



## 저마하수 예조건화 기법을 위한 다중격자 DADI 기법

Multigrid DADI Method For Low Mach Number Preconditioning Method

성춘호<sup>1)\*</sup>, 권장혁<sup>2)</sup>, 최윤호<sup>3)</sup>, 이승수<sup>4)</sup>

Chun-ho Sung, Jang Hyuk Kwon, Yoon-Ho Choi, Seung-Soo Lee

A multigrid DADI method for low Mach number preconditioning method is presented. The eigenvalues of governing equations are modified by A low Mach number preconditioner developed by Choi & Merkle, and it results in an accurate solution and fast convergence in the low Mach number region. The convergence of numerical method is further accelerated by multigrid method. The efficient and accuracy of present method is shown by comparison with conventional solution method for the compressible flows.

### 1. 서 론

전산유체역학의 해석 기법들이 압축성 유동의 해석에 집중하는 밀도 기반의 기법[1]들과 비압축성 가정으로 출발하는 압력 기반의 기법[2]으로 오랜 시간동안 나뉘어 연구되어 왔다. 1980년대 이후부터 하나의 수치 기법으로 모든 영역을 해석하고자 하는 시도들이 꾸준히 있어 왔으며 일반적인 압력 기반의 수치 기법으로 압축성 영역을 해석할 수 있는 기법들이 많이 연구된 바 있다[2].

일반적인 압축성 유동장의 해석기법들은 저마하수 유동장 해석에 적용할 경우 많은 문제점을 나타낸다. 즉, 지배방정식의 고유치가 심하게 분산되는 문제로부터 계산 과정에 있어서의 수렴성 문제가 대두되기도 하고, 수렴된 해의 정확성에 있어서도 많은 문제점을 나타낸다. 이러한 문제점은 마하수가 0 으로 접근함에 따라 지배방정식의 고유치들의 크기가 분산되는 문제에서 기인하는 것으로 알려져 있다[3-5].

압축성 유동 해석 기법을 비압축성 영역에 성공적으로 적용하기 위해서는 이러한 고유치 크기의 분산에 의한 수치적 불안정성을 극복하여야 한다. Choi 와 Merkle[3] 은 Chorin[6] 이 사용한 artificial compressibility 기법이 일종의 예조건자의 역할을 수행한다는 점에 착안하여 저마하수 영역에서 안정성을 유지할 수 있는 예조건화 기법을 개발하여 점성, 비점성 영역에서의 다양한 유동 현상을 성공적으로 해석한 바 있다.

본 연구에서는 저마하수 예조건화 기법을 도입하여 저속의 영역에서부터 천음속 영역까지를 모두 해석할 수 있는 수치 기법을 개발하고 이 기법의 수렴성을 가속화 하기 위하여 다중격자기법과 DADI 기법을 적용하였다. 이러한 다중격자 DADI 기법은 예조건화가 적용되지 않은 압축성 유동의 해석 기법에서 우수한 성능을 나타낸바 있다[7].

개발된 수치 기법의 수렴성과 정확성을 검증하기 위하여 2차원 날개단면 주위의 비점성 아음속 및 천음속 영역의 다양한 유동장을 해석하고 그 결과를 일반적인 압축성 유동 해석 코드와 비교하였다.

### 2. 지배 방정식 및 예조건화

#### 2.1 지배 방정식

일반적인 2차원 압축성 Euler 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

- 1) 한국과학기술연구원
- 2) 한국과학기술연구원
- 3) 국방과학연구소
- 4) 국방과학연구소



$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

여기서 유동 변수 벡터와 비점성 유속 벡터는 다음과 같이 정의된다.

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad f_i = \begin{pmatrix} \rho u_i \\ \rho u_1 u_i + \delta_{i1} p \\ \rho u_2 u_i + \delta_{i2} p \\ \rho H u_i \end{pmatrix} \tag{2}$$

이 때,  $\rho, u_i, p, E, H, T$  는 각각 밀도,  $x_i$  축 방향의 속도성분, 압력, 총에너지, 총엔탈피 및 온도를 나타낸다. 이상기체에서 총에너지 및 총엔탈피는 다음과 같다.

$$E = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2}(u_i u_i), \quad H = E + \frac{p}{\rho} \tag{3}$$

$\gamma$  는 비열비를 나타내며 완전 기체(perfect gas)의 경우 1.4로 고정시킨다. 계산의 편의를 위하여 지배방정식을 직교좌표계에서 일반좌표계로 변환할 수 있다. 이 때 계산영역에서의 일반 좌표계  $(\xi_1, \xi_2)$  은 다음과 같이 정의된다.

$$K_{ij} = \left[ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right], \quad J = \det(K), \quad S_{ij} = \frac{K_{ij}}{J} \tag{4}$$

이름 이용하면 계산 영역에서의 지배방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} = 0 \tag{5}$$

여기서

$$Q = \frac{q}{J}, \quad F_i = S_{ij} f_j \tag{6}$$

로 정의된다.

## 2.2 예조건화 기법

이상의 2차원 Euler 방정식의 고유치는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} U \\ U \\ U+c \\ U-c \end{pmatrix} \tag{7}$$

여기서  $U$  는 contravariant 속도를 의미하고  $c$  는 음속을 의미한다. 따라서 이상의 고유치들은 유속의 속도가 0 으로 접근하는 저마하수 영역에서 고유치  $U$  가 0 으로 수렴하여 고유치의 최소 절대값과 최대 절대값의 비로 표현되는 조건수가 무한대로 발산하게 된다. 이러한 조건수의 발산은 수치기법의 수렴성과 안정성에 부정적인 영향을 미치게 된다.

