스템의 상태공간 모델식과 설계사양은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

그림1에서 $n=3$ 일 때 정착시간이 정규화 시간으로 약 14초이므로, 정착시간(settling time)을 1.4초 정도 하기 위해서 $w_n = 10 \text{ rad/s}$ 로 정한다. w_n 이 결정되면 Q_{20}, Q_{11}, Q_{22} 이 결정되고 이 Q 값을 식(17),(18),(19)에 대입하면 PID 계수인 K_{20}, K_{21}, K_{22} 이 결정된다.

$$G = [1000 \ 214 \ 17.5]$$

그림2에서 시간응답곡선을 나타냈다. 본 논문에서 제안된 방법이 Shin와 Chen 방법보다 오버슈트(overshoot), 상승시간(rising time), 정착시간(settling time)이 개선되었고 설계사양에서 예측한 정착시간이 약 1.4초 정도로 응답이 나옴을 볼 수 있다.

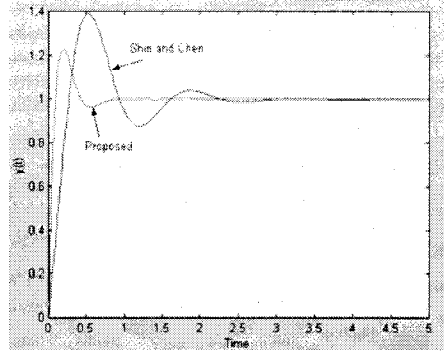


그림2. PID 제어기의 단위계단응답

또한 진동이 없는 빠른 응답(deadbeat response)을 얻기 위해서 시스템의 계수들과 응답척도^[11]를 이용한 실험결과도 만족한 응답을 얻을 수 있음을 확인했다.

5. 결 론

2차 시스템에서의 PID 제어기의 강인 최적 동조를 위해서 LQR 설계문제로 전환하고, LQR의 가중함수의 가중치 요소 Q 와 R 을 시간영역에서 선정하기 위해 시스템의 성능을 나타내는 성능지수 ITAE를 이용한 기법을 제안했다. 그리고 LQR 구조를 갖고 있어 강인성을 보장시킬 수 있을 뿐 아니라 제안된 방법에 의해 시간영역에서의 설계사양들을 효율적으로 만족시킬 수 있었다. 본 연구는 2차 시스템으로 제한되어질지라도, 2차 모델은 진동, 구조적 해석 그리고 배나 항공기의 회전제어와 같이 다양한 분야에 적용되어지고 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] J. Doyle and G. Stein, "Robustness with Observers", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-24, No. 4, pp. 607~611, 1979.
- [2] G. Zames, "feedback and Optimal Sensitivity", IEEE Trans. on Auto. Control, Vol. AC-26. No.2, pp. 301~320.
- [3] J. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar and B.A. Francis, "State-space solutions to standard H2 and H ∞ control problems", IEEE Trans on Auto. Control, Vol. 34, No. 8, pp. 831~847. Also see 1989 American Control Conferencr, Atlanta, June, 1988
- [4] M. Grimble., "H ∞ controllers with a PID structure", J. of Dynamic Syst. Meas. and Contr., Vol. 112, pp. 325~336, 1994
- [5] C. Mattezzoni and P. Rocco, "Robust tuning of PID Regulators Based on Step-Response Identification", European J. of Contr. Vol. 3, pp 125~136, 1997
- [6] B. Suh and S. Yun, "LQ-servo Design",

- Proceedings of The 4th Asia-Pacific Conference on Control & Measurement, pp. 97~100, 9-12 July 2000.
- [7] M. Athans, "Lecture Note on Multivariable Control System", M.I.T. Ref. No. 860224/6234., 1986.
- [8] B. Suh, "Robust Optimal Tuning of PID Regulators for A second Order System", Proceeding of the 14th International Conference on System Science, Wroclaw Poland, 11-14 September, pp. 313~319, 2001.
- [9] Y. Shin and C. Chen, "On the weighting factors of the quadratic criterion in optimal control", Int. J. Control, Vol. 19, No. 5, pp. 947~955, 1974.
- [10] Jian-Bo He, Qing-Guo Wang and Tong-Heng Lee, "PI/PID controller tuning via LQR approach", Chemical Engineering Science, Vol. 55, No. 13, pp. 2429~2439, 2000.
- [11] Dorf. R.C. and Bishop. R.H., "Modern Control System", 8th ed., Addison-Wesley, 1998.