

웨이블릿 변환영역 사인 알고리즘의 설계

이용수
한양대학교 전기공학과

Design of the Wavelet Transform Domain Sign Algorithm

Yong-Soo Lee
Dept. of Electrical Eng., Hanyang University

Abstract - This Paper presents the establishment of the wavelet transform domain sign algorithm and performance analysis by using wavelet filter such as multiplier-free QMF which don't require multiple computation.

1. 서론

LMS 알고리즘의 계산상의 효율성에도 불구하고 응용에 따라서는 추가적인 단순화가 필요한 경우가 있다. 사인 알고리즘은 이러한 단순화 방법의 하나로 계수 갱신 방정식의 오차 값에 부호 연산자를 취함으로써 얻어진다. 이 경우 만약 값을 2의 음의 멱승으로 할 경우 사인 알고리즘의 계수 갱신방정식에서의 곱셈 연산을 단순한 시프트로써 구현할 수 있기 때문에 복잡도를 많이 줄일 수 있다. 사인 알고리즘은 LMS 알고리즘과 비교할 경우 Gradient의 noisy estimate를 사용하기 때문에 일반적으로 수렴율이 떨어지고 정상상태 오차가 증가되고 LMS 알고리즘과 마찬가지로 입력신호가 유색화 되었을 경우, 수렴속도가 느려진다는 단점이 있다. 본 논문에서는 이러한 문제들을 해결하기 위하여 먼저 웨이블릿 다해상도 직교변환행렬을 설계하고, 설계된 변환과 채널에 따른 전력정규화를 통한 적응단계를 적용하여 자기상관행렬의 고유치분포를 감소시켜 기존의 사인 알고리즘에 대해서 성능이 향상됨을 보여준다.

2. 본론

2.1 웨이블릿 변환

2.1.1 이산 웨이블릿 변환

이산화된 연속시간 웨이블릿 변환은 컴퓨터 상에서 CWT를 계산할 수 있게 해주지만, 실제로 이것은 매우 redundant하다. 이 redundancy를 해결할 수 있게 해주는 것이 이산 웨이블릿 변환(DWT)이다. $x(t)$ 가 square integrable 함수이면 이것은 하나의 웨이블릿 $\psi(w)$ 의 scale을 팽창시키고 이동시킴으로써 구성되는 square integrable 기저함수의 집합으로 분할될 수 있다. 즉,

$$x(t) = \sum_{j,k} 2^{-j/2} x_{j,k} \psi(2^{-j}t - k) \quad (1)$$

여기서,

$$\phi(t) = 2 \sum_{k=0}^N h_0(k) \phi(2t - k) \quad (2)$$

$$\hat{\phi}(w) = \prod_{j=1}^{\infty} H_0\left(\frac{w}{2^j}\right) \quad (3)$$

이다. H_0 (Lowpass)와 H_1 (Highpass)은 식(4)와 같이 주어지는 2밴드 FIR PR-QMF뱅크 조건을 만족해야 한다. 즉,

$$\begin{aligned} G_0(z)H_0(z) + G_1(z)H_1(z) &= 2 \\ G_0(z)H_0(-z) + G_1(z)H_1(-z) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, H 는 해석필터이고 G 는 합성필터이다.

실제로 이 이산 웨이블릿 변환은 옥타브밴드 웨이블릿 필터뱅크로서 계산된다(그림1). 웨이블릿 변환은 시간 및 주파수에 대하여 국부성을 가지며, 비정상상태의 신호를 해석하는데 유용하다. 웨이블릿 변환은 주어진 시간함수를 실수의 2차원 평면 $L^2(R)$ 에서 직교기저함수들의 집합을 형성하고 있는 웨이블릿 평면으로 투사하여 서로 다른 분해능을 갖는 신호들을 변환시킴으로써 주어진 시간함수의 신호를 각각 다른 분해능에서 해석할 수 있는 변환이다. 웨이블릿 변환에서의 기저함수들은 원형(mother) 웨이블릿을 천이 및 확장/수축을 시킴으로써 만들어진다.

2.1.2 웨이블릿 변환영역 사인 알고리즘을 위한 Multiplier-free PR-QMF선택

Multiplier-free 필터 알고리즘들은 계산상 효율성이 좋으며 단지 다음과 같은 계수값을 갖는다.

$$h(n) = \pm 2^{k_n} \pm 1 \quad n=0, 1, 2, \dots, 2N-1 \quad (5)$$

k_n 은 정수이며 이 Multiplier-free suboptimal 해는 orthonormality와 AR(.95) source를 위한 energy compaction의 기준에 기초를 둔다. Multiplier-free suboptimal paraunitary low-pass PR-QMF의 계수들의 예는 [표 1]과 같다.