본 연구에서는 고유치 조건수의 발산을 막기 위하여 예조건화 행렬을 도입하여 고유치를 보정하는 Choi & Merkle 의 예조건화 기법을 적용하였다. Choi & Merkle 은 지배 방정식의 거동을 이론적으로 해석하여 다음과 같은 예조건화 기법을 제안하였다[3]. 이를 이용하면 2차원 예조건화 Euler 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Gamma_p \frac{\partial Q_p}{\partial \tau} + \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = 0 \tag{8}$$

여기서  $\Gamma_p$  는 예조건자이고  $Q_p$  는 원시변수 벡터를 의미한다. 이 때, 예조건자 행렬과 원시변수 벡터를 자세히 쓰면 다음과 같다[3,5].

$$Q_p = \begin{pmatrix} p \\ u_1 \\ u_2 \\ T \end{pmatrix}, \quad \Gamma_p = \begin{pmatrix} \rho_p' & 0 & 0 & \rho_T' \\ u_1 \rho_p' & \rho & 0 & u_1 \rho_T' \\ u_2 \rho_p' & 0 & \rho & u_2 \rho_T' \\ h_0 \rho_p' - (1 - \rho h_p) & \rho u_1 & \rho u_2 & h_0 \rho_T' + \rho h_T \end{pmatrix} \quad (9)$$

이상의 예조건화 행렬은 두 개 매개변수  $\rho_p'$ 와  $\rho_T'$ 를 가지며, 이들이 일반적인 값 (각각  $\rho_p$ 와  $\rho_T$ )을 가질 때 원래의 Euler 방정식으로 되돌아가게 된다.  $\rho_p'$  은 지배방정식이 저마하수 영역에서 안정되게 하기 위하여 속도의 제곱의 역수  $1/V^2$ 에 비례하게 선택하게 되고, 두 번째 매개변수는  $\rho_T' = \delta \rho_T$ 로 정의된다. 여기서  $\delta$  는 1 혹은 0 의 값을 가지게되며 0 인 경우 원래의 Choi & Merkle 시스템이 되며,  $\delta = 1$  일 때 Weiss와 Smith에 의해 제시된 변형된 형태이다[5]. 본 연구에서는 Weiss 와 Smith 에 의한 변형된 예조건자를 적용하였다.

이러한 예조건화 방정식에서의 고유치 행렬을 다음과 같이 쓸 수 있다[3,5].

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} U & & & \\ & U & & \\ & & \frac{1}{2} [U(1+M_p^2) + \sqrt{U^2(1-M_p^2)^2 + 4M_p^2 c^2}] & \\ & & \frac{1}{2} [U(1+M_p^2) + \sqrt{U^2(1-M_p^2)^2 - 4M_p^2 c^2}] & \end{pmatrix} \quad (10)$$

여기서  $M_p$  는 매개 변수를 이용하여 계산된 마하수를 의미한다. 이러한 예조건화 시스템의 고유치의 조건수는 마하수가 0 으로 수렴할 때 약 2.6 정도로 초기의 지배방정식과 비교하면 안정한 거동을 나타내게 된다.

예조건화 기법을 적용하여 저마하수 영역을 해석하는 경우에 있어서도 마하수가 극히 작은 영역에서는 수치적 문제점이 발생할 수 있다. 마하수가 극히 작아지는 영역에서는 유동장 전체의 압력 변화가 매우 작아진다. 경우에 따라서는 이러한 압력 변화가 컴퓨터의 기계 오차 수준에 머물러 있게 되어 일반적인 절대압력을 방정식의 변수를 사용할 경우 압력의 변화량이 기계적인 오차 영역으로 인하여 희석되는 문제가 발생할 수 있다. 이러한 문제점을 방지하기 위하여 여기서는 절대압력  $p$  대신에 압력을 기준 압력  $p_0$  와 측정 압력(gauge pressure)  $P_1$  으로 표현하여 방정식의 변수를 측정 압력으로 선택하는 방법을 사용하였다[5].

### 3. 수치 해석 기법

#### 3.1 공간 이산화 기법

식 (5) 의 지배 방정식을 공간 이산화 하기 위하여 격자 중심 유한 체적법을 사용하였다. 공간 이산화된 지배 방정식은 식(11) 과 같이 각 격자 중심에서 정의되는 유동 변수 및 잔류치에 대한 연계된 상미분 방정식의 형태로 표현된다[8].

$$\frac{dQ_{ij}}{dt} + R_{ij} = 0 \quad (11)$$

여기서  $R$  은 잔류치 벡터를 의미한다. 이 때, 잔류치 벡터는 다음과 같이 쓸 수 있다.



$$R_{i,j} = (F_1)_{i+1/2} - (F_1)_{i-1/2} + (F_2)_{j+1/2} - (F_2)_{j-1/2} \quad (12)$$

여기서 1/2 는 각각의 격자 경계면에서 계산된 수치 유속을 의미한다.

일반적으로 점성항이 크고 유속의 속도가 저속인 경우 상류 차분법을 적용하지 않고도 해를 얻을 수 있으나 비점성 유동이나 점성항의 영향이 적은 경우 저마하수 유동장에서도 적절한 상류차분법이 필요하게 된다.

