

로봇 매니플레이터에 대한 강인 제어기 설계

이영찬\* , 이강웅  
 한국항공대학교 항공전자공학과

Design of a Robust controller of Robot Manipulators

Young Chan Lee and K. W. Lee  
 Department of Avionics Engineering , Hankuk Aviation University

**Abstract** - 본 논문에서는 파라미터 불확실성이 유한한 로봇 매니플레이터에 대한 비선형 강인 제어기법을 제안한다. 파라미터의 불확실성을 보상하는 강인제어시 발생하는 정상 상태 오차를 개선시키기 위하여 오차 관련 함수에 추종오차의 적분항을 추가시키고 제어입력에 이 적분항이 포함되도록 한다. 설계된 제어시스템의 안정도는 Lyapunov 기법에 의하여 해석한다. 파라미터 불확실성을 가지는 로봇 매니플레이터에 대한 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 제안된 기법의 성능을 확인하고 5 링크 2 자유도의 FARA 로봇에 대한 실험을 통하여 제안된 기법이 실용 로봇제어에 적용될 수 있음을 보이고자 한다.

1. 서 론

로봇 매니플레이터 모델이 가지는 파라미터 불확실성을 보상하기 위한 강인제어(robust control) 기법은 많은 관심속에서 지속되어 왔다. 로봇 매니플레이터 제어에서는 부하변동, 마찰, 백래시, 외란 등의 영향을 받는다. 그러나 로봇 제어를 위한 모델은 이와 같은 불확실성을 구체적으로 표현하지 못하는 모델링 오차나 불확실성을 가지게 되고 이것은 제어 성능을 약화시키게 된다[1]. 여러 가지 강인제어 기법 중 Lyapunov 안정도 판별법에 근거한 포화강인제어(robust saturation control) 기법[2]은 파라미터 변동이나 외란에도 불구하고 위치 궤적 추종오차가 허용오차 범위 내로 수렴(uniformly ultimate bounded)되도록 한다. Spong[3]은 로봇 매니플레이터의 동특성 모델의 파라미터의 선형적 성질을 이용하는 새로운 강인 제어기법을 제안하였다. 여기서는 링크의 질량과 관성 모멘트와 같은 시스템 파라미터들의 불확실성의 범위만을 이용하여 제어시스템을 설계하였다. 그러나 파라미터 변동범위를 정확히 알기 어렵기 때문에 변동 범위 폭을 크게 선정하게 되는데 그 결과 제어입력이 커질 뿐만 아니라 정상상태에서 위치 궤적의 추종오차가 커지게 된다. 정상상태 오차를 줄이기 위한 방법으로는 제어입력에 적분작용이 포함되도록 하는 것이다[4].

본 연구에서는 Spong이 제시한 파라미터 불확실성의 한계를 이용하는 강인제어에 의해 발생하는 정상상태 오차를 개선시키기 위한 제어기법을 제시하고자 한다. 강인제어 입력을 위한 오차 관련 함수에 오차의 적분항을 추가시킴으로써 제어입력이 적분작용을 하여 정상상태 오차가 개선되도록 한다. 페루프 제어시스템의 안정도 및 수렴성은 Lyapunov 기법을 적용하여 해석한다. 제안된 제어기법을 5 링크 2 자유도 FARA 로봇 매니플레이터의 궤적 제어에 적용하는 컴퓨터 시뮬레이션 및 실험을 통하여 제어성능을 확인하고 실용될 수 있음을 입증하고자 한다.

2. 강인 제어기 설계

마찰이 무시된  $n$ -링크 강체 로봇의 동역학 방정식은 다음과 같다[5].

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau \quad (1)$$

여기서  $q, \dot{q}, \ddot{q} \in R^n$ 은 각각 관절의 위치, 속도, 가속도 벡터이고,  $\tau \in R^n$ 는 토크벡터이다.  $M(q) \in R^{n \times n}$ 은 관성행렬로 대칭이고 양한(positive definite)이며 다음 성질을 가진다. 벡터  $C(q, \dot{q}) \dot{q}$ 는 구심력과 코리올리시힘으로  $n \times 1$ 벡터이고  $G(q)$ 는 중력 벡터이다.

