



2차원 아음속 압축기 익렬유동에서의 난류모델 효과에 관한 연구

Study on the effect turbulence models for the flow through a subsonic compressor cascade

*남 경우¹⁾, 백 제현²⁾

The eddy viscosity turbulence models were applied to predict the flows through a cascade, and the prediction performances of turbulence models were assessed by comparing with the experimental results for a controlled diffusion(CD) compressor blade. The original $k-\omega$ turbulence model and $k-\omega$ shear stress transport(SST) turbulence model were used as two-equation turbulence model which were enhanced for a low Reynolds number flow and the Baldwin-Lomax turbulence model was used as algebraic turbulence model. Favre averaged Navier-Stokes equations in a two-dimensional, curvilinear coordinate system were solved by an implicit, cell-centered finite-volume computer code. The turbulence quantities are obtained by lagging when the mean flow equations have been updated. The numerical analysis was made to the flows of CD compressor blade in a cascade at three different incidence angles (40, 43.4, 46 degrees). We found the reversion in the prediction performance of original $k-\omega$ turbulence model and $k-\omega$ SST turbulence model when the incidence angle increased. And the algebraic Baldwin-Lomax turbulence model showed inferiority to two-equation turbulence models.

1. 서론

압축기의 내부유동은 매우 복잡한 난류유동이며, 특히 내부의 압력이 높아지는 유동이기 때문에 압축기 깃의 후연에서 강한 역압력 구배를 받게된다. 이러한 유동을 정확히 해석하기 위해서는 유동의 역압력 구배를 민감하게 포착할 수 있는 난류모델이 필요하다. 터보기계 해석에 널리 쓰이고 있는 난류모델은 대수적 난류모델과 2방정식 난류모델로서 대수적 난류모델로는 Baldwin-Lomax 난류모델, 2방정식 난류모델로는 $k-\epsilon$ 난류모델과 $k-\omega$ 난류모델이 대표적이다. 이 중 $k-\omega$ 난류모델은 $k-\epsilon$ 난류모델에 비해 역압력 구배 유동에 대해서도 어느 정도 개선된 결과를 보인다고 보고되고 있다. Menter[1]는 Wilcox[2]의 $k-\omega$ 난류모델을 개선하여 역압력구배에 보다 민감한 $k-\omega$ SST(Shear Stress Transfer) 난류모델을 제시하였다. 그리고 Baldwin-Lomax 난류모델[3]은 주로 천음속과 초음속 박리유동해석을 목적으로 개발된 모델이다.

본 연구에서는 Wilcox의 $k-\omega$ 난류모델, Menter의 $k-\omega$ SST 난류모델, 그리고 Baldwin-Lomax

적용하여 이중 가장 적합한 난류모델을 찾는 것을 목표로 하였다. 이를 위해 Elazar[4]와 Shreeve[5]가 설계조건 및 탈설계조건에서 실험한 제어 확산형(CD) 압축기 익렬에 대해 수치해석을 수행하여 그 결과를 이들의 실험 결과와 비교하였다.

2. 지배방정식 및 경계조건

2.1 지배방정식

2차원 압축성 난류유동을 풀기 위한 Favre averaged Navier-Stokes 방정식[6]은 선형 와점도 난류모델을 사용하는 경우에 와점도의 정보만이 지배방정식에 전달되므로 다음과 같이 2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식과 같은 형태가 된다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j(e+p)] = \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j \tau_{ij} - q_j] \quad (3)$$

여기서 t 는 시간, x_i 는 위치 벡터, u_i 는 평균 속

1) 포항공과대학교 기계공학과 대학원
(790-784 경북 포항시 남구 효자동 산31
Tel: 054-279-2833)

2) 포항공과대학교 기계공학과

도벡터, ρ 는 밀도, p 는 압력, τ_{ij} 는 분자응력 텐서와 레이놀즈 응력 텐서의 합, q_j 는 분자 및 난류 열유속벡터의 합, e 는 단위체적당의 전체에너지를 나타낸다

2.2 난류모델

본 연구에서 사용한 난류모델은 Boussinesq의 가정을 근간으로 하는 선형 와점도 모델로서, 대수적 난류모델인 Baldwin-Lomax 난류모델[3], 2방정식 난류모델인 Wilcox의 $k-\omega$ 난류모델[2]과 이를 개선한 Menter의 $k-\omega$ SST 난류모델[1]이다.