본 연구에서는 예조건화가 되지 않은 수치 기법에서는 Roe 의 FDS 기법[1]을 적용하였으며 예조건화를 적용한 경우 Roe 의 FDS 기법과 유사한 형태의 상류차분법을 적용하였다. 저마하수 유동에서 Roe 의 FDS 기법을 그대로 적용할 경우에 대한 연구는 자세히 알려진 바가 없으나 Riemann 문제를 기반으로한 Roe 의 평균값이 저마하수 영역에서는 불필요하게 복잡하고 때에 따라서는 수치해를 왜곡할 수 있다는 것을 예상할 수 있다. 여기서는 예조건화 행렬을 고려하여 새로운 유속 Jacobian 행렬을 유도하고 이로부터 고유치의 방향에 따라 상류차분을 수행하는 flux-vector splitting(FVS) 형태의 상류차분법을 적용하였다. 유한 체적법의 경우 Roe 의 평균치 및 고유치 보정 등의 영향을 제외하면 FVS 와 FDS 는 동일한 형태를 나타낸다.

일반적인 유한 체적법에서 FVS 혹은 FDS 형태의 상류 차분법을 사용할 경우 격자 경계면에서의 수치 유속은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{F}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[F_L + F_R - |A|(Q_R - Q_L)] \quad (13)$$

여기서 하첨자 R, L 은 각각 우측 및 좌측의 격자 중심 값을 의미하며 유속 Jacobian 행렬 A 의 절댓치는 다음과 같이 정의된다.

$$|A| = M|M|^{-1} \quad (14)$$

이 때 유속 Jacobian 행렬 A를 계산함에 있어 Roe 의 평균치를 사용하면 FDS 기법이 되고 격자 경계면의 평균치나 단순히 보정된 고유치를 사용할 경우 Steger-Warming FVS 및 van Leer FVS 가 된다.

예조건화 된 지배방정식의 경우 예조건화 행렬이 시스템의 고유치를 보정하는 역할을 수행함에 따라 수치 유속을 상류차분하는데 있어서도 이를 고려하는 것이 일반적이다. 따라서 유속 Jacobian 의 고유치 벡터와 고유벡터 행렬을 구하는데 있어 예조건화 행렬을 먼저 적용하고 이후에 예조건화 행렬의 역행렬을 다시 적용하면 예조건화 행렬을 고려한 유속을 계산할 수 있다. 이상의 과정을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$A = \Gamma \Gamma^{-1} A$$

$$\Gamma \Gamma^{-1} A = \Gamma M_{\beta} \Lambda_{\beta} M_{\beta}^{-1} \quad (15)$$

$$\hat{F}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[F_L + F_R - \Gamma \Gamma^{-1} A (Q_R - Q_L)]$$

이상의 수치 유속은 상류 차분을 하는데 있어 보정된 고유치를 이용하므로 예조건화 된 시스템의 특성을 반영한 상류차분을 수행할 수 있어 저마하수 영역의 해석에 있어 더 나은 거동을 보일 것으로 기대할 수 있다. 단순한 상류차분법만을 적용하는 경우 수치 기법의 공간 정확도는 1차가 된다. 이러한 1차 정확도의 수치 기법은 과도한 수치 점성으로 인하여 정확한 유동해를 얻을 수 없어 특별한 고해상도 기법을 도입하여 2차 이상의 정확도를 얻도록 하는 것이 일반적이다. 본 연구에서는 예조건화 기법이 적용되지 않은 일반적인 수치 기법의 경우 2차 upwind TVD 기법[8]을 적용하였으며 예조건화 기법을 적용한 경우에는 van Leer 등에 의하여 제안된 MUSCL(Monotone

Upstream-Centered for Conservation Laws) 기법을 적용하였다. 물론 MUSCL 기법에 있어서도 수치해가 진동하지 않는 조건인 TVD 조건을 고려한 제한자 함수가 포함되지만 upwind TVD 기법과 달리 MUSCL 기법은 반감최항을 사용하지 않고 격자 경계면 좌우측의 격자점 값을 고차로 보정하여 정확도를 향상 시킨다.

MUSCL 방법을 적용한 고차의 이산화오차를 갖는 TVD 방법은 좌우측 격자 경계면의 값을 다음과 같이 수정한다.

$$\begin{aligned} q_{i-1/2}^R &= q_i - \frac{\sigma}{4} [(1+x) \overline{\mathcal{D}}_- + (1-x) \overline{\mathcal{D}}_+] \\ q_{i+1/2}^L &= q_i + \frac{\sigma}{4} [(1-x) \overline{\mathcal{D}}_- + (1+x) \overline{\mathcal{D}}_+] \end{aligned} \quad (16)$$

여기서

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{D}}_+ &= \text{Minmod}(\Delta_+, \beta \Delta_-), \quad \Delta_+ = q_{i+1} - q_i \\ \overline{\mathcal{D}}_- &= \text{Minmod}(\Delta_-, \beta \Delta_+), \quad \Delta_- = q_i - q_{i-1} \end{aligned} \quad (17)$$

$$1 \leq \beta \leq \frac{3-x}{1-x}$$

$$\text{Minmod}(a, b) = \text{sgn}(a) \text{Max}[0, \text{Min}(|a|, \text{sgn}(a)b)]$$

위 식의  $\sigma$  와  $x$  를 조절함으로써 높은 차수의 이산화오차를 가질 수 있다.

$\sigma=0$	1st order scheme
$\sigma=1$ and $x=-1$	fully upwind scheme
$\sigma=1$ and $x=1$	central scheme
$\sigma=1$ and $x=1/3$	3rd order scheme

여기서는 이론적으로 3차 정확도를 가지는 방법을 사용하였다.

MUSCL 기법을 적용함에 있어 고차의 보정을 유속에 할수도 있고 유동 변수에 보정을 수행할 수도 있다. 본 연구에서는 유동 변수를 보정하였으며 보정에 있어서 원시 변수를 보정하고 이로부터 보존 변수를 얻는 방법을 사용하였다.