관성행렬  $M(q)$ 는 다음 성질을 가진다.

$$0 < M_m \leq \|M(q)\| \leq M_M$$

행렬  $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ 는 빗대칭(skew-symmetric)이 되고 식 (1)은 미지의  $p \times 1$  상수 파라미터 벡터  $\theta$ 에 대하여 다음과 같이 선형이 된다.

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Y(q, \dot{q}, \ddot{q})\theta = \tau \quad (2)$$

여기서  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ 는  $n \times p$ 의 측정행렬(regression matrix)이다.

부하변동이나 외란에 의한 파라미터 불확실성이 유한하다고 가정할 때, 미지의 벡터  $\theta$ 를 이미 알고 있는 공칭 벡터(nominal vector)  $\theta_0$ 로 나타내면  $\theta$ 와  $\theta_0$ 사이의 오차는 다음과 같이 유한한 값으로 한정된다.

$$\|\theta\| = \|\theta - \theta_0\| \leq \rho \quad (3)$$

이와 같이 변동범위가 제한되는 파라미터 변동을 보상하기 위한 강인 제어입력은 공칭 파라미터로 표현되는 시스템에 적용되는 공칭 항과 미지의 파라미터를 보상하기 위한 항으로 나눌 수 있는데 공칭 항  $\tau_0$ 를 다음과 같이 정하기로 한다.

$$\begin{aligned} \tau_0 &= M_0(q)a + C_0(q, \dot{q})v + G_0(q) - Kr \\ &= Y(q, \dot{q}, v, a)\theta_0 - Kr \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $M_0(q)$ ,  $C_0(q, \dot{q})$ 와  $G_0(q)$ 는 각각  $M(q)$ ,  $C(q, \dot{q})$ 와  $G(q)$ 의 공칭 행렬이고,  $K$ 는 양한의 대칭인 제어이득 행렬로 정해져야 하며, 변수  $v$ 와  $a$ 는 오차 벡터  $e = q(t) - q_d(t)$ 와 설계 파라미터  $\lambda > 0$ 에 대해 다음과 같이 정의된다.

$$v = \dot{q}_d - \lambda e - \lambda^2 \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad a = \dot{v}$$

파라미터 불확실성을 보상하기 위한 강인 제어입력을 다음과 같이 정한다.

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_0 + Y(q, \dot{q}, v, a)u \\ &= Y(q, \dot{q}, v, a)(\bar{\theta} + u) - Kr \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 함수  $u$ 는 파라미터 불확실성을 보상하기 위한 항으로 비선형이 되며 뒤에서 정의하기로 한다.

식 (5)를 식 (2)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$M(q)\dot{r} + C(q, \dot{q})r + Kr = Y(q, \dot{q}, v, a)(\bar{\theta} + u) \quad (6)$$

여기서 함수  $r$ 는 강인제어에서 발생하는 정상상태오차를 개선하기 위해 다음과 같이 오차의 적분 항이 포함되도록 정한다.

$$r = \dot{e} + \lambda e + \lambda^2 \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (7)$$

제안된 제어시스템의 안정도를 다음 정리를 통하여 해석하기로 한다.

[정리] 임의의 상수  $\epsilon > 0$ 인 설계 파라미터에 대해 비선형 입력 벡터  $u$ 를 다음과 같이 정의하면 식(5)의 제어 입력에 의해 페루프 시스템의 추종오차는 유한한 범위 내에 도달하여 머무르게(uniformly ultimately bounded) 된다.

$$u = \begin{cases} -\rho \frac{Y^T r}{\|Y^T r\|}, & \text{if } \|Y^T r\| > \epsilon \\ -\frac{\rho}{\epsilon} Y^T r, & \text{if } \|Y^T r\| \leq \epsilon \end{cases} \quad (8)$$

(증명) 식(7)에 정의된 벡터  $r$ 은  $e, \dot{e}, \int e$ 의 선형 조합이므로 식(6)의 평형점  $e=0, \dot{e}=0$ 의 안정성은 평형점  $e=0, \gamma=0$ 의 안정성과 동가이다. 따라서 시스템의 안정도를 해석하기 위해 Lyapunov 후보함수를 다음과 같이 정한다.