2.2.1 Baldwin-Lomax 난류모델

Baldwin-Lomax 난류모델은 레이놀즈 전단응력을 혼합길이 가정에 의해서 구하는 2층 대수모델이다. 이 모델은 Cebeci-Smith 난류모델[7]을 변형하여 내층과 외층의 난류점도가 일치하는 지점을 기준으로 2층 난류모델을 적용한다.

Inner layer:

$$\nu_{t, inner} = l_{mix}^2 |\Omega| \quad (4)$$

$$l_{mix} = xy [1 - e^{-y^*/26}], \quad y^+ = yu_{\tau}/\nu \quad (5)$$

Outer layer:

$$\nu_{t, outer} = 0.0168 \cdot 1.6 \cdot F_{wake} F_{Kleb}(y) \quad (6)$$

$$F_{wake} = \min[y_{max} F_{max}; C_{wk} y_{max} u_{dij}^2 / F_{max}] \quad (7)$$

$$F(y) = y|\Omega| [1 - e^{-y^*/26}] \quad (8)$$

$$F_{Kleb} = \left[1 + 5.5 \left(\frac{0.3y}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (9)$$

$$u_{dij} = \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)_{max}} - \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)_{min}} \quad (10)$$

여기서 y 는 벽으로부터의 수직거리, Ω 는 와도, u_{dij} 는 평균속도의 최대값과 최소값의 차이로서 u_{dij} 가 최대값이 되는 위치가 y_{max} 이다. 따라서 경계층 유동의 경우 y_{max} 는 경계층 모서리가 된다.

2.2.2 $k-\omega$ 난류모델

난류 운동에너지와 비소산율의 수송방정식을 일반적 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{D\rho k}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta^* \rho \omega k + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\rho \omega}{Dt} = & \frac{\gamma}{\nu_t} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \\ & + 2\rho(1 - F_1) \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서 k 는 난류운동에너지, ω 는 비소산율, μ 는 분자점도, μ_t 는 난류점도를 나타낸다. 그리고 $\tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ 은 난류운동에너지의 생성항이며, 레이놀즈 응력 텐서 τ_{ij} 는 Boussinesq의 가정에 의해 다음과 같이 표시된다.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (13)$$

또한, 식(12)에서 $(1-F_1)$ 이 곱해진 항은 $k-\epsilon$ 난류모델을 $\omega = \epsilon/k$ 의 관계를 이용하여 $k-\omega$ 난류모델로 변환하는 과정에서 생긴 교차-확산항이다. 이 항은 $k-\omega$ 난류모델의 약점인 자유유동 난류강도의 영향을 상당부분 감소시키는 기능을 한다.

Original $k-\omega$ 난류모델

난류모델 상수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_k = 0.5, \quad \sigma_\omega = 0.5, \quad \beta^* = 0.09, \quad \beta = 0.0750, \\ x = 0.41, \quad \gamma = \beta / (\beta^* - \sigma_\omega x^2 / \sqrt{\beta^*}) \end{aligned} \quad (14)$$

난류점도는 다음의 식을 이용하여 구한다.

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (15)$$

Wilcox의 original 모델에서는 교차확산항이 없으므로 F_1 은 1로 둔다.

$k-\omega$ shear stress transfer(SST) model

이 모델은 일종의 2층 난류모델로서 경계층 안쪽에서는 $k-\omega$ 난류모델을 사용하고, 그 바깥쪽에서는 $k-\epsilon$ 난류모델을 사용한다. F_1 은 두 모델의 경계를 나누어주는 함수로서 방정식 내에서는 다음의 식을 통해 적용되며, 벽 근처에서는 1의 값을 가지고 경계층 모서리 바깥쪽에서는 0의 값을 갖는다.

$$\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2 \quad (16)$$

여기서 ϕ 는 난류모델 상수들을 의미하는 것으로, ϕ_1 은 σ_{k1} 이 0.85로 바뀌는 것을 제외하고 위에서 설명한 Wilcox의 original $k-\omega$ 난류모델의 상수들과 같은 값을 갖으며, ϕ_2 는 $k-\epsilon$ 난류모델의 상수들로서 다음과 같다.