2.1.3 웨이블릿 변환행렬의 설계

실질적으로 일반적인 유한의 지속시간을 갖는 신호나 Tapped-Delay-Line(TDL)형태의 적응 필터에 웨이블릿 변환을 적용하기 위해서는 주어진 신호의 유한의 N-point segment들을 다루어야 한다. 따라서, $(N \times 1)$ 크기로 들어오는 신호에 대한 $(N \times N)$ 웨이블릿 변환행렬을 구성해 주어야 한다. 이 변환행렬을 구하기 위해

서는 (그림1)의 해석부분 각 단계마다 상응하는 변환행렬을 정의하고 이들을 결합하여 최종적인 변환행렬을 구성해야 한다. 여기에서 각 변환행렬은 필터링과 down sampling을 나타내는 circulant 형태의 부블럭들로 구성된다. k 단계에서 이런 구조를 갖는 저역 및 고역 통과 필터를 $H_i^{(k)}$ 라 하면(저역: $i=0$, 고역 $i=1$) 이들을 결합하여 다음과 같이 해석뱅크를 정의할 수 있다. 즉

$$D_k = \begin{bmatrix} H_0^{(k)} \\ H_1^{(k)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 N 은 필터의 길이, $H_i^{(k)} \in (\frac{N}{2}) \times (\frac{N}{2^{k-1}})$ 와

$D_k \in (2^{\log_2(N)-k+1}) \times (2^{\log_2(N)-k+1})$ 는 circulant 구조를 갖는 행렬이다. D_k 는 입력 신호를 두개의 대역으로 분할된다. 만약 k 단계까지 분해가 가능하다고 한다면, 각 단계에서의 변환행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$W_1 = D_1, W_2 = \begin{bmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \dots W_k = \begin{bmatrix} D_k & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서, $D_k \in (2^{\log_2(N)-k+1}) \times (2^{\log_2(N)-k+1})$

$I_k \in (N-2^{\log_2(N)-k+1}) \times (N-2^{\log_2(N)-k+1})$ 이다.

이것은 전단계에서 얻어진 저역밴드 부분은 계속 대역 분할 해주고 고역부분은 남겨 둬으로써 시간-주파수 해상도가 조절되고 동시에 주파수 영역에서 옥타브밴드 트리를 구성함을 의미한다.

(7)식에서의 변환행렬을 사용하면 입력신호 벡터 $x(n) = [x(n), \dots, x(n-N+1)]^T$ 의 다해상도 계수를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$Wx = W_\beta(W_{\beta-1}(\dots(W_2(W_1x)\dots))) \quad (8)$$

여기서 W 이 구하고자 하는 웨이블릿 변환행렬이 된다. $W \in (N \times N)$ 이고 $N=2^j$ 이면, $\alpha=2^m$ 을 필터의 길이 N 보다 크거나 같은 2의 배수라고 정의하였을 경우에 변환 행렬의 가능 분해 단계는

$$\beta = j - m + 1 \quad (9)$$

가 된다.

2.2 웨이블릿 변환영역 사인 알고리즘

LMS의 경우와 마찬가지로 사인 알고리즘도 역시 입력 자기상관행렬 R_{xx} 의 고유치 분포 ($\lambda_{\max}/\lambda_{\min}$)에 수렴 속도가 영향을 받는다. 이 종속성은 앞서 설계한 웨이블릿 변환을 입력 $x(n)$ 에 적용함으로써 상당히 줄일 수가 있다. 즉

$$z(n) = Wx(n) \quad (10)$$

여기서 W 는 웨이블릿 변환행렬이다. 시간 n 에서의 가중치 벡터를 $h(n)$ 이라 할 때 필터 출력은

$$y(n) = h^T(n)x(n) \quad (11)$$

이다. 또한 시간 n 에서 이상응답 $d(n)$ 과 적응필터의 출력간의 차인 출력오차 $e(n)$ 은

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (12)$$

이다.

여기서 사인 알고리즘은 평균자승오차(MSE)를 추정하기 위해서 순시오차자승 ($\hat{\xi}(n) = e^2(n)$)을 사용하는 대신 순시오차절대치를 오차기준으로 사용한다. 즉,

$$\hat{\xi}(n) = 2|e(n)| \quad (13)$$

그러므로 gradient estimate는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \nabla \hat{\xi}(n) &= 2[\nabla e(n)]sgn[e(n)] \\ &= -2z(n)sgn[e(n)] \end{aligned} \quad (14)$$

여기서

$$sgn[e(n)] \equiv \begin{cases} 1, & e(n) > 0 \\ 0, & e(n) = 0 \\ -1, & e(n) < 0 \end{cases} \quad (15)$$

(14)식의 gradient estimate를 (16)식의 steepest-decent 알고리즘에 치환하면 (17)식과 같은 변환된 신호에 대한 사인 알고리즘을 얻는다.

$$h(n+1) = h(n) - \frac{\mu}{2} \nabla \hat{\xi}(n) \quad (16)$$

$$h(n+1) = h(n) + \mu z(n)sgn[e(n)] \quad (17)$$

여기서 error surface contour를 hyperspherical로 만들어 주려면 다음의 전력정규화과정을 계수갱신방정식에 포함시켜야 한다.

$$h(n+1) = h(n) + \mu \Lambda^{-2} z(n)sgn[e(n)] \quad (18)$$

여기서,

$$\Lambda^2 \equiv \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2] \quad (19)$$

$$\sigma_i^2(n) = \alpha \sigma_i^2(n-1) + |z_i(n)|^2 \quad (20)$$

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \sqrt{\frac{\pi E(k)}{2}} \quad (21)$$

위 (18)식이 우리가 얻고자 하는 웨이블릿 변환영역 사인알고리즘의 계수 갱신방정식이 된다.

