

빠른 도달 속도를 가지는 PI형 가변구조 제어

° 신승민, 전경한, 전해진, 최봉열

* 경북대학교 전자공학과 (Tel: 053-940-8853; Fax: 053-959-7336)

** 경북대학교 전자전기컴퓨터학부 (Tel: 053-940-8853; Fax: 053-959-7336)

PI-type Variable Structure Control with High Speed Reaching Mode

° Seung-Min Shin, Kyung-Han Jun, Hae-Jin Jun, Bong-Yeol Choi

* Department of Electronics, Kyungpook National University

** School of Electrical Engineering and Computer Science, Kyungpook National University

E-mail: jukpani@hanmail.net

Abstract - In this paper, we present the new PI-type VSC(variable structure control). In general, conventional VSCs with a discontinuous reaching law have a chattering problem, and with a PI-type reaching law have a slow reaching speed characteristic. To solve this problem, we propose the reaching law consists of a discontinuous and a PI-type reaching law to obtain a high speed reaching mode and a non-chattering characteristic at the same time. Simulation results show the effectiveness of a proposed scheme.

1. 서 론

제어 시스템의 설계에 있어서 실제 제어 대상에는 대부분 모델링되지 않은 불확실성과 비선형성이 존재하므로 원하는 성능을 얻음과 동시에 불확실성에 대해서도 견실한 제어를 설계하는 것 역시 중요한 과제이다. 이렇게 원하는 제어 성능을 가지면서 불확실성에도 견실한 제어기 설계의 방법으로 적응 제어(adaptive control)와 가변구조 제어(VSC: variable structure control) 등에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있으며, 그 중 가변구조 제어는 모터, 항공기, 로봇 매니퓰레이터 등 많은 제어 분야에서 응용되고 있다(1).

가변구조 제어는 슬라이딩 평면(sliding surface) 상에서 시스템의 구조를 임의로 변화시켜 슬라이딩 운동(sliding motion)이라는 특이한 동특성을 얻는 제어 방식이다. 이러한 가변구조 제어의 동특성은 도달 모드(reaching mode)와 슬라이딩 모드(sliding mode)로 나누어지며, 슬라이딩 모드 동안에는 시스템의 매개변수 변화와 외란 등의 불확실성에 강인한 특성을 가지면서 빠른 응답을 얻을 수 있는 장점을 가진다(2)-(3). 그러나 Gao 등이 제안한 불연속 제어 입력에는 슬라이딩 모드 동안에 빠른 스위칭이 발생하는데(4), 실제 시스템에는 히스테리시스 특성이 나타나 빠른 스위칭 입력을 구현하기 어렵고 그 입력의 크기도 크므로 소비되는 에너지의 양도 커지게 된다. 또한 불연속 제어 입력은 슬라이딩 모드에서의 채터링(chattering)이라는 원치 않는 떨림 현상을 발생시키는 단점이 있으며, 채터링에 의해 모델링 과정에서 무시되었던 시스템의 고주파 동특성이 여기 되어 시스템의 진동을 일으킬 수 있다. 이와 같은 채터링 문제를 해결하기 위한 연구로 도달 법칙(reaching law)에 대한 다양한 연구가 이루어져 왔다(1),(4),(5).

채터링 문제를 해결하기 위한 방법으로 Slotine 등은

불연속 릴레이 형태의 스위치 대신 슬라이딩 평면을 중심으로 유계층(boundary layer)을 설정하여 이 영역 안에서는 연속 제어 입력을 가함으로써 고주파 채터링을 감소시키는 효과를 얻을 수 있었으나 모델링되지 않은 동특성에 의한 저주파 진동과 정상 상태 오차를 발생시킨다는 문제점이 제기 되었다(6). 전경한 등은 PI형 도달 법칙을 사용하여 불연속 제어 입력에 의한 채터링 현상과 Slotine 등이 제안한 도달 법칙의 단점인 정상상태 오차를 개선시켰으나 PI형 도달 법칙은 불연속 제어 입력을 사용하는 경우보다 수렴 속도가 늦어지는 단점이 있다(7).