### 3.2 시간 전진 기법

본 연구에서는 시간 전진에 있어서 Pulliam 등이 제안한 DADI 기법[9]을 적용하였다. 이 방법은 기존의 블록 행렬을 다루는 ADI 기법에 비하여 적은 계산량으로 유사한 성능의 우수한 수렴성을 얻을 수 있는 장점이 있다. 예조조건화를 적용하지 않은 일반적인 암축성 기법에 대한 DADI 기법의 자세한 수식은 참고 문헌 [7,9]에서 찾을 수 있다. 여기서는 예조조건화를 적용하는 경우에 있어서 DADI 기법에 대하여 기술한다.

예조조건화를 사용하는 경우 준이산방정식 (11) 은 다음과 같이 표현된다.

$$\Gamma_{i,j} \frac{dQ_{i,j}}{dt} + R_{i,j} = 0 \quad (18)$$

여기서 표현의 편의를 위하여 유동 변수 Q 의 하첨자 P를 생략하였다. 이 식을 내재적 기법을 사용하여 시간 전진을 수행하는 경우, 잔류치를 시간에 대하여 선형화 하고 이를 계산 영역에서의 좌표계를 따라 근사 인자화 하는 ADI(alternating direction implicit) 방법을 사용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.



$$\Gamma \left( \frac{I}{\Delta t} + A \right) \left( \frac{I}{\Delta t} + B \right) \Delta Q = -R^n \tag{19}$$

여기서 A, B 는 각각  $\xi_1, \xi_2$  방향의 원시 변수에 대한 유속 Jacobian 을 의미한다. 그러나 이 식은 근사 인자화를 수행한 후에도 5개의 0 이 아닌 항을 가지는 블록 penta-diagonal 행렬이 된다. 따라서 이를 다시 삼대각 행렬의 형태로 만들기 위하여 MUSCL 기법이 적용되지 않은 1차 정확도의 상류차분의 수치 유속으로 근사하는 방법을 도입한다. 실제로 좌변의 내재적 연산자 행렬은 수렴된 수치해의 정확도에 영향을 주지 않으므로 이러한 근사가 가능하다.

Pulliam 등은 이러한 블록 행렬 문제를 더욱 간단히 할 수 있는 대각화 기법을 도입하였다. Euler 방정식의 경우 각 계산 격자점에서의 local similarity 가 유지되는 특징이 있어 이러한 대각화 기법은 계산하는 문제의 특징을 변화시키지 않으면서 계산량을 크게 줄일 수 있게 한다. 대각화 기법의 도입을 위하여 유속 Jacobian 행렬을 구성하는 행렬 A를 다음과 같이 대각화 할 수 있다고 가정하자.

$$A = T_i \Lambda_i T_i^{-1} \tag{20}$$

이를 이용하면 식 (19)는 다음과 같이 대각화 된다.

$$\begin{aligned} & \Gamma T_1 \left( \frac{I}{\Delta t} + \nabla^- \Lambda_1^+ + \nabla^+ \Lambda_1^- \right) T_1^{-1} \cdot \\ & T_2 \left( \frac{I}{\Delta t} + \nabla^- \Lambda_2^+ + \nabla^+ \Lambda_2^- \right) T_2^{-1} \cdot \Delta Q = -R^n \end{aligned} \tag{21}$$

여기서  $\nabla^+, \nabla^-$  는 각각 전방 및 후방 차분을 의미하며 내재적 연산자  $\Lambda$  는 다음과 같이 정의된다[6].

$$\Lambda_{\xi, \pm}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( \Lambda_{\xi, \pm}^i \pm \left( \widetilde{\Lambda}_{\xi, \pm} \right)_{i \pm 1/2} \right) \tag{22}$$

이 때  $\widetilde{\Lambda}$  는 상류차분항의 고유치를 의미한다. 이상에서 DADI 식에서 사용된 고유치와 고유벡터 행렬의 자세한 식은 참고문헌 [5]에서 찾을 수 있다.

DADI 기법은 완전한 내재적 기법이나 ADI 기법에 비하여 매우 우수한 효율성을 가진다. 비점성 문제를 해석하는 압축성 Euler 방정식에 적용할 경우 ADI 기법과 유사한 수렴 성능을 가지나 약 70% 의 계산 시간을 단축할 수 있다[7].

### 3.3 경계 조건

지배 방정식의 완전한 수치해를 얻기 위해서는 영역을 이산화 함에 따라 생성되는 계산 영역의 경계에서 물리적인 현상을 표현하는 적절한 경계 조건들이 요구된다. 본 연구에서 사용된 경계 조건은 물체 표면에서의 경계 조건과 계산 영역의 원방 경계에서 사용된 경계 조건으로 이야기 할 수 있다.

원방 경계에서의 경계 조건은 수치해의 수렴성과 안정성에 많은 영향을 준다. 대부분의 압축성 유동 계산은 수렴 과정에서 계산 영역 내부에 많은 파동(wave) 들이 생성되게 되고 이들이 원방 경계에서 어떠한 거동을 나타내는지가 수렴성에 지대한 영향을 미친다. 본 연구에서는 1차원 특성치(characteristic)를 이용한 Riemann 불변치(invariant)에 기반한 경계조건을 사용하였다. Riemann 불변치를 이용한 경계 조건은 마하수가 큰 천음속 혹은 초음속 영역에서 우수한 수렴 특성을 나타내는 반면 저마하수 영역에서는 불변치의 급격한 변화 등의 영향으로 인하여 수렴성이 저하되거나 수치해가 비정상 적으로 거동하는 원인이 된다. 따라서 저마하수 영역을 해석하는데 있어서는 이러한 Riemann 불변치 대신, 압력을 매개변수로 하여 입구에서는 압력을 외삽하고 출구에서는 압력을 원방 경계의 값으로 고정하는 방법을 사용하였다. 특히 마하수가 극히 저속인 경우에는 원방 경계에서 이러한 압력의 변화 또한 무시할만하여 모든 변수를 자유류의 값으로 고정할 수도 있다. 본 연구에

서는 저마하수 영역을 해석하는데에는 압력을 매개 변수로한 원방 경계 조건을 사용하였다.

