

여유자유도 로봇의 동적특성을 고려한 최적 제어에 관한 연구

이보현*, 이기성
홍익대학교 전기정보제어공학과

A Study on the Optimal Control Considering Dynamic Characteristics of Redundant Manipulators

Bohyun Lee*, Keeseong Lee.
Dept. of Electrical & Control Eng., Hong Ik Univ.

Abstract - A new control method for a redundant manipulator is developed using a local optimal torque and null space joint velocity. By solving the dynamic control equations of the system, the local optimal torque is obtained. If only the local optimal torque is used for controlling the robot, there is a possibility that the system is unstable. To eliminate the characteristics of instability during the movements, the control law with a null space concept is used. The new method is applied to the 3-DOF planar manipulator. The simulation results show the effectiveness of the proposed algorithm.

1. 서 론

로봇 작업에 대하여 필요한 자유도보다 많은 자유도를 가지는 로봇을 여유자유도 로봇이라 한다. 여유자유도의 역기구학은 일반 로봇과 달리 하나의 로봇 핸드 좌표에 대해 무수히 많은 관절 좌표 해를 가질 수 있다. 이러한 해들 중에 하나의 해를 선택하는 문제를 여유자유도 결정(Redundancy Resolution)이라 하는데 가장 많이 쓰이는 방법이 자코비안 행렬의 pseudo-inverse 또는 generalized inverse를 이용하는 방법이다. 로봇 동적 제어는 computed torque control이 가장 많이 쓰이고 [1], 자코비안 행렬의 영공간(null space) 벡터를 관절 속도에 추가하는 방법으로 매니퓰레이터의 여유자유도를 특이형상(singularity) 회피[2], 구동 토크의 최소화[3], 장애물 회피[4] 등에 이용할 수 있다. 또한, Generalized inverse나 pseudo-inverse를 사용하는 제어에서는 관절속도나 가속도의 급격한 증가로 인해 시스템이 불안정해질 수 있음이 알려졌다[5].

본 논문에서는 관절 토크를 유도하기 위한 동적제어식을 구성하고, 만족하는 관절토크 해들 중에 국소적으로 토크의 크기를 최적화 하는 최적토크제어를 제안하였다. 로봇 핸드 자코비안-관성 역행렬의 영공간에서 나타나는 영공간 관절속도가 로봇 시스템을 불안정하게 할 수 있다는 문제를 해결하기 위하여 영공간 관절 속도를 제거하기 위한 토크를 유도, 이러한 토크를 추가하는 방법을 제안하였다. 3-자유도의 평면형 로봇에 대하여 모의 실험을 수행하고, 그 결과를 분석하여 제안된 방법의 우수성을 입증한다.

2. 본 론

2.1 동적제어식 구성

n 개의 자유도를 갖는 로봇 매니퓰레이터의 동역학방

정식은 다음과 같이 표시된다.

$$M(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = \tau \quad (1)$$

여기서, $q \in R^n$ 는 관절 좌표계 벡터, $\tau \in R^n$ 은 input generalized force, $M(q) \in R^{n \times n}$ 는 inertia 행렬, $n(q, \dot{q}) \in R^n$ 는 코리올리력, 원심력과 중력을 포함하는 벡터이다. 위치와 방위를 표현하는 태스크 공간 벡터를 $x \in R^m$ 로 표기하면, 태스크 공간 속도벡터 \dot{x} 와 관절공간 속도 벡터 \dot{q} 의 관계는 다음과 같이 매니퓰레이터 자코비안 행렬로 표시된다.

$$\dot{x} = J(q)\dot{q} \quad (2)$$

또한, 태스크 공간에서의 가속도 벡터와 관절 공간에서의 가속도 벡터는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$\ddot{x} = J(q)\ddot{q} + \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} \quad (3)$$