본 논문에서는 전환 계수를 사용하여 불연속 제어 입력을 사용한 도달 법칙과 PI형 도달 법칙을 함께 사용하는 방법을 제안한다. 즉, 초기 상태가 상대적으로 슬라이딩 평면에서 먼 거리에 있을 때는 Gao 등이 제안한 불연속 제어 입력을 사용하여 도달 속도를 빠르게 하고 평면으로 가까이 갈수록 점점 PI형 도달 법칙으로 전환한다. 그리고 지정된 유계층 내부에서는 PI형 도달 법칙만을 사용하여 채터링과 정상 상태 오차를 줄인다. 즉, 제안하는 방법은 Gao 등이 제안한 불연속 입력에 의한 도달 법칙과 PI형 도달 법칙의 장점을 조합하여 슬라이딩 평면으로의 도달 속도가 빠르면서도 슬라이딩 모드에서는 채터링이 없는 장점을 가진다. 제안하는 도달 법칙의 타당성을 입증하기 위해 경비행기의 선형화된 모델에 대해 모의 실험을 하였으며, Gao 등이 제안한 도달 법칙과 PI형 도달 법칙과 비교를 한 후 결론을 맺는다.

2. 가변구조 제어

가변구조 제어는 크게 임의의 초기치로부터 설계한 슬라이딩 평면에 도달하기까지의 도달 모드와 평면에 도달한 후 슬라이딩 평면을 따라 위상 평면(phase plane) 상의 원점을 향해 움직이는 슬라이딩 모드의 두 구간으로 나뉘어져 있다. 슬라이딩 모드 동안에는 시스템의 차수가 감소하고 시스템의 상태를 슬라이딩 평면으로 제한시켜 시스템의 매개변수 변화나 외부 잡음에 영향을 받지 않고 빠른 응답 특성과 견실성을 가진다. 그러나 슬라이딩 평면 부근에서 시스템의 상태는 Gao 등이 제안한 도달 법칙을 사용할 경우 불연속 입력으로 인해 심한 채터링 현상이 발생한다. 본 장에서는 기존에 알려진 선형 슬라이딩 평면을 이용해 가변구조 제어기를 설계하는 방법을 알아본다.

2.1 일반적인 가변구조 제어

다음과 같은 상태 방정식으로 표현되는 선형 시불변 단일 입력 시스템을 고려하자.

$$\dot{x} = Ax + B(u + d) \quad (1)$$

여기서 $x \in R^n$ 는 상태 벡터, $A \in R^{n \times n}$ 는 선형 공칭 시스템 행렬, $B \in R^{n \times 1}$ 는 이득 행렬이다. $u \in R$ 는 스칼라 제어 입력, B 는 완전 차수(full rank)를 가지며 행렬쌍 (A, B) 는 완전 제어 가능(completely controllable) 하고, 표준 정합 조건(matching condition)을 만족하는 불확실성(uncertainty) d 의 크기에 대한 상위 경계치는 다음과 같이 알려져 있다고 가정한다.

$$|d| < d_{\max} \quad (2)$$

다음으로 아래와 같은 선형 슬라이딩 함수를 고려하자.

$$s = Cx \quad (3)$$

여기서 $C \in R^{1 \times n}$ 는 슬라이딩 평면 행렬이다. 슬라이딩 모드에서 시스템의 상태는 아래의 식과 같은 슬라이딩 평면으로 제한된다.

$$s = Cx = 0 \quad (4)$$

슬라이딩 평면에서 슬라이딩 모드를 유지시켜주는 등가 제어 입력은 $\dot{s} = C\dot{x} = 0$ 을 만족하도록 다음과 같이 구한다.

$$u_{eq} = -(CB)^{-1}CAx \quad (5)$$

단 $|CB| \neq 0$ 이다.

슬라이딩 모드 동안 시스템의 동특성은 등가 제어 입력 (5)을 시스템 (1)에 대입한 다음을 만족한다 [1].

$$\dot{x} = [A - B(CB)^{-1}CA]x \quad (6)$$

(6)은 상태 궤환의 형태를 취하고 있으므로 슬라이딩 모드동안 시스템을 안정화하기 위해서는 고유치들이 복소 s 평면의 좌반면에 위치하도록 C 를 선택한다.

2.2 불연속 제어 입력을 사용한 도달 법칙

가변구조 제어는 슬라이딩 모드에서 불확실성에 건설한 특성이 있으므로 도달 시간을 줄이는 제어 법칙 설계가 중요하다. 그러나 기존의 가변구조 제어에서 사용하는 제어 법칙들이 도달 모드에서 동특성을 중요시하지 않았으므로 슬라이딩 모드에서 채터링이 발생하는 문제를 야기시켰다.

Gao 등이 제안한 도달 법칙은 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{s} = -Ks - Qsgn(s) \quad (7)$$

여기서 $sgn(s) = \begin{cases} 1, & \text{if } s > 0 \\ -1, & \text{if } s < 0 \end{cases}$, $K > 0$, $Q > 0$ 이다.