$$V = \frac{1}{2} r^T M(q)r \quad (9)$$

식(9)를 미분하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \dot{r}^T M(q)r + \frac{1}{2} r^T \dot{M}(q)r + \frac{1}{2} r^T M(q)\dot{r} \\ &= r^T M(q)\dot{r} + \frac{1}{2} r^T \dot{M}(q)r \\ &= r^T \{Y(q, \dot{q}, v, a)(\bar{\theta} + u) - C(q, \dot{q}) - Kr\} \\ &\quad + \frac{1}{2} r^T \dot{M}(q)r \\ &= \frac{1}{2} r^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}))r - r^T Kr \\ &\quad + r^T Y(q, \dot{q}, v, a)(\bar{\theta} + u) \\ &= -r^T Kr + r^T Y(q, \dot{q}, v, a)(\bar{\theta} + u) \end{aligned} \quad (10)$$

먼저  $\|Y^T r\| > \epsilon$  일 경우 식(10)에 식(8)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -r^T Kr + r^T Y(q, \dot{q}, v, a)(\bar{\theta} + u) \\ &= -r^T Kr + (Y^T r)^T (\bar{\theta} - \rho \frac{Y^T r}{\|Y^T r\|}) \\ &\leq -r^T Kr + \|Y^T r\|^T (\|\bar{\theta}\| - \rho) \\ &\leq -r^T Kr \\ &\leq -\|K\| \|r\|^2 \text{ for } \|\bar{\theta}\| < \rho \end{aligned} \quad (11)$$

따라서 오차함수  $r$ 은 초기상태에서  $\epsilon$ 함수의 한정된 범위 내에 도달하게 됨을 알 수 있다.

다음으로  $\|Y^T r\| \leq \epsilon$  인 경우에 식 (10)에 식 (8)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -r^T Kr + r^T Y(q, \dot{q}, v, a)(\bar{\theta} + u) \\ &\leq -r^T Kr + (Y^T r)^T (\rho \frac{Y^T r}{\|Y^T r\|} + u) \\ &= -r^T Kr + (Y^T r)^T (\rho \frac{Y^T r}{\|Y^T r\|} - \frac{\rho}{\epsilon} Y^T r) \\ &= -r^T Kr + \rho \|Y^T r\| - \frac{\rho}{\epsilon} \|Y^T r\|^2 \end{aligned} \quad (12)$$

식 (13)의 우변 항에서 함수  $\rho \|Y^T r\| - \frac{\rho}{\epsilon} \|Y^T r\|^2$ 는  $\|Y^T r\| = \frac{\epsilon}{2}$  에서 최대가 되며 최대값은  $\frac{\rho\epsilon}{4}$  이 되므로 다음 식이 성립된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -r^T Kr + \frac{\rho\epsilon}{4} \\ &\leq -\|K\| \|r\|^2 + \frac{\rho\epsilon}{4} \end{aligned} \quad (13)$$

식 (13)에서  $\|r\| > \frac{\rho\epsilon}{4\|K\|}$  이면  $\dot{V} < 0$  이 된다. 따라서

오차함수  $r$ 은 집합  $\{r: \|r\| \leq \frac{\rho\epsilon}{4\|K\|}\}$ 로 수렴하여 머무르게 된다. 여기서  $\epsilon$ 는 설계 파라미터로 임의로 선정할 수 있으므로  $\epsilon$ 를 충분히 작게 선정하면 제안된 제어 입력은 파라미터 불확실성에 대한 정상상태 추종오차를 충분히 작게 할 수 있다.