2.3 모의실험 결과

적용필터 응용의 한 예인 시스템 식별에서의 모의 실험을 통하여 제안된 알고리즘의 성능을 비교, 분석하고 검증하였다. 모델 시스템과 적용필터의 차수는 각각 12와 16으로 설정함으로써 모델 시스템 추정시에 충분한 여유를 가질 수 있도록 하였다. 입력은 백색잡음을 -0.8에 극점을 갖는 단일극 AR 과정으로 표현되는 시스템의 출력으로 설정하였다. 적용필터 계수들은 각 모의실험에서 영으로 초기화하고 망가지수 α 는 0.9로 설정하였고 μ 값은 보통 사인 알고리즘의 단순화를 위해 주로 사용되는 2의 음의 멱승을 택했고, 측정시 포함되는 잡음은 AWGN으로 하였으며, SNR은 20dB 인 측정 잡음의 경우를 설정하였다. 웨이블릿변환을 위해 multiplier-free QMF 웨이블릿 필터를 사용하였고 16×16 의 크기를 갖는 옥타브 트리구조의 웨이블릿 변환행렬을 구성한 다음 이를 적용해서 성능을 검증하였다. (그림 2)는 제안된 알고리즘에 대한 학습곡선을 보여주고 있다. 그림에서 보듯이 제안된 알고리즘은 기존 알고리즘에 대해 수렴율에 있어서 더 우수한 성능을 보이고

동시에 NLMS에 근접한 성능을 나타낸다.

3. 결 론

본 논문에서는 기존의 사인 알고리즘에 웨이블릿 변환을 이용한 웨이블릿 변환영역 사인 알고리즘을 제안하고, 이를 실제적으로 변환행렬을 설계해서 적응필터에 적용해서 성능의 향상을 비교, 검토해 보았다. 이론적인 검증과 모의 실험결과를 통해서 제안된 알고리즘은 기존의 사인 알고리즘에 대해서 연산량을 많이 증가시키지 않고 NLMS에 근접한 수렴율을 나타내는 것을 확인하였다.

(참 고 문 헌)

- [1] V.J Mathews, and S. H. Cho. "Improved convergence analysis of stochastic gradient adaptive filters using the sign algorithm." IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-35, pp 450-454 April 1987
- [2] S. Narayan, etc. "Transform domain LMS algorithm." IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. ASSP-31, no. 3, June 1983
- [3] J.C. Lee and C.K. Un. "performance of Transform domain LMS adaptive Digital Filters." IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-34, No. 3, pp. 499-510, June 1986.
- [4] Multiresolution Signal Decomposition. (transforms, subbands, wavelets) Ali H. Akansu and Richard A. Ha
- [5] J.C. Lee and C.K. Un. "performance of Transform-Domain LMS Adaptive Digital Filters." IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Proc., vol. ASSP-34, No.3, pp. 499-510, June 1986.

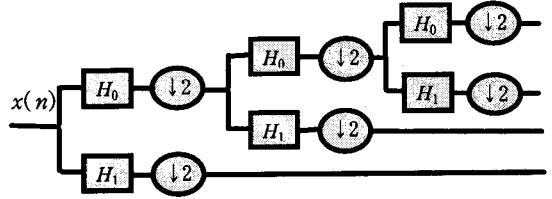


그림 1. 3 단계 옥타브밴드 트리 구조

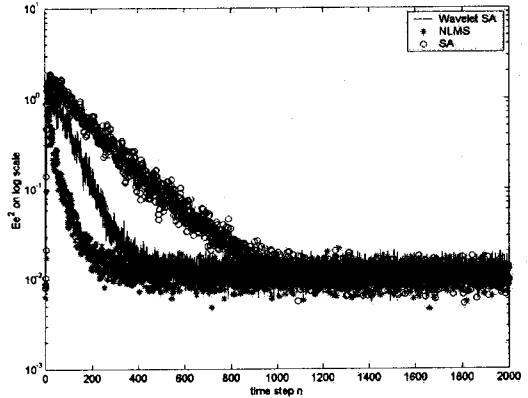


그림 2. 제안된 알고리즘에 대한 학습곡선 비교

n	h(n)			
	10 tap	8 tap	6 tap	4 tap
0	-1	-8	4	2
1	-3	8	16	6
2	9	64	16	3
3	33	64	0	-1
4	32	8	-4	
5	4	-8	1	
6	-9	1		
7	1	1		
8	3			
9	-1			

표 1. multiplier-free PR-QMF의 계수 예들