제어 대상 시스템 (1)에 대하여 도달 구간 동안 도달 법칙을 만족하기 위한 제어 입력은 다음과 같다.

$$u = -(CB)^{-1}(CAx + Ks + Qsgn(s)) \quad (8)$$

Gao 등이 제안한 도달 법칙을 이용한 가변구조 제어의 경우 이전의 가변구조 제어에서 고려하지 못했던 도달 구간에서 슬라이딩 함수의 동특성을 결정함으로써

상대적으로 건설성을 개선하였다. 그러나 도달 법칙의 설계시 포함된 불연속항으로 인하여 채터링이 완전히 제거되지 않는다.

2.3 PI형 도달 법칙

기존에 제안된 도달 법칙은 채터링을 발생시키는 불연속항을 포함하고 있는 경우가 대부분이다. 이에 반해 PI형 도달 법칙은 불연속항을 포함하지 않으므로 채터링 문제를 개선할 수 있다[7].

PI형 도달 법칙은 다음과 같다.

$$\dot{s} = -K_P s - K_I \int s dt \quad (9)$$

여기서 $K_P > 0$, $K_I > 0$ 이다.

PI형 도달 법칙은 비례 속도항과 적분항으로 구성되어 있으며 기존의 도달 법칙에 이용된 불연속항을 포함하지 않으므로 채터링 현상을 없앨 수 있다.

(1)의 시스템에 대하여 선형 슬라이딩 함수 (3)을 가지며 PI형 도달 법칙 (9)를 만족하는 제어 입력은 다음과 같다.

$$u = -(CB)^{-1}(CAx + K_P s + K_I \int s dt) \quad (10)$$

PI형 도달 법칙은 선형 시스템의 PI 제어에서와 마찬가지로 K_P , K_I 에 따라서 정상 상태로의 도달 속도와 진동이 trade off 관계가 있으므로 그 도달 속도에는 한계가 있다. 이와 같이 PI형 도달 법칙에는 채터링과 정상 상태 오차를 줄일 수 있는 이점이 있음에도 불구하고 그 도달 속도가 늦다는 단점이 있으므로 다음과 같은 초기 도달 모드에서 불연속 제어 입력을 더하여 도달 속도를 빠르게 하는 도달 법칙을 제안한다.

3. 빠른 도달 속도를 가지는 PI형 가변구조 제어

불연속 제어 입력을 사용한 도달 법칙은 슬라이딩 모드에서 채터링이 발생하는 반면 빠른 도달 속도를 얻을 수 있으며, PI형 도달 법칙은 채터링과 정상 상태 오차를 줄일 수 있는데 반해 불연속 제어 입력을 사용하는 경우보다 슬라이딩 평면으로의 도달 속도가 늦어지게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 본 논문에서는 초기 도달 구간에서는 Gao 등이 제안한 불연속 제어 입력을 사용하여 슬라이딩 평면으로의 도달 속도를 높이고 슬라이딩 평면으로 갈수록 점차 PI형 도달 법칙을 사용하여 채터링과 정상 상태 오차를 줄이는 다음과 같은 도달 법칙을 제안한다.

$$\dot{s} = a(t)(-Ks - Qsgn(s)) + (1 - a(t))(-K_P s - K_I \int s dt) \quad (11)$$

Gao 등이 제안한 불연속 제어 입력과 PI형 도달 법칙을 결합하며 슬라이딩 평면으로 접근함에 따라 불연속 도달 법칙에서 점차 PI형 도달 법칙으로 전환시켜주는 전환 계수 $a(t)$ 는 다음과 같다[11].

$$a(t) = \tanh(\eta\beta t) \quad (12)$$

여기서 $\eta > 0$, $\epsilon > 0$.

$$\beta(t) = \begin{cases} |s(t)| - \epsilon, & \text{if } 0 < \epsilon < |s(t)| \\ 0, & \text{if } |s(t)| \leq \epsilon \end{cases} \quad (13)$$

이다.