벽면 경계 조건에서는 속도 벡터의 수직인 방향의 속도가 영이 되도록 주었다. 벽면에서 밀도와 에너지 항은 하나 위의 값으로 외삽하고 압력은 경계값들을 사용해 결정한다.

## 4. 다중 격자 및 국소 시간 간격

### 4.1 국소 시간 간격

시간 전진 기법을 이용한 유동 해석에 있어서 시간 간격의 결정은 수치해의 수렴성 큰 영향을 미친다. 일반적으로 외재적 시간 전진 기법을 사용할 경우 수치 기법이 안정성을 유지할 수 있는 CFL 수가 제한되며 내재적 기법의 경우에도 사용한 근사적 방법에 따라 안정성과 수렴성이 우수한 CFL 수의 한계가 존재하게 된다. 따라서 시간 전진에 사용하는 시간 간격은 이러한 CFL 수의 제한을 고려하여 결정하게 된다.

비정상 유동 해석과 같이 시간에 대한 정확도가 요구되는 계산의 경우 시간 간격이 모든 계산 영역 내부에서 일정하여야 한다. 이와 같이 전 유동영역에 대해 동일한 시간 간격을 적용할 경우, 가장 작은 계산 격자에 의해 시간 간격이 제한받기 때문에 상대적으로 큰 계산 격자에서는 안정 조건보다 훨씬 작은 시간간격을 사용하므로 해의 전파가 매우 느려지고, 수렴성이 저하된다.

정상 상태의 유동 만이 관심사인 경우 각 계산 격자마다 다른 시간 간격을 적용해 허용가능한 최대의 시간 간격을 사용하도록 하는 국소 시간 간격(local time stepping)을 사용할 수 있게된다. 이 때, 주어진 CFL 수에 대하여 허용되는 최대 시간 간격의 크기는 다음과 같은 식으로 쓸 수 있다.

$$\Delta t^* = \frac{CFL}{|U| + |V| + a(\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} + \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2})} \quad (23)$$

이때 U,V는 contravariant 속도이고, a는 음속에 해당한다.

이러한 국소 시간 간격 기법은 간단한 계산만으로 전체 해석의 수렴성을 크게 향상 시킬 수 있다. 또한 이 방법은 단순한 시간 간격의 조절만이 아니라 수치 해석의 강직성을 완화시키는 예조건의 역할을 수행할 수 있어 내재적 기법에서도 크게 효과적이다.

### 4.2 다중 격자 기법

DADI와 같은 내재적 기법은 다중 격자 기법에 필수적인 고주파 감쇠특성을 임의로 조절할 수 있는 계수가 존재하지 않는 단점을 가지고 있다. 본 연구에서는 이러한 문제점을 극복하고 DADI기법에 다중 격자를 적용하기 위하여 고주파 감쇠특성 보다는 오차 전파 속도의 가속화에 주안점을 두고 수정된 톱니 사이클의 다중 격자 기법을 사용하였다.

먼저 다중 격자 기법의 각 단계에서 사용되는 다단계 시간 전진을 여러번의 DADI 시간 전진으로 대체한다. 이는 성근 격자계에서 축성 함수의 영향이 전달될 수 있도록 하기 위함이다. 또한 성근 격자계에서의 계산 시간이 조밀한 격자에 비하여 매우 작은 점에 착안하여 성근 격자계에서는 더 많은 수의 시간 전진을 수행하도록 설계하였다. CFL 수를 정함에 있어서도 수치해의 변화가 적은 성근 격자계에서는 더 큰 CFL수를 적용하여 오차 전파 속도가 극대화 되는 효과를 얻을 수 있도록 하였다. 다중 격자 단계가 L인 격자계에서의 시간 전진 회수 m은 다음과 같다.

$$m = 2L + 1$$

이때의 CFL수는 다음과 같이 계산한다.

$$CFL_L = L \cdot CFL_{fine}$$

이러한 다중 격자 사이클은 고주파 감쇠 특성이 좋지 못한 경우에도 오차 전파 속도를 향상시켜 수



렴성에 좋은 효과를 얻을 수 있다. 여기서 사용한 다중격자기법의 보다 자세한 내용은 참고문헌 [7]에서 찾을 수 있다.

이와 더불어 다중격자기법을 위해 생성된 성근 격자들을 이용하여 빠른 시간내에 안정된 초기값을 찾는 mesh-sequencing 기법을 사용하였다. 이 방법은 수렴성과 안정성이 좋은 성근 격자에서 자유 흐름조건을 이용해 100여번의 반복계산을 통해 얻은 해를 더욱 조밀한 격자로 내삽(interpolation)하여 초기값으로 사용하는 기법이다. 수렴과정의 안정성을 증진시키고 2-3배 정도 큰 시간간격을 사용하여 수렴을 촉진시킬 수 있도록 한다.