$$\sigma_{\omega 2} = 1.0, \sigma_{\omega 2} = 0.856, \beta^* = 0.09, \beta_2 = 0.0828, \\ x = 0.41, \gamma_2 = \beta_2 / \beta^* \sim \sigma_{\omega 2} x^2 / \sqrt{\beta^*} \quad (17)$$

이와 함께 $k-\omega$ SST 난류모델은 역압력구배에 대한 민감도를 높이기 위해 경계층 안쪽에서 Bradshaw의 가정으로 난류점도를 제한함으로써 레이놀즈 전단응력 수송효과를 첨가하였다. 이는 벽근처에서 1의 값을 갖고, 경계층 모서리에 가까워질수록 0에 가까워지는 함수 F_2 를 이용하여 난류점도를 다음과 같이 제한함으로써 가능하게 하였다.

$$\mu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega |F_2|)} \quad (18)$$

여기서 a_1 은 Bradshaw의 상수로서 그 값은 0.31이며, 와도 Ω 는 2차원의 경우 $du/dy - dv/dx$ 이며, 박층 경계층가정을 적용할 수 있는 유동에서는 du/dy 로 쓸 수 있다. 본 연구에서는 다음과 같이 Ω 를 적용하였다.

$$\Omega = du/dy \quad (F_2 \geq 0.9) \quad (19) \\ \Omega = du/dy - dv/dx \quad (F_2 < 0.9)$$

2.3 경계조건과 초기조건

본 연구에서 사용된 익렬 유동은 Fig.1에서 보이는 것과 같이 입구, 벽, 주기면 그리고 출구 경계조건을 가지고 있다. 입구에서는 전압력, 마하수, 입구 유동각이 주어지고, 평균유동변수는 내부의 Riemann 상수를 외삽하여 사용하였다. 그리고, 입구에서의 k 와 ω 값은 Menter[8]를 따라 주었다.

$$k_\infty = 1.5 [Tu_\infty U_\infty]^2, \omega_\infty = \alpha \left(10 \frac{U_\infty}{L} \right) \quad (20)$$

여기서 Tu_∞ 는 자유유동 난류강도, L 은 특성길이, U_∞ 는 자유유동 속도이다. 벽에서는 속도성

분과 k 에 대해서는 점착조건을 사용하였고, 압력은 내부에서 외삽하고 온도는 단열조건을 주었다. 비소산율 ω 는 벽에서 물리적 경계조건을 갖고 있지 않고, 점근적으로 다음과 같은 값을 갖는다.

$$\omega \rightarrow \frac{6\nu_w}{\beta y^2} \text{ as the wall distance } y \rightarrow 0. \quad (21)$$

이 값은 벽에서 첫 번째 격자점에서만 적용하고, 벽에서는 Menter[1]가 제시한 다음과 같은 근사치를 적용하였다.

$$\omega_o = 10 \frac{6\nu}{\beta y_1^2} \text{ at } y=0. \quad (22)$$

출구에서는 출구정압이 주어지고 나머지 평균유동변수는 내부에서 외삽하였으며, k 와 ω 에 대해

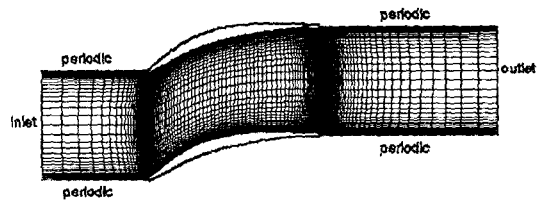


Fig. 1 Flow configuration and H-type grid for CD compressor

서는 대류 경계조건을 사용하였다.

시간적분을 위한 초기조건은 입구조건을 전 유동영역에 적용하였다. 이와 같은 초기조건에서는 시간적분초기에 난류유동변수들이 음의 값을 갖는 경우가 생긴다. 특히 ω 방정식은 비선형성이 강하여 ω 값에 제한이 필요하다. 이는 Durbin[9]의 난류시간 제한에 관한 가정을 유체기계 유동 해석에 적용한 Michellassi등[10]을 따라 다음과 같이 적용하였다.

$$\omega = \frac{1}{\tau} = \max \left[\omega, 1 / \left(\frac{1}{\beta^*} \sqrt{\frac{3}{8S^2}} \right) \right] \quad (23)$$

여기서 τ 는 난류시간, $S = \sqrt{S_{ij} S_{ij}}$ 이다.