4. 모의 실험

제안한 가변구조 제어기의 타당성을 보이기 위해 경비행기에서 Dutch roll damping을 위한 가변구조 제어기의 설계에 대하여 모의 실험을 행한다. 33 m/s의 속도에서 경비행기의 선형화된 모델은 다음과 같이 주어진다(8).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (14)$$

$$\text{여기서 } \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{r} \\ \dot{\tau} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -0.277 & -32.98 & -5.432 \\ 0.365 & -0.319 & -9.49 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

v 는 sideslip velocity(m/s), r 은 yaw rate (rad/s), τ 는 rubber angle(rad)이며, 제어 입력은 방향타 각도로 다음과 같다.

$$u = \tau_c$$

개루프 시스템에서 Dutch roll mode의 감쇠비는 0.0856인데 슬라이딩 모드에서 Dutch roll mode에 대한 감쇠비를 0.706으로 설정하려고 하면 슬라이딩 평면의 고유치는 다음과 같이 된다.

$$\lambda_1, \lambda_2 = -1.5 \pm 1.5j \quad (15)$$

슬라이딩 모드에서의 동특성이 식 (15)의 고유치를 가지도록 하는 슬라이딩 평면 행렬을 식 (6)에 의해서 구하면 다음과 같다.

$$C = [-0.0028 \quad -0.0237 \quad 0.1] \quad (16)$$

모의 실험은 초기 편차를 $x_0 = [2.0 \ 0.05 \ 0]^T$ 와 같이 두고 Gao 등이 제안한 불연속항을 포함한 도달 법칙, PI형 도달 법칙, 제안하는 빠른 도달 속도를 가지는 PI형 도달 법칙을 공칭 시스템에 대해서 각각 적용하였다. 제어 법칙은 식 (8), (10), (11)을 사용하여 5초간 모의 실험을 하였다. 매개변수 값은 다음과 같다.

표 1. 모의 실험을 위한 매개 변수

Table 1. Parameters for simulation

Gao 등이 제안한 불연속 도달 법칙	PI형 도달 법칙	제안하는 방법
$K = 5$ $Q = 0.05$	$K_P = 10$ $K_I = 0.1$	$K = 5$ $Q = 0.05$ $K_P = 10$ $K_I = 0.1$ $\eta = 1000$ $\epsilon = 0.0001$

모의 실험은 상태 x_1, x_2 는 세 경우의 도달 법칙 모두 비슷한 결과를 가지므로 x_3 만을 나타내었으며, 각 그림에서 (a), (b), (c)는 각각 Gao 등이 제안한 불연속 도달 법칙을 사용한 경우, (b) PI형 도달 법칙을 사용한 경우, (c) 제안한 도달 법칙을 사용한 경우를 나타낸다.

그림 1은 상태 x_3 를 나타낸 것으로 Gao 등이 제안한 불연속 도달 법칙을 사용한 경우 채터링이 나타나지만 PI형 도달 법칙과 제안하는 방법에는 채터링이 나타나지 않음을 알 수 있다.

그림 2는 슬라이딩 함수 s 를 나타낸 것으로 Gao 등이 제안한 불연속 도달 법칙을 사용한 경우 슬라이딩 모드로의 도달 속도는 빠르지만 슬라이딩 평면 근방에서 채터링이 일어나며 PI형 도달 법칙을 사용한 경우 채터링은 없으나 슬라이딩 평면으로의 도달 속도가 느림을 알 수 있다. 제안한 도달 법칙을 사용한 경우 도달 속도가 PI형 도달 법칙보다 빠르며 채터링이 일어나지 않는 것을 확인할 수 있다.

그림 3은 각 도달 법칙에 대한 제어 입력을 나타낸다. Gao 등이 제안한 불연속 도달 법칙을 사용한 경우 채터링이 일어나고 있으며, PI형 도달 법칙과 제안한 방법에서는 채터링이 일어나지 않음을 알 수 있다.

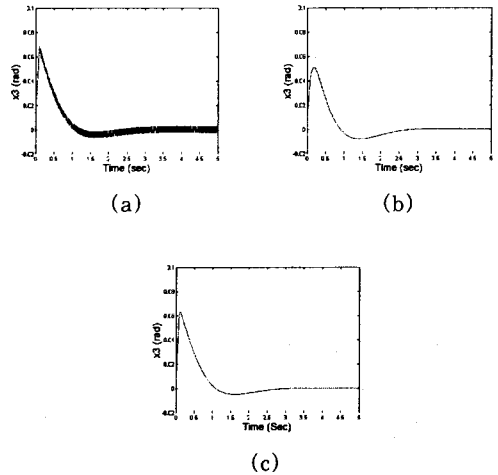
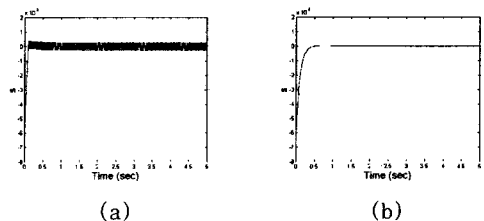


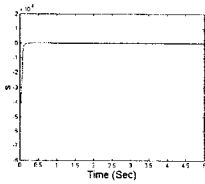
그림 1. 상태 x_3 .