## 5. 수치 해석 결과

저마하수 예조건화 기법의 효율성과 정확성을 검증하고 다중 격자의 수렴 가속 효과를 비교하기 위하여 2차원 NACA 0012 날개 주위의 비점성 유동장을 해석하였다. 예조건화 기법의 성능 비교에는 일반적인 압축성 유동의 해석 기법의 결과를 사용하였다. 즉, 동일한 문제를 예조건화 기법을 적용한 경우와 그렇지 않은 경우를 해석하여 계산의 수렴 속도와 정확도를 비교하였다.

사용된 격자계는 129x33 의 O 형 격자계이며 유동 조건은 마하수 0.8, 0.6, 0.3, 0.1, 0.001 에서의 받음각 0 도인 경우와 마하수 0.8 받음각 1.25 인 경우등 6가지 경우에 대하여 해석을 수행하였다.

그림 1 에서 6 은 예조건화 기법을 적용한 경우와 적용하지 않은 경우의 수렴 곡선을 비교한 것이다. 고속 유동장에 해당하는 마하수 0.8 및 0.6 의 경우 일반적인 압축성 유동의 해석 기법이 약간 더 우수한 수렴성을 보이거나 압축성 효과가 거의 사라지는 마하수 0.3 에서는 예조건화 기법을 적용한 경우와 그렇지 않은 경우가 유사한 수렴성을 나타내고 있다. 마하수가 0.1 이하인 경우 예조건화 기법을 적용하지 않는 경우에는 유동장의 수렴성이 정체되거나 매우 느려지는 반면, 예조건화 기법을 적용한 경우에는 우수한 수렴성을 보임을 확인할 수 있다.

그림 7 과 8 은 각각 예조건화를 적용하지 않은 경우와 적용한 경우의 마하수에 따른 수렴 곡선을 도시하였다. 예조건화를 적용하지 않은 경우 마하수가 0 에 가까워 질수록 수렴성이 저하되나 예조건화를 적용하면 천음속 영역을 제외하고는 마하수와 무관하게 우수한 수렴성을 나타낸다.

그림 9에서 12 는 각각 마하수 0.8 과 마하수 0.1 인 경우의 압력 분포 곡선을 도시한 것이다. 실선으로 나타난 등압력 선도는 예조건화 기법을 적용한 것이고 점선으로 표현된 부분은 적용하지 않은 결과이다. 마하수 0.8 의 경우 예조건화 기법의 적용 유무에 상관없이 유사한 결과를 보이고 있으나 0.1 인 경우에는 예조건화 기법을 적용하지 않은 경우 날개 주위에서 비 정상적인 압력 분포를 보이고 있다. 이러한 현상은 날개 표면 압력 분포를 확인하면 더욱 잘 나타난다. 마하수 0.8 의 경우 두가지 수치 기법이 충격파 주위를 제외하고는 거의 동일한 결과를 나타내나, 마하수 0.1 의 경우 예조건화를 적용하지 않은 경우 비물리적인 결과를 나타낸다.

그림 13 과 14 는 마하수 0.8 과 0.1 에서의 다중 격자 기법의 수렴성 향상 효과를 도시한 것이다. 두 경우 모두 약 3 배의 수렴 가속 효과가 있었으며 이는 예조건화를 적용하지 않은 압축성 유동 해석 기법에서의 가속 효과와 유사한 것을 확인할 수 있다[7].

## 6. 결론

본 연구에서는 저마하수 예조건화 기법을 적용하여 저마하수 영역에서부터 천음속 영역까지를 안정적으로 해석할 수 있는 수치 기법을 개발하였다. 또한 수치 기법의 수렴성을 향상시키기 위하여 다중 격자 기법과 DADI 기법을 이용하여 시간 적분을 수행하였다. 개발된 수치 기법을 2차원 비점성 유동장 해석에 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

개발된 수치 기법을 저마하수 영역에 적용한 결과 일반적인 압축성 해석 기법이 수치적 불안정성을 보이고 수렴성이 극히 저하된 반면 현재의 기법은 우수한 수렴성을 유지하는 것을 확인할 수 있었다. 특히 수치해의 정확성면에 있어서는 예조건화를 적용하지 않은 경우 비물리적인 수치해를 보였으나 예조건화를 통하여 이러한 문제점을 극복할 수 있었다. 천음속 영역의 해석에 있어서는 예조건화를 적용한 경우 적용하지 않은 경우에 비하여 느린 수렴성을 보이거나 수치해의 정확도는 충분히





유지하는 것을 확인할 수 있었다.

다중 격자 기법의 수렴 가속 효과를 확인한 결과 예조건화를 적용한 수치해석 기법에서도 예조건화를 사용하지 않은 경우와 마찬가지로 우수한 수렴 가속효과를 얻을 수 있음을 확인하였다.

참고 문헌

- [1] Roe, P.L., "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *J. Comput. Phys.*, 43, pp.357-372, (1981)
- [2] K.C. Karki and S.V. Patankar, "Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations", *AIAA J.*, 27, 1167-1174, (1989)
- [3] Y.-H. Choi and C.L. Merkel, "The Application of Preconditioning in Viscous Flows", *J. Comput. Phys.* 105, pp.207-223, (1993)
- [4] E. Turkel, "Preconditioned Methods for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations", *J. Comput. Phys.* 72, pp.277-298, (1987)