식 (1)에 되먹임선형화와 디커플링 기법을 적용하고, 입력토크를 결정하기 위해 식 (1)과 (3)을 이용하여 관절입력토크와 핸드 가속도의 관계를 나타내는 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{x} = J(q)M^{-1}(q)[\tau - n(q, \dot{q})] + \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} \quad (4)$$

관절입력토크에 관한 식으로 정리하고, 다음 식을 만족하도록 입력토크를 결정한다.

$$J(q)M^{-1}(q)\tau = v_E - \dot{J}(q, \dot{q})\dot{q} + J(q)M^{-1}(q)n(q, \dot{q}) \quad (5)$$

여기서, $v_E \in R^m$ 항은 아직 결정되지 않은 시스템의 새로운 입력이다. 식 (4)와 (5)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{x} = v_E \quad (6)$$

식 (6)은 m 개의 결합되지 않은 이중적분기시스템으로, 선형적이고 디커플된 새로운 시스템이다. $v_E \in R^m$ 는 선형 2차 시스템을 제어하도록 다음과 같이 설계할 수 있다.

$$v_E = -K_v\dot{x} - K_p x + r_E \quad (7)$$

여기서, $K_p \in R^{m \times m}$ 와 $K_v \in R^{m \times m}$ 는 각각 대각요소가 위치이득과 속도이득인 대각행렬이다.

결과적으로 페루프시스템은 선형시스템으로 다음과 같이 된다.

$$\ddot{x} + K_v \dot{x} + K_p x = r_E \quad (8)$$

이제 원하는 핸드 궤적 $t \rightarrow (x^d(t), \dot{x}^d(t), \ddot{x}^d(t))$ 가 주어질 때, 기준 입력 $r_E(t) \in R^m$ 를 다음과 같이 하면,

$$r_E(t) = \ddot{x}^d(t) + K_v \dot{x}^d(t) + K_p x^d(t) \quad (9)$$

핸드 추종오차 $e_E := x_d - x$ 는 다음을 만족한다.

$$\ddot{e}_E(t) + K_v \dot{e}_E(t) + K_p e_E(t) = 0 \quad (10)$$

식 (10)은 속도오차이득과 위치오차이득을 적절한 값으로 선택하면, 로봇 핸드의 위치에너지와 속도에너지를 0으로 만들 수 있음을 보여준다. 또한, 로봇 핸드의 위치오차나 속도오차가 서로간에 디커플링되어 한 쪽의 오차가 다른 쪽의 오차에 영향을 주지 않는다. 이제 남은 문제는 식(5)를 만족하는 입력토크를 구하는 것이다. 편의를 위해 $\Gamma(q)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\Gamma(q) := J(q)M^{-1}(q) \quad (11)$$

식 (5)와 (7), 그리고 식 (9)를 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Gamma(q)\tau &= \ddot{x}^* \\ \ddot{x}^* &:= \ddot{x}_d + [\Gamma(q)n(q, \dot{q}) - J(q, \dot{q})\dot{q}] \\ &+ [K_v \dot{e}_E + K_p e_E] \end{aligned} \quad (12)$$

식 (12)를 살펴보면, 가상적인 가속도 \ddot{x}^* 는 세 가지 종류의 항으로 구성되어 있음을 알 수 있다. 첫 번째 항은 로봇 핸드의 가속도이고, 두 번째 항은 로봇 기구학과 동역학에서 나타나는 비선형성이 로봇 핸드에 미치는 영향을 나타내는 항이다. 그리고, 마지막 세 번째 항은 속도오차와 위치오차를 제거하기 위해서 도입된 PD(Proportional and Differential) 되먹임항이다.

식 (12)를 동적제어식이라고 부르기로 하자. 동적제어식 (12)를 만족시키는 토크는 식 (10)에 의해 로봇 핸드의 추종오차를 0으로 만들고, 여러 동역학을 디커플링시킬 수 있다.