(a) Gao 등이 제안한 불연속 도달 법칙을 사용한 경우, (b) PI형 도달 법칙을 사용한 경우, (c) 제안한 도달 법칙을 사용한 경우.

Fig. 1. State x_3

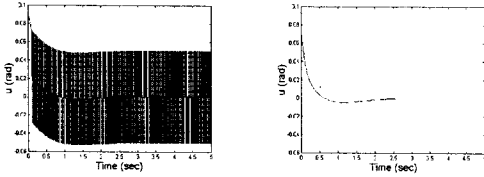
(a) Using Gao's reaching law, (b) Using PI-type reaching law, (c) Using Proposed reaching law





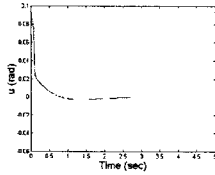
(c)

그림 2. 슬라이딩 함수 s .
Fig. 2. Sliding function s



(a)

(b)



(c)

그림 3. 제어 입력 u .
Fig. 3. Control input u

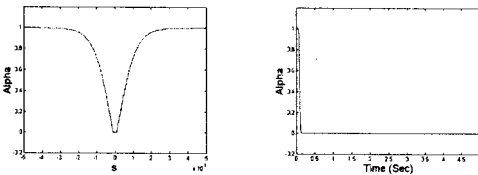


그림 4. s vs $\alpha(t)$.
Fig. 4. s vs $\alpha(t)$

그림 5. 시간 vs $\alpha(t)$.
Fig. 5. Time vs $\alpha(t)$

5. 결 론

본 논문에서는 Gao 등이 제안한 불연속 도달 법칙과 PI형 도달 법칙을 결합하여 채터링이 없고 슬라이딩 모드로의 도달 속도가 빠른 도달 법칙을 제안하였다. 일반적인 가변구조 제어에서 불연속 제어 입력에 의한 채터링을 없애기 위해 제안된 PI형 도달 법칙은 그 수렴 속도가 불연속 제어 입력만을 사용하는 경우보다 늦어지는 단점이 있다. 본 논문에서는 초기 도달 구간에서는 Gao 등이 제안한 불연속 제어 입력을 사용하여 슬라이딩 평면으로의 도달 속도를 높이고 슬라이딩 평면으로 갈수록 점차 PI형 도달 법칙을 사용하여 채터링과 정상 상태 오차를 줄이는 도달 법칙을 제안한다.

제안한 방식의 타당성을 경비행기의 선형화된 모델에 적용한 모의 실험을 통하여 확인하였다. 모의 실험 결과 제안한 방법은 PI형 도달 법칙의 장점인 채터링이 없는 특성을 보였으며 슬라이딩 평면으로의 도달 속도가 향상

됨을 확인할 수 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, "Variable structure control: a survey," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 40, no. 1, pp. 2-20, Feb., 1993.
- [2] V. I. Utkin, "Variable structure system with sliding modes," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 22, no. 2, pp. 212-222, 1977.
- [3] O. M. E. El-Ghezawi, A. S. I. Zinober, and S. A. Billings, "Analysis and design of variable structure systems using a geometric approach," *Int. J. Contr.*, vol. 38, no. 3, pp. 657-671, 1983.
- [4] W. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control of nonlinear systems: a new approach," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 40, no. 1, Feb. 1993.
- [5] R. B. Fernandez and J. K. Hedrick, "Control of multivariable nonlinear systems by the sliding mode method," *Int. J. Contr.*, vol. 46, no. 3, pp. 1019-1040, 1987.
- [6] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc., 1991.
- [7] 전경한, 이연정, 최봉열, "PI 형 도달법칙을 가지는 가변구조 제어," *제어·자동화·시스템공학 논문지*, 제3권, 제3호, pp. 214-218, 6월 1997.
- [8] 김길수, 전경한, 최봉열, "PI 타입 도달 법칙을 가지는 가변구조 제어," *Proceedings of the 11th KACC*, pp. 387-390, 9월 1996.
- [9] S. K. Spurgeon, "Choice of discontinuous control component for robust sliding mode performance," *Int. J. Contr.*, vol. 53, no. 1, pp. 163-179, 1991.
- [10] L. K. Wong, F. H. F. Leung, and P. K. S. Tam, "A fuzzy sliding controller for nonlinear systems," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 48, no. 1, Feb 2001.
- [11] W. A. Bedwani and O. M. Ismail, "Genetic optimization of variable structure PID control system," *ACS/IEEE Int'l. Conf. Computer System and Applications*, 2001.