3. 수치해법

평균유동방정식의 시간에 대한 이산화는 Beam-Warming[11]의 해법에서 사용된 세 점 Euler 내재적 시간적분법을 사용하였고, 공간에 대한 이산화는 모든 유동변수가 격자의 중심에

위치하는 격자중심 격자계를 근간으로 유한체적법을 사용하였는데, 대류항에는 Roe의 FDS를, 점성항에는 2차의 중심차분법을 적용하였다. $k-\omega$ 난류 방정식의 이산화 방법은 대류항의 공간이산화에 대하여 1차의 풍상차분법을 사용한 것을 제외하고는 평균유동방정식에 사용한 것과 같은 방법을 사용하였다.

수치해석 알고리즘을 보면, 평균유동방정식과 $k-\omega$ 난류 방정식을 분리시켜 계산하도록 하였는데, $k-\omega$ 난류 방정식은 평균유동방정식보다 한 시간단계가 지연되어 계산되므로, 평균유동방정식으로 전달되는 난류점도는 바로 전 시간단계의 값이 된다.

4. 계산결과

본 연구에서는 아음속 확산제어형(CD) 축류압축기의 익렬유동에 대해서 Elazar[4]와 Shreeve[5]가 실험한 결과를 사용하였다. 이들은 Laser Doppler Velocimeter(LDV)를 이용하여 설계조건($\beta=40^\circ$)에서부터 탈설계 운전조건($\beta=43.4^\circ, 46^\circ$)에 대하여 날개 표면압력, 평균속도, 난류강도등을 측정하였다. 이들이 사용한 실험조건은 Table 1에 제시하였다.

수치해석을 위해 사용한 격자계는 Fig.1에서

Table 1. Flow conditions for CD cascade

Blade chord length	12.73 cm
Reynolds numbe	700,000
Inlet Mach number	0.25
Inlet Total Pressure	1.03 atm
Exit static pressure	1.00 stm
Inlet flow angles	40° 43.4° 46°

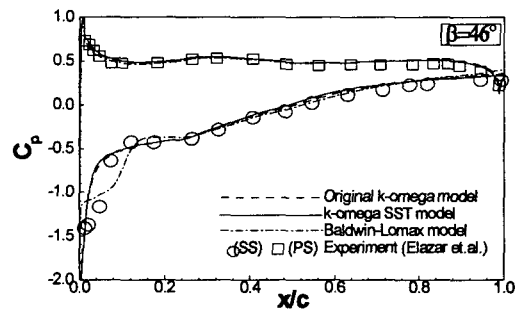
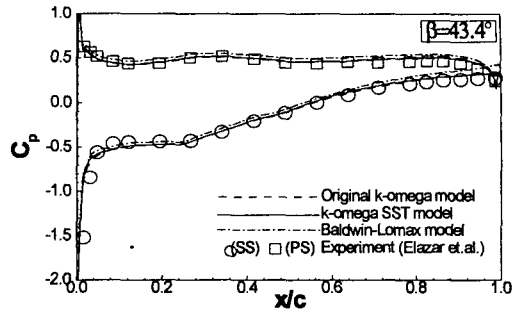
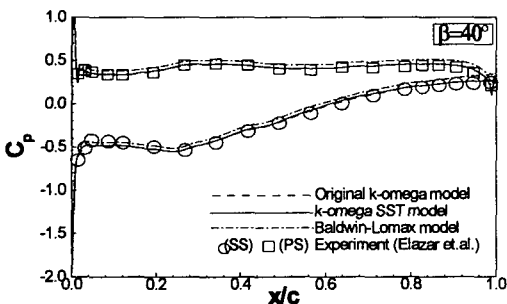


Fig. 2 Measured and Calculated pressure coefficient distribution on the blade surface

보이는 것과 같이 H-type 격자계를 사용하여, 깃의 전연과 후연근처에 격자가 밀집되도록 하였고, 총격자수는 216×81 이다. 경계층 안쪽 벽근처에서 벽함수를 사용하지 않으므로, 점성저층 및 log-layer에서의 유동을 제대로 포착하기 위하여 벽에서부터 첫 번째 격자의 $y^+ (=yu_c/\nu)$ 가 1.2 이하가 되도록 벽 근처에 격자점을 집중시켰다. 입구에서의 유동조건은 Table 1.의 실험조건과 같이 주었다. 그러나 AVDR(Axial Velocity Density Ratio)은 실험결과 1.04에서 1.06의 값을 가지나 계산에서는 고려하지 않았다.