2.2 최적토크제어

여유자유도 로봇 ($\Gamma(q) \in R^{m \times n}$, $\tau \in R^n$, $\ddot{x}^* \in R^m$, $n > m$)의 경우, 여유자유도로 인해 일반적으로 식 (12)를 만족하는 관절토크 τ 는 그 해가 무수히 많다. 동적제어식 (12)를 만족하는 τ 를 구하기 위해서, Γ 의 의사 역행렬(Pseudo-inverse) $\Gamma^\#$ 을 이용하여 일반적인 선형방정식의 최소자승해(Least-Squares Solution)를 구하는 방법(6)을 동적제어식 (12)에 적용하여 최소크기의 관절토크 해를 구하자. 동적 제어식 (12)를 만족하는 최소자승해 τ_s 는 다음과 같이 주어진다.

$$\tau_s = \Gamma^\#(q)\ddot{x}^* + [I_n - \Gamma^\#(q)\Gamma(q)]\tau_n \quad (13)$$

식 (13)에서 $\tau_n \in R^n$ 은 임의의 벡터이다. 이러한 해들 중에 가장 작은 토크 크기를 가지는 최소토크 해 τ_s^* 는 다음과 같이 결정된다.

$$\tau_s^* = \Gamma^\#(q)\ddot{x}^* \quad (14)$$

식 (12)를 (13)에 대입하여 정리하면, \ddot{x}_d 로 주어지는 로봇 핸드 궤적에 대해 최소자승해의 특성을 갖는 다음과 같은 토크제어식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_s &= \Gamma^\#(q)\ddot{x}_d + \Gamma^\#(q)[\Gamma(q)n(q, \dot{q}) - J(q, \dot{q})\dot{q}] \\ &+ \Gamma^\#(q)[k_v \dot{e}_E + k_p e_E] + [I_n - \Gamma^\#(q)\Gamma(q)]\tau_n \end{aligned} \quad (15)$$

이러한 최소자승해들 중에 가장 작은 토크 크기를 갖는 최적토크제어는 다음과 같이 결정된다.

$$\begin{aligned} \tau_s^* &= \Gamma^\#(q)\ddot{x}_d + \Gamma^\#(q)[\Gamma(q)n(q, \dot{q}) - J(q, \dot{q})\dot{q}] \\ &+ \Gamma^\#(q)[k_v \dot{e}_E + k_p e_E] \end{aligned} \quad (16)$$

2.3 영공간 운동에너지를 고려한 최적토크제어

임의의 행렬 $A \in R^{m \times n}$ 에 대해 영공간(Null Space) $N(A)$ 는 다음에 나오는 식과 같이 정의할 수 있다.

$$N(A) := \{x \in R^n : Ax = 0\} \quad (17)$$

여유자유도 로봇의 경우, 일반적으로 자코비안 행렬의 영공간을 여유공간(Redundant Space)이라 하고, 이 여유공간의 차원을 여유자유도(Degree of Redundancy)라고 한다(6). 임의의 관절속도 \dot{q} 를 다음과 같이 두 개의 항으로 분해할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \dot{q}_e + \dot{q}_n \\ \dot{q}_n &:= [I_n - \Gamma^\# \Gamma] \dot{q} \\ \dot{q}_e &:= [\Gamma^\# \Gamma] \dot{q} \end{aligned} \quad (18)$$

위 식에서 $\dot{q}_e^T \dot{q}_n = 0$ 이므로, 서로 수직이라 할 수 있다. 또한, \dot{q}_n 는 행렬 Γ 의 영공간에 속하므로, 행렬 Γ 에 대한 영공간 관절속도라고 정의하자. 임의의 벡터 $\ddot{x}^* \in R^m$ 에 대해 식 (14)로 주어지는 최적토크와 영공간 관절속도 \dot{q}_n 는 다음의 성질을 만족한다.