### 3. 컴퓨터 시뮬레이션 및 실험

제안된 강인제어 기법을 적용하여 컴퓨터 시뮬레이션과 실험을 하기 위한 그림 1과 같은 5-링크 2자유도의 로봇 매니퓰레이터의 동특성 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -C_{12}(q, \dot{q}) \\ C_{12}(q, \dot{q}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1(q) \\ G_2(q) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

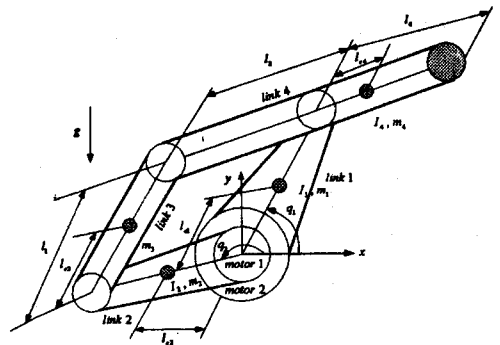


그림 1. 5-링크 로봇 매니퓰레이터

여기서 동특성 방정식의 각 행렬의 요소와 파라미터  $\theta$

는 다음과 같이 정의된다.

$$M_{11}(q) = m_1 l_{c2}^2 + m_3 l_{c3}^2 + m_4 l_1^2 + I_1 + I_3 = \theta_1$$

$$M_{12}(q) = (m_3 l_2 l_{c3} - m_4 l_1 l_{c4}) \cos(q_2 - q_1) = \theta_2 \cos(q_2 - q_1)$$

$$M_{22}(q) = m_2 l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + m_4 l_{c4}^2 + I_2 + I_4 = \theta_3$$

$$C_{12}(q, \dot{q}) = \theta_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2$$

$$G_1 = g(m_1 l_{c1} + m_3 l_{c3} + m_4 l_1) \cos q_1 = g \theta_4 \cos q_1$$

$$G_2 = g(m_2 l_{c2} + m_3 l_2 - m_4 l_{c4}) \cos q_2 = g \theta_5 \cos q_2$$

측차 행렬  $Y(q, \dot{q}, \ddot{q})$ 의  $Y_{ij}$  요소는 다음과 같다.

$$Y_{11} = 0, \quad Y_{12} = \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_2 - \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2^2,$$

$$Y_{13} = 0, \quad Y_{14} = g \cos q_1, \quad Y_{15} = 0,$$

$$Y_{21} = 0, \quad Y_{22} = \cos(q_2 - q_1) \ddot{q}_1 + \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1^2,$$

$$Y_{23} = \ddot{q}_2, \quad Y_{24} = 0, \quad Y_{25} = g \cos q_2.$$

각 요소값들은 다음과 같다.

$$m_1 = 5.5 \text{ Kg}, \quad m_2 = 0.3 \text{ Kg}, \quad m_3 = 0.2 \text{ Kg},$$

$$m_4 = 4.5 \text{ Kg} + \Delta m_4, \quad l_1 = 0.350 \text{ m}, \quad l_2 = 0.140 \text{ m},$$

$$l_{c1} = 0.175 \text{ m}, \quad l_{c2} = 0.07 \text{ m}, \quad l_{c3} = 0.175 \text{ m},$$

$$l_{c4} = 0.250 \text{ m}, \quad I_1 = 0.04 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_2 = 0.003 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2,$$

$$I_3 = 0.001 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2, \quad I_4 = 0.06 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

파라미터 변동은 질량  $m_4$ 가 다음 범위 내에서 변하는 것으로 가정하였다.

$$0 \leq \Delta m_4 \leq 5.5$$

파라미터의 변동범위를 위와 같이 설정한다면 식(4)에서 정의된 공칭벡터  $\theta_0$ 는 부하변동에 따른 값의 변화의 평균값을 취한 값으로 하여 다음과 같이 정하였다.

$$\theta_0 = [0.3369 \quad -0.2406 \quad 0.1719 \quad 0.9625 \quad -0.6875]$$

선정된 공칭 벡터를 이용하여 식(3)에서 정의된 파라미터의 변동범위의 한계를 계산한 결과

$$\|\hat{\theta}^2\| = \sum_{i=1}^5 (\theta_{0i} - \theta)^2 \leq \sqrt{1.2649}$$

로부터 불확실성의 한계  $\rho$ 는 1.2649가 된다.