Fig. 2에서는 입구 유동각 40도, 43.4도 및 46도인 경우의 계산된 압력계수 분포를 실험값과 비교하여 나타내었다. Original $k-\omega$ 난류모델과 $k-\omega$ SST 난류모델은 세가지 입구 유동각에서 모두 실험치와 비교적 잘 일치하였다. 그러나 Baldwin-Lomax 난류모델은 전 유동각에서 깃의 후연으로 갈수록 실험치에서 벗어난 값을 예측하였다. 이것은 깃의 후연으로 갈수록 점성

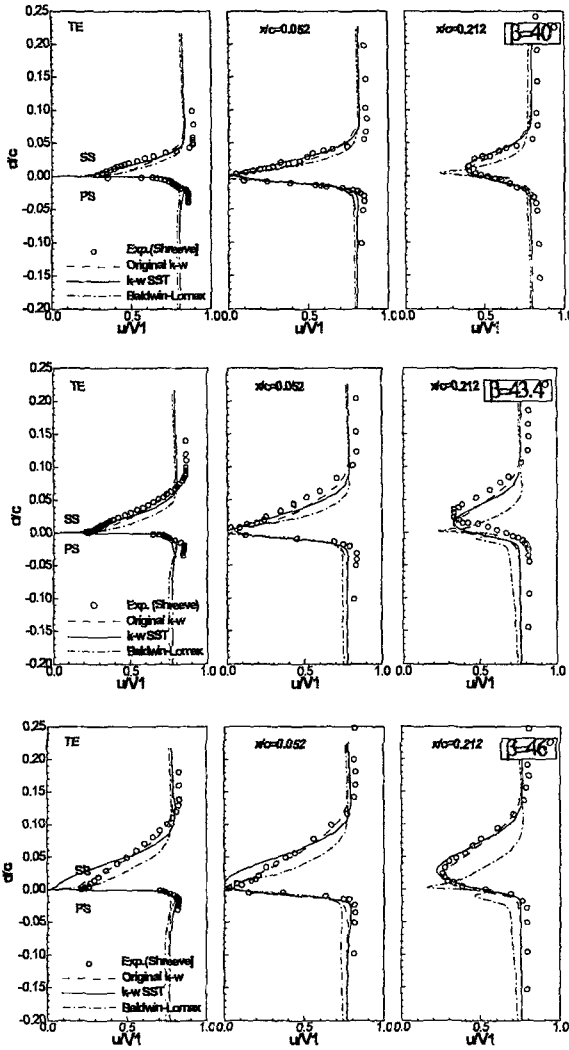


Fig. 3 Measured and calculated mean velocity profiles on the trailing edge and in the wake

효과가 증대하여 대수난류모델의 기본 가정인 박층 경계층가정이 만족되지 않기 때문에 생각된다. 이것은 입사각 40도, 43.4도의 경우 갖의 전연부근의 흡입면에서 Baldwin-Lomax 난류모델이 가장 정확한 값을 예측하는 것을 보면 알 수 있다. 입사각 46도 인 경우 Baldwin-Lomax 난류모델은 전연 부근의 흡입면에서 실험값과 매우 다른 값을 예측하였다. 이는 전연에 발생하는 바리기포를 실제보다 크게 예측하기 때문으로 보인다.