$$\dot{q}_n^T \tau_s^* = \dot{q}_n^T [I_n - \Gamma^\# \Gamma]^T \Gamma^\# \ddot{x}^* = 0 \quad (19)$$

식 (19)의 의미를 로봇 시스템 운동에너지의 관점에서 살펴보면, 로봇 시스템 운동에너지의 변화율은 다음과 같은 관계를 갖는다(7).

$$\dot{K} = \dot{q}^T [\tau - g(q)] \quad (20)$$

여기서, 로봇을 관절 값에 따라 위치에너지가 변화하지 않는 수평형 매니플레이터라고 가정한다. 이러한 경우, $g(q) = 0$ 이 되고, 다음 식이 성립한다.

$$\dot{K} = \dot{q}^T \tau \quad (21)$$

이제, 임의의 시각 t_0 에서 로봇 시스템의 관절속도가 영공간 관절속도 성분인 경우, 최적토크를 사용하여 로봇 시스템을 제어한다고 가정하자. 이러한 가정 하에 식 (21)을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{K}(t)|_{\dot{q} = \dot{q}_n} = \dot{q}_n^T(t) \tau_s^*(t) = 0 \quad (22)$$

다시 말해, 다음 식이 성립한다.

$$K(t) |_{\dot{q}_i = \dot{q}_i} = K(t_0) |_{\dot{q}_i = \dot{q}_i}, t \geq t_0 \quad (23)$$

위 식은 영공간 관절속도에 의한 로봇의 에너지가 시작 t_0 이후에서도 t_0 에서의 로봇 에너지 값을 유지하게 됨을 의미한다. 달리 표현하면, 최적토크로는 영공간 관절속도에 의한 로봇 에너지를 변화시킬 수 없다는 의미이다. 위 운동에너지 식 중에서 \dot{q}_n 에 의해서만 표시되는 부분을 영공간 관절속도에 의한 운동에너지 Ks 라 정의하고, 다음과 같은 식으로 표현하자.

$$Ks := K(t) |_{\dot{q}_i = \dot{q}_i} = 1/2 \dot{q}_n^T M(q) \dot{q}_n \quad (24)$$

어떠한 원인으로 인해 영공간 관절속도에 의한 로봇 에너지 Ks 가 일단 증가하게 되면 식 (16)으로 계산되는 최소크기토크로는 그 값을 감소시킬 수가 없다. 이러한 성질은 로봇 시스템의 안정성을 해치는 결과를 초래할 수 있다. 이러한 영공간 관절속도에 영향을 미치기 위해서는 최적토크제어식 (16)대신 식 (15)로 표시되는 일반 해를 사용해야 한다. 식 (15)의 τ_n 을 다음과 같은 식으로 결정하면, 영공간 관절속도를 제거할 수 있다.

$$\tau_n = -k_n M(q) \dot{q}_n \quad (25)$$

$$\text{위 식에서 } \frac{\partial Ks}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_n} [1/2 \dot{q}_n^T M(q) \dot{q}_n] = M(q) \dot{q}_n$$

이 성립하므로, τ_n 은 영공간 관절속도에 의한 운동에너지를 가장 빨리 줄이는 방향의 벡터임을 알 수 있다. 위 식에서 k_n 은 0보다 큰 상수이며 k_n 의 크기는 영공간 관절속도에 의한 운동에너지 억제 성능과 밀접한 관련이 있다. 토크제어식 (15)와 식 (25)로부터 얻어지는 제어 식은 다음과 같이 표시된다.

$$\tau_s = \Gamma^*(q) \ddot{x}_d + \Gamma^*(q) [\Gamma(q) \dot{n}(q, \dot{q}) - j(q, \dot{q}) \dot{q}] + \Gamma^*(q) [k_v \dot{e}_E + k_p e_E] - k_n [I_n - \Gamma^* \Gamma] M(q) \dot{q}_n \quad (26)$$