컴퓨터 시뮬레이션에서 로봇 매니퓰레이터가 추종해야 할 기준궤적은 다음과 같이 설정하였다.

$$q_{a1}(t) = 1.57(1 - e^{-5t}(1+5t)) + \pi/2$$

$$q_{a2} = 1.57(1 - e^{-5t}(1+5t)) + \pi$$

실제 파라미터들을  $\lambda=5$ ,  $\epsilon=1.0$ 으로 설정하고, 제어 이득  $K=30I$ 로 정하여 오차 관련 함수에 적분항이 추가된 경우와 적분항이 포함되지 않은 경우 추종오차와 토크에 대한 시뮬레이션 결과를 그림 2와 그림 3에 나타내었다. 이 결과로부터 제안된 방식을 적용하면 정상상태에서 추종오차가 개선됨을 알 수 있다.

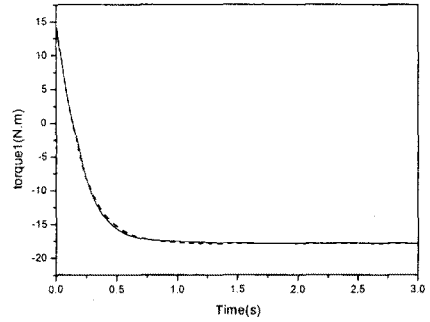
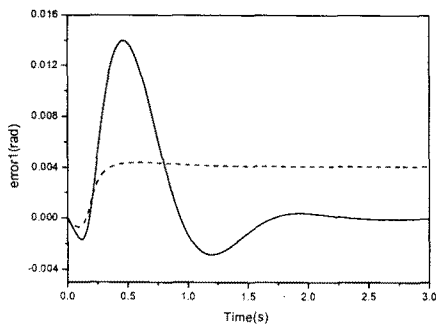


그림 2. 제안된 방식(실선)과 적분항을 포함하지 않는 제어 방식(점선)에 의한 위치차  $q_1$ 의 추종오차와 토크

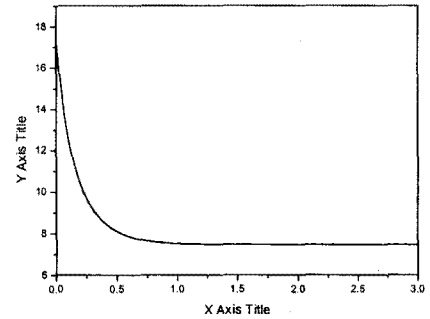
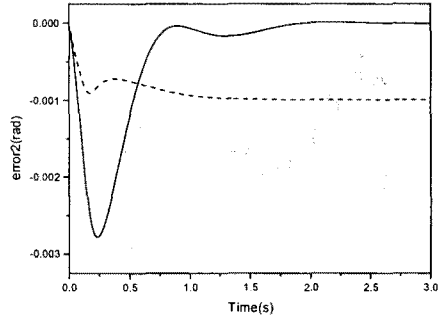


그림 3. 제안된 방식(실선)과 적분항을 포함하지 않는 제어 방식(점선)에 의한 위치차  $q_2$ 의 추종오차와 토크

제안된 기법을 적용하기 위한 실험은 MMC(Multi Motion Control) 보드가 장착된 5 링크 2 자유도 FARA 로봇 매니퓰레이터를 PC에서 제어하도록 구성하였다. 안전을 고려하여  $q_1$ 과  $q_2$ 의 초기값을 각각  $\pi/2$ 와  $\pi$ 로 설정하여 실험에서 사용하는 기준 궤적은 다음과 같이 정하였다.

$$q_{a1}(t) = 0.2(1 - e^{-5t}(1+5t)) + \pi/2$$

$$q_{a2}(t) = 0.2(1 - e^{-5t}(1+5t)) + \pi$$

실제 파라미터들은 컴퓨터 시뮬레이션에서 사용된 값 그대로 사용하였다. 제안된 기법을 적용한 실험 결과를 그림 4와 그림 5에 나타내었는데 시뮬레이션의 결과와 마찬가지로 초기에 약간의 오버슈트가 발생하였지만 정상상태에서의 추종오차가 개선되었음을 확인할 수 있다. 실험 결과로부터 제안된 기법을 부하변동에 의한 파라미터 불확실성을 가지는 실용 로봇에 적용될 수 있음을 확