Fig. 3에서는 후연 부근(TE)과 후류지역($x/c=0.052$,

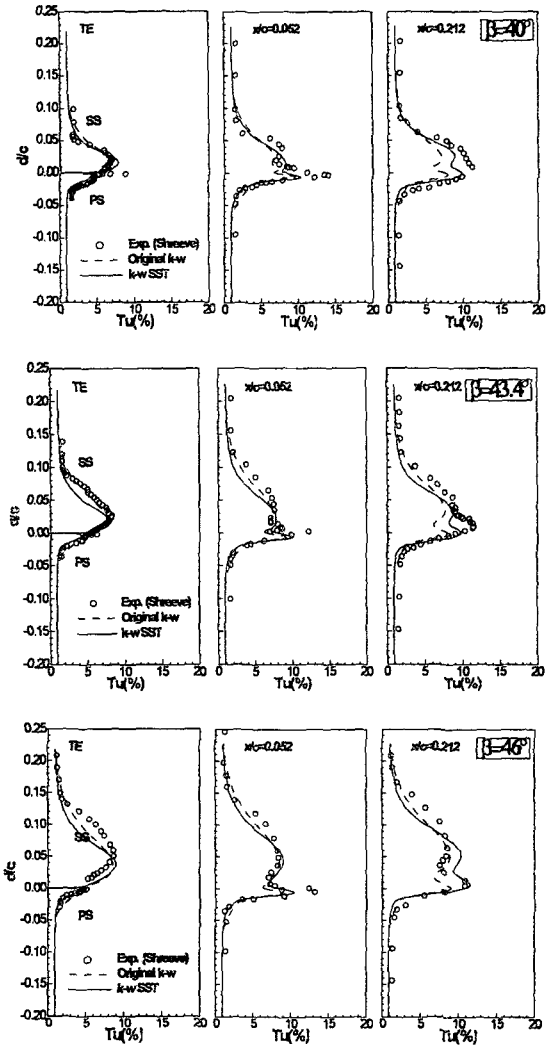


Fig. 4 Measured and calculated turbulent intensity profiles on the trailing edge and in the wake

, 0.212)에서 세가지 입구 유동각에 따른 평균속도 분포를 보였다. 설계조건인 입구 유동각 40도인 경우에 $k-\omega$ SST, original $k-\omega$, Baldwin-Lomax 난류모델 순으로 실험치와 잘 일치하였다. 특히, $k-\omega$ SST 난류모델은 점성저층에서 실험치와 정확히 일치하였다. 이것은 이 영역에서 사용한 $\Omega=du/dy$ 라는 가정이 잘 맞고 있다는 것을 보여준다. 입구 유동각이 커짐에 따라 갖의 후연 부근의 흡입면에서 $k-\omega$ SST 난류모델과 original $k-\omega$ 난류모델의 예측성능 우세성이 역전되었다. 입구 유동각 46도에서 $k-\omega$

SST 난류모델은 깃의 후연 흡입면에서 평균속도를 너무 작게 예측하였다. 그러나, 압력면에서는 여전히 $k-\omega$ SST 난류모델의 예측성능이 가

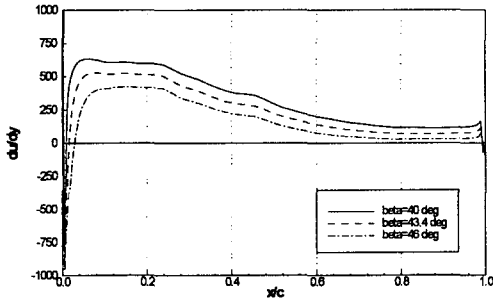


Fig. 5 Calculated du/dy distribution along the suction surface at $\beta = 40^\circ$ by original $k-\omega$ model

장 뛰어났다. 이러한 결과가 나온 이유는 $k-\omega$ SST 난류모델에서 박층경계층 가정에 따라 Ω 를 정의하였으나, 입구 유동각의 크기가 커짐에 따라 깃의 후연 흡입면에서 경계층 두께가 증가하여 이 가정을 만족시키지 못하기 때문인 것으로 생각된다. 이것은 박층 경계층 가정을 만족하는 후연부근 압력면에서는 $k-\omega$ SST 난류모델의 결과가 가장 좋은 것을 보면 알 수 있다. Baldwin-Lomax 난류모델은 깃의 후연과 후연근처 후류지역($x/c=0.052$)에서는 전 유동각에서 실험치에 어느 정도 근사한 결과를 보이나 후연에서 먼 후류지역($x/c=0.212$)에서는 매우 좋지 못한 결과를 보였다. 그리고 전체적으로 경계층 두께를 얇게 예측하였다. 한편, 경계층 바깥의 속도의 크기를 보면 측정값보다 작은 값을 예측하였는데 이것은 Kang 등[12]이 제시한 것과 같이 AVDR을 고려하지 않고 계산한 이유 때문인 것으로 생각된다. Biswas 등[13]은 AVDR를 고려하여 계산하였는데 그 결과 경계층 외부에서도 실험치와 근접한 결과를 보였다.