$[I_n - \Gamma^* \Gamma]^T [I_n - \Gamma^* \Gamma] = [I_n - \Gamma^* \Gamma]$ 임을 이용하고, 식 (22)와 (25)를 적용하면 영공간 관절속도에 의한 로봇 에너지는 다음과 같은 특성을 갖음을 유도할 수 있다.

$$\dot{K} |_{\dot{q}_i = \dot{q}_i} = -k_n \dot{q}_n^T M(q) \dot{q}_n < 0 \quad \forall \dot{q}_n \neq 0 \quad (27)$$

다시 말해, 시간에 따라 영공간 관절속도는 0으로 근접해 간다. 그러나, 식 (25)를 적용할 경우 토크의 최적성을 상실하게 되므로 최적토크제어라고 할 수 없다.

$$k_n = k_0, \quad Ks > Ks_1$$

$$k_n = \frac{k_0}{Ks_1 - Ks_0} (Ks - Ks_0), \quad Ks_0 < Ks \leq Ks_1 \quad (28)$$

$$k_n = 0, \quad Ks \leq Ks_0$$

이를 보완하기 위해 k_n 의 값을 가능한 한 0으로 유지시키는 방법을 제안한다. 영공간 관절속도에 의한 운동 에너지 Ks 가 적절히 결정된 값 Ks_0 보다 작을 때는 k_n 의 값을 0으로 적용하고, Ks_0 보다 클 때만 0이 아닌 k_n 의 값을 적용하도록 하자. 즉, k_n 의 값을 식 (28) 또는 그림 1과 같이 변화시킨다. 식 (28)에서 k_0 는 $Ks = Ks_1$ 일 때, 적용되는 값으로 적절한 값을 선택해야 한다. Ks 값이 Ks_0 와 Ks_1 사이일 때는 k_n 의 값을 선형으로 변화시킨다. 식 (23)과 (28)을 결합하면, 영공간 관절속도에

의한 운동에너지가 일정 값 이상으로 증가하는 것을 막을 수 있으며, 이를 통해 로봇 시스템을 안정화 할 수 있다. 또한, 영공간 관절속도에 의한 운동에너지가 일정 값 Ks_0 이하인 경우에는 토크의 최적성을 잃지 않으므로, 안정화된 최적토크제어라고 말할 수 있다.

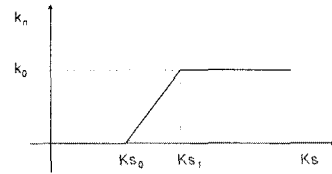


그림 1. 영공간 운동에너지를 고려한 kn값의 변화

3. 모의 실험

본 장에서는 제안된 최적토크제어식 (16)의 효과를 모의 실험을 통하여 검증하고, 그 결과를 분석한다. 모의 실험에 사용될 로봇은 3자유도를 갖는 수평형 로봇이며, 그림 2에서 L_i 는 링크 길이, L_{ci} 는 무게중심까지의 거리, m_i 는 무게중심에서의 질량, I_i 는 무게중심에서의 관성질량을 나타낸다.

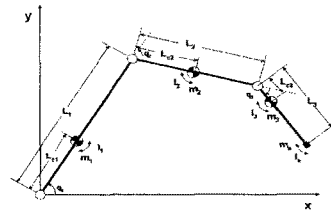


그림 2. 3-자유도 평면 로봇의 동역학 모델

3.1 모의 실험1: 최적토크제어를 이용한 직선운동

출발점 [0.4 0.3]m에서 목표점 [0.4 -0.3]m까지의 직선 운동을 목표로 한다. 운동시간은 0.7 초이며 속도 프로파일은 사다리꼴로 주어진다. 최고속도는 1 m/sec이며 가속, 감속 시간은 각각 0.1 초로 주어진다. PD 되먹임에 사용된 제어 이득은 $k_p = 40000$, $k_v = 400$ 이다. 영공간 속도 제어를 위한 토크 항은 포함되지 않았다. 각축 최대토크의 크기는 다음과 같이 가정한다.