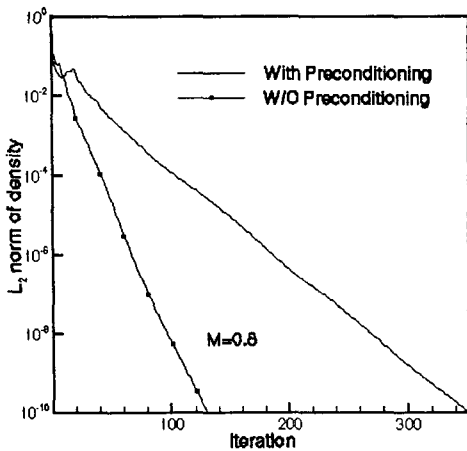


그림 11 M=0.8 의 수렴곡선

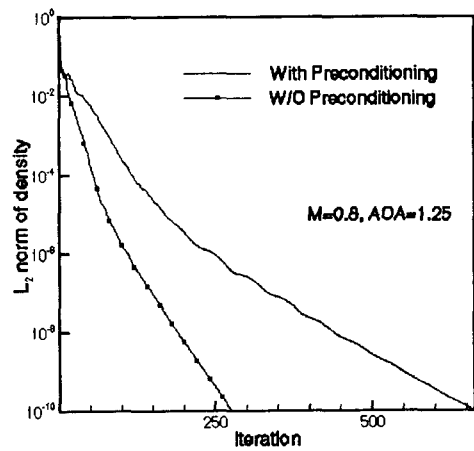


그림 12 M=0.8, AOA=1.25 의 수렴곡선

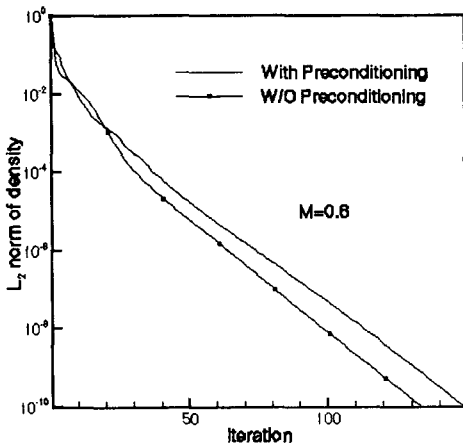


그림 13 M=0.6 의 수렴곡선

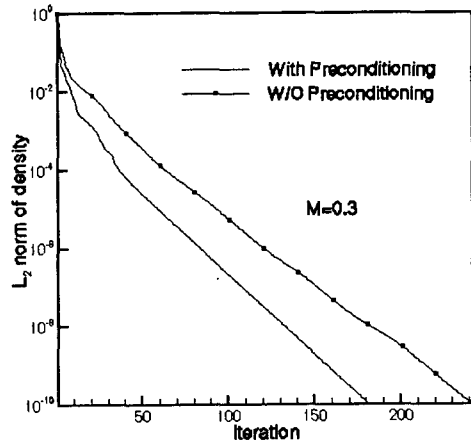


그림 14 M=0.3 의 수렴곡선

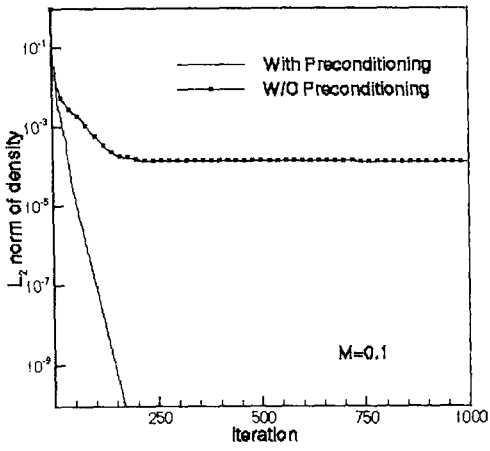


그림 15 M=0.1 의 수렴 곡선

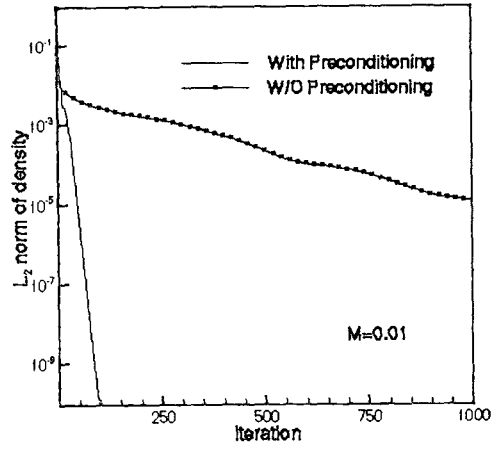


그림 16 M=0.01 의 수렴 곡선

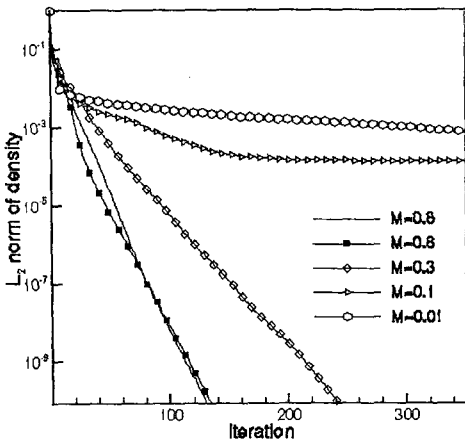


그림 18 비예조건화 기법의 수렴 곡선

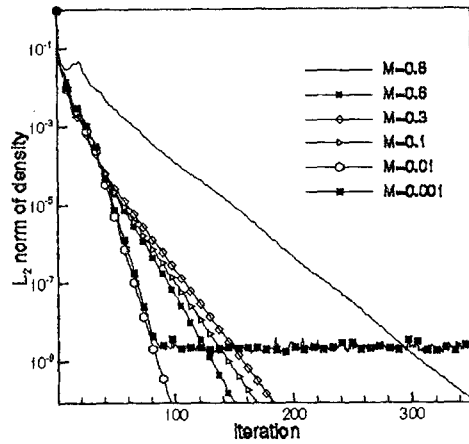


그림 19 예조건화 기법의 수렴 곡선

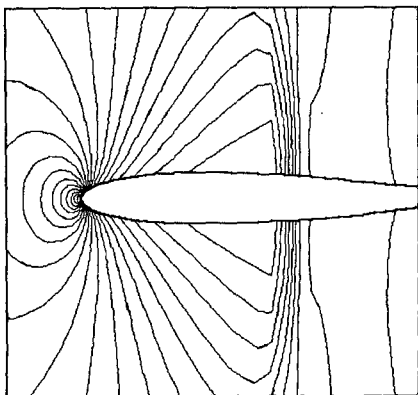


그림 20 날개 주위의 압력분포(마하수 0.8)