Fig. 4는 깃의 후연부근(TE)과 후류지역($x/c=0.052, 0.212$)에서 세가지 입구 유동각에 따른 난류강도를 보였다. Baldwin-Lomax 난류모델은 난류강도를 계산하지 않으므로 제외하였다. 평균속도 분포와 마찬가지로 압력면에서는 $k-\omega$ SST 난류모델이 가장 우수한 결과를 보였고, 흡입면에서는 입구 유동각이 증가함에 따라 예측 성능의 우세성이 역전되었다.

Fig. 5에서는 흡입면에서의 du/dy 분포를 보였

다. 전연 박리기포의 성장을 보려는 목적이므로 original $k-\omega$ 난류모델의 계산결과만을 보였다. 전연 박리기포의 길이를 보면, 입구 유동각이 증가함에 따라 전연 박리기포의 크기가 점차로 증가하여 입구 유동각이 46도일 때 0.028C까지 성장하였다. 깃의 후연에서는 전 입구 유동각의 범위에서 박리가 발생하지 않음을 볼 수 있으며, 경향으로 보아 입구 유동각이 좀 더 커지면 0.6C 부근에서 박리가 발생할 것으로 보인다.

5. 결론

본 연구를 통하여 다음의 결론을 얻었다.

Wilcox의 original $k-\omega$ 난류모델은 전 입구 유동각 범위에서 좋은 결과를 보이는 것으로 보아 아음속 압축기 점성유동의 수치해석에 적합한 난류모델임을 알 수 있었다. Menter의 $k-\omega$ SST 모델은 설계조건에서는 매우 좋은 결과를 보였으나 고 입사각에서는 좋지 못한 결과를 보였다. 이것은 경계층 두께의 성장률과 관계가 있는 것으로 보인다. Baldwin-Lomax 난류모델은 다른 모델에 비해 전체적으로 열등한 결과를 얻었는데, 아음속 점성유동에 이 모델을 사용할 경우에는 그에 맞는 튜닝이 필요할 것으로 생각된다.

6. 참고문헌

- [1] Menter, F. R., "ZONAL TWO EQUATION $k-\omega$ TURBULENCE MODELS FOR AERODYNAMIC FLOWS," AIAA Paper, 93-2906 (1993).
- [2] Wilcox, D. C., "Reassessment of the Scale-Determining Equation for advanced Turbulence Models.," AIAA Journal, 26-11 (1988), p.1299-1310.
- [3] B. S. Baldwin and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows," AIAA paper.,78-257 (1978).
- [4] Y. Elazar. and R. P. Shreeve., "Viscous Flow in a Controlled Diffusion Compressor Cascade With Increasing Incidence," ASME Journal of Turbomachinery, 112 (1990), p.256-266.



- [5] R. P. Shreeve. et al., "Wake Measurements and Loss Evaluation in a Controlled Diffusion Compressor Cascade," ASME Journal of Turbomachinery, 113 (1991), p.591-599.
- [6] Favre, A. "Equations des Gaz Turbulents Compressibles," Journal de Mecanique, 4-3 (1965), p.361-391.
- [7] Cebeci, T. and Smith, A. M., "Analysis of Turbulent Boundary Layers," Academic Press, New York, (1974).
- [8] Menter, F. R., "Influence of Freestream values on Turbulence Model Predictions," AIAA Journal, 30-6 (1992).
- [9] Durbin, P. A., "On the $k-\epsilon$ Stagnation Point Anomaly," Int. J. Heat and Fluid Flow, 17 (1996), p.89-90.
- [10] V. Michelassi. et al., "Unsteady Heat Transfer in Stator-Rotor Interaction by Two-Equation Turbulence Model," ASME Journal of Turbomachinery, 121 (1999), p.436-447.
- [11] Beam, R. M. and Warming, R. F., "An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic systems in Conservation Law Form," Journal of Computational Physics, 22 (1976), p.87-110.
- [12] 강신형 외3인, "압축기용 2차원 확산 제어형 익렬내의 점성유동에 관한 수치해석," 대한기계학회논문집, 17-3 (1993), p.658-669.
- [13] Debasish Biswas, et al. "Numerical Analysis of Two-dimensional Compressible Viscous Flow in Turbomachinery Cascades Using Improved $k-\epsilon$ Turbulence Model," ASME paper, 97-GT-417 (1997).