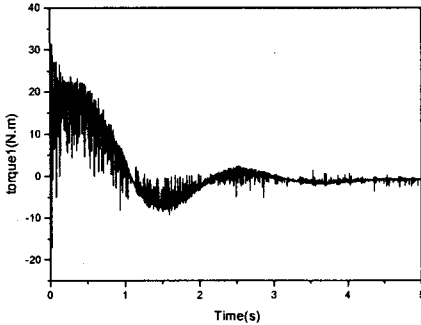
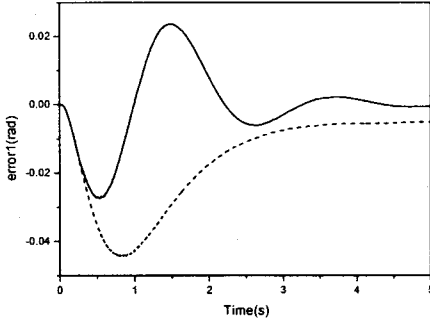
인하였다.

#### 4. 결 론

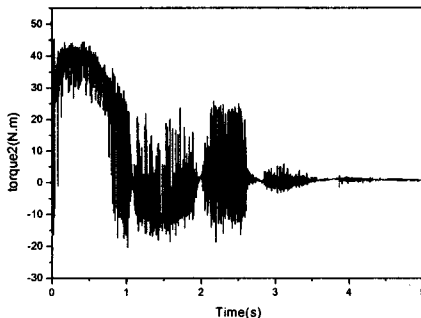
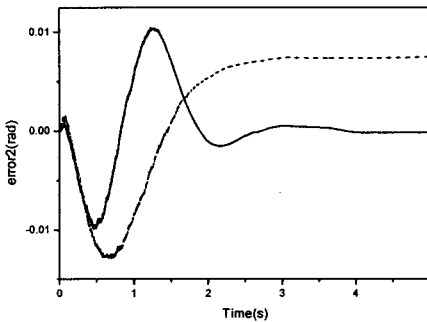
본 논문에서는 파라미터 불확실성이 유한한 로봇 매니퓰레이터에 대한 비선형 강인 제어기법을 제안하였다. 파라미터의 불확실성에 의해 발생하는 정상 상태 오차를 개선시키기 위하여 오차 관련 함수에 추종오차의 적분항을 추가시키고 제어입력이 적분작용을 하도록 하였다. 설계된 제어시스템의 수렴성은 Lyapunov 기법에 의하여 해석하였다. 제안된 기법을 5 링크 2 자유도의 FARA 로봇에 적용한 컴퓨터 시뮬레이션 및 실험을 통하여 제어성능을 확인하였다. 시뮬레이션 결과 제안된 기법은 파라미터 불확실성을 가지는 경우에도 정상상태 오차를 0 가까이 줄일 수 있음을 보였으며, 실험에서도 같은 결과를 얻었기 때문에 제안된 기법이 부하변동이 있는 실용 로봇제어에 적용될 수 있음을 보였다.

#### [참 고 문 헌]

- [1] H. G. Sage, M. D. Mathelin, and E. Ostertag, "Robust control of robot manipulators: a survey," *Int. J. Control*, vol. 72, no. 16, pp. 1498-1522, 1999.
- [2] M. Corless and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundness for uncertain dynamic systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. AC-26, pp. 1139-1144, 1981.
- [3] M. W. Spong, "On the robust control of robot manipulators," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 37, no. 11, pp. 1782-1786, 1992.
- [4] H. K. Khalil, "Universal Integral controllers for minimum-phase nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 45, no. 3, pp. 490-494, 2000.
- [5] M. W. Spong and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, New York: John Wiley, 1989.



[그림4] 제안된 방식(실선)과 적분항을 포함하지 않는 제어 방식(점선)에 의한 위치각  $q_1$ 의 추종오차와 토그



[그림5] 제안된 방식(실선)과 적분항을 포함하지 않는 제어 방식(점선)에 의한 위치각  $q_2$ 의 추종오차와 토그