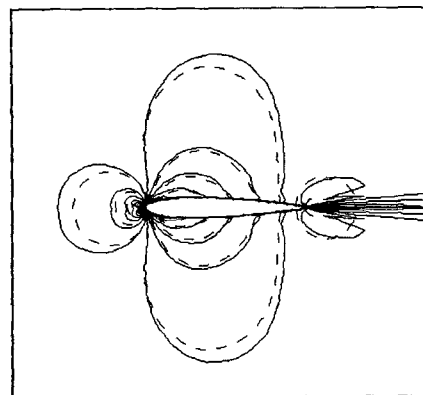


그림 21 날개 주위의 압력분포(마하수 0.1)

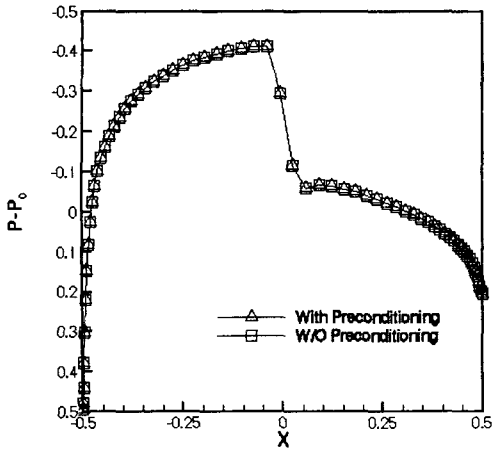


그림 22 날개 표면의 압력분포(마하수 0.8)

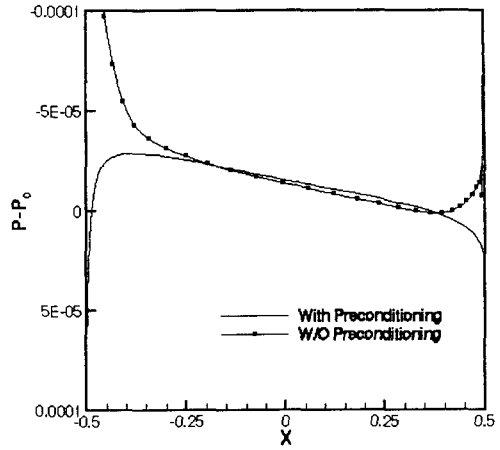


그림 23 날개 표면의 압력분포(마하수 0.1)

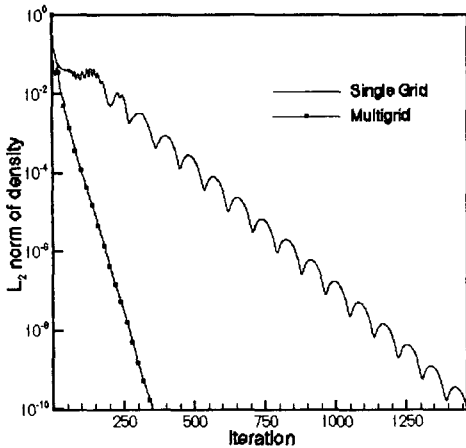


그림 25 다중 격자와 단일 격자의 수렴곡선(마하수 0.8)

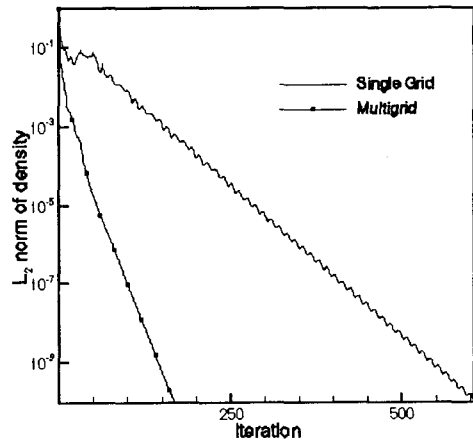


그림 26 다중 격자와 단일 격자의 수렴곡선(마하수 0.1)

[5] S. Venkateswaran and C.L. Merkle, "Analysis of Preconditioning Methods for the Euler and Navier Stokes Equations", 30th VKI Lecture Series in CFD, March 8-12 (1999)  
 [6] Chorin, "A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems", J. of Comput. Phys. 2, pp. 12-25, (1967)  
 [7] 박수형, 성춘호, 권장혁, "2차 upwind TVD 기법을 이용한 효율적인 다중 격자 DADI기법", 한국항공우주학회지 26권 7호, pp.28-36, (1998)  
 [8] 박태상, "2차 upwind TVD 기법을 위한 개선된 다단계 시간 전진 기법", 박사학위논문, 한국과학기술원 항공우주공학과, (1998)  
 [9] Pulliam, T.H. and Chaussee, D.S., "A Diagonal Form of an Implicit Approximate Factorization Algorithm", J. Comput. Phys. 39. pp.347-363, (1981)