$$\tau_{max}^T = [200 \ 50 \ 10] \text{ N} \cdot \text{m}$$

동역학모델은 Matlab의 ode45 함수를 이용하여 모

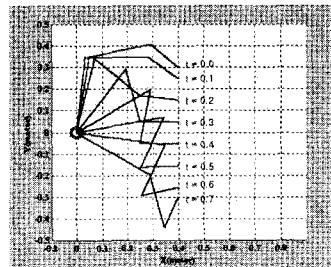


그림 3. 로봇 궤적 - 모의 실험1

의 실험하였으며, 제어주기는 1 msec이다. 그림 3에서 로봇 핸드의 동작은 0초와 0.1초 사이는 가속도 운동, 0.1초와 0.6초 사이는 등속운동, 0.6초와 0.7초 사이는 감속운동을 하는 것을 볼 수 있다. 또한, 3축 관절 값이 0.1초와 0.2초 사이에 음의 값에서 0을 지나 양의 값으로 부호가 반전되며 운동방향이 바뀔을 알 수 있다.

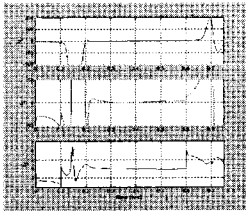


그림 4. 관절토크 프로파일 - 모의 실험1

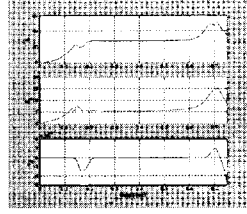


그림 5. 운동에너지와 위치 오차-모의 실험1

그림 4의 토크 크기를 보면, 가속운동이 끝난 0.1초와 0.2초 사이에 1축과 2축 토크가 최대 값으로 동작하는 것을 볼 수 있다. 이러한 최대 토크가 실제 로봇에 나타난다면, 로봇 시스템은 불안정해질 수 있기 때문에 좋지 않은 결과이다. 이러한 현상이 나타나는 이유는 3축의 관절값이 0을 지남에 따라, 로봇의 관절 자유도가 3에서 2로 감소하는 것과 밀접한 관련이 있다. 가속운동이 끝나고 등속운동이 시작되어 3축의 관절 값이 심하게 변하는 이유는 최적토크제어의 경우 영공간 관절속도가 전혀 제어되고 있지 않기 때문이다. 그림 5에서 볼 수 있듯이 영공간 관절속도에 의한 운동에너지 K_n 이 운동 시작 시각부터 0.1초 이후까지 꾸준히 증가함을 알 수 있다. 이러한 현상은 식 (26)을 이용한 최적토크제어 안정화 방법을 이용하여 개선시킬 수 있다.

3.2 모의 실험2: 영공간 운동에너지를 고려한 최적 토크제어

모의 실험2에서는 상수 값으로 결정된 $k_n = 20$ 을 식 (28)에 적용하여 변화시켰을 때의 결과는 2.3절에서도 설명했듯이 가능한 한 k_n 의 값을 0으로 유지할 수 있도록 하여 토크의 최적성을 좀 더 유지시키기 위한 방법이다. $K_{S_0} = 1, K_{S_1} = 2, k_0 = 20$ 을 식 (28)에 적용하여 k_n 의

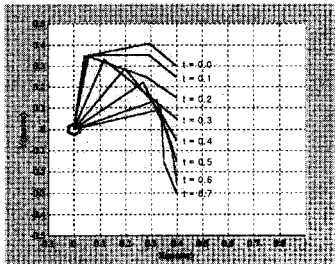


그림 6. 로봇 궤적 - 모의 실험2

값을 변화시키면, 그림 6은 0.0초와 0.6초 사이에 3축 관절값의 부호가 한 번 바뀌고, 다시 0.6초와 0.7초 사이에 부호가 한 번 더 바뀌는 것을 볼 수 있다. 영공간 관절속도에 의한 운동에너지가 $K_{S_0} = 1$ 이 아닌 경우는 $k_n = 0$ 이 되어 영공간 관절속도가 유지되므로, 이러한 부호 바뀔 현상이 발생한 것이다.

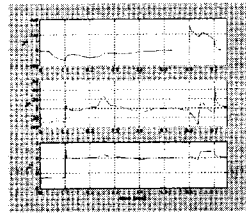


그림 7. 관절토크 프로파일 - 모의 실험2

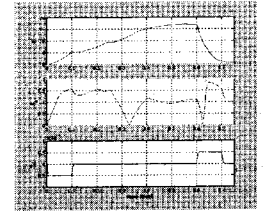


그림 8. 운동에너지와 위치 오차 - 모의 실험2

그림 7을 보면, 토크 프로파일이 좀 더 복잡한 모양으로 변함을 알 수 있는데, 이러한 결과 역시 영공간 관절속도에 의한 운동에너지가 $K_{S_0} = 1$ 이 아닌 경우는 $k_n = 0$ 이 되어 영공간 관절속도가 유지되고, $K_S > K_{S_1}$ 인 경우 $k_n = k_0 = 20$ 이 되어 영공간 관절속도 제거 토크가 강력히 작용하며, $K_{S_0} < K_S \leq K_{S_1}$ 인 경우, k_n 의 값은 0과 20사이에서 선형적으로 변화하도록 했기 때문이다. 그림 8은 에너지의 크기가 1과 2사이에서 변함을 알 수 있다. k_n 의 값은 0과 20사이에서 변화시키는 방법을 사용했기 때문이다.

4. 결 론

본 논문에서는 여유자유도 로봇 핸드의 궤적 추종문제의 해결을 위하여, 관절토크를 유도하기 위한 동적제어식을 구성하였고, 이 식을 만족하는 관절토크 해들 중에 국소적으로 토크의 크기를 최적화 하는 해를 사용하는 최적토크제어를 제안하였다. 로봇 핸드 자코비안-관성 역행렬의 영공간에서 나타나는 영공간 관절속도를 정의하고 영공간 관절속도가 최적토크제어에서는 로봇 시스템을 불안정하게 할 수 있다는 것을 보였고, 이 문제를 해결하기 위하여 영공간 관절 속도를 제거하기 위한 토크를 유도하였으며, 최적토크제어식에 이러한 토크를 추가하는 방법을 제안하였다. 3-자유도의 평면형 로봇에 대하여 모의 실험을 수행하고, 그 결과를 분석하여 제안된 방법의 우수성을 보였다.

(참 고 문 헌)

- [1] J. Y. S. Luh, "Conventional controller design for industrial robots-A tutorial", IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol. SMC-13, 1983.
- [2] T. Yoshigawa, "Manipulability and redundancy control of robotic mechanisms", Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, pp. 1004-1009, 1985.
- [3] S. Ma and D. Nenchev, "Local torque minimization for redundant manipulators: a correct formulation", Robotica, v. 14, pp. 235-9, 1996.
- [4] K. Doty, C. Melchiorri, C. Bonivento, "A theory of generalized inverses applied to robotics", Int. J. Robot. Res., v. 12, pp. 1-19, 1993.
- [5] T. H. Chen, F. T. Cheng, Y. Y. Sun, and M. H. Hung, "Torque optimization schemes for kinematically redundant manipulators", J. Robot. Sys. v. 11, pp. 257-269, 1994.
- [6] Y. Nakamura, "Advanced Robotics: Redundancy and Optimization", Addison-Wesley Publishing Co., pp. 41-51, 116-118, 1991.
- [7] F. L. Lewis, C. T. Abdallah and D. M. Dawson, "Control of Robot Manipulators", Macmillan Publishing Co., pp. 88-90, 1993.