



충격과 불안정성을 제거한 개선된 Roe 수치기법의 개발

Cures for Shock Instability: Development of an Improved Roe scheme

*김성수¹⁾, 김종암²⁾, 노오현³⁾, 홍승규⁴⁾

Sung-soo Kim, Chongam Kim, Oh-Hyun Rho, and Seung Kyu Hong

This paper deals with the development of shock stable scheme that is free from shock instability. Roe's FDS is known to preserve good accuracy but to suffer from shock instability, i.e. the carbuncle phenomenon. As the first step toward the shock stable scheme, Roe's FDS is compared with HLLE scheme to identify the source of shock instability. Then control function f is introduced into the pressure term in Roe's FDS to cure shock instability. Various numerical tests concerned with shock instability are performed to demonstrate the shock stability of the proposed scheme.

1. 서론

물리적 현상을 수치적으로 모사하기 위해 수치기법은 정확성과 강건성을 보장하여야한다. 리만 문제의 근사해에서 출발하는 FDS(Flux Difference Splitting) 계열의 수치기법은 정확성이 뛰어나 많은 유동에 널리 적용되고 있고, 대표적인 것으로 Roe의 FDS, HLLEM을 들 수 있다. 아음속과 천음속 영역에서 높은 정확성을 보장하는 이들 수치기법은 초음속과 극초음속 영역의 마하수가 높은 유동에서 carbuncle 현상이라 불리는 충격과 불안정성이 나타나는 것이 확인되었다. 본 연구에서는 충격과 불안정성을 유발하는 원인을 파악하여 정확성과 충격과 안정성을 모두 보장하는 새로운 수치기법을 제안하고 다양한 예제를 통하여 특성을 검증하였다.

2. 충격과 불안정성

2.1 Quirk 문제

계산격자와 정렬된 상태로 이동하는 충격과 문제를 계산하는 경우, 충격과 형상이 깨지는 것을 발견한 Quirk은 수치기법에 내재된 충격과 불안정성을 확인할 수 있

는 방법으로 홀짝 분리(odd-even decoupling) 문제를 제시하였다.[1] 이 문제는 carbuncle 현상과 관련이 있는 것으로 알려져 있으며, 이 문제에서 충격과 불안정성을 보이는 수치기법은 carbuncle 현상이 나타나는 것으로 알려져 있다. 계산 격자계는 20×800 이며, 각 cell은 단위길이 1의 크기를 갖는다. 격자계의 중심선에 다음과 같은 교란을 주었다.

$$Y_{i,j,mid} = \begin{cases} Y_{j,mid} + 10^{-4}, & \text{for } j \text{ even} \\ Y_{j,mid} - 10^{-4}, & \text{for } j \text{ odd} \end{cases} \quad (1)$$

유동조건은 마하수 6.0의 이동충격과 조건이며, Roe의 FDS를 사용하여 CFL 0.5로 반복계산 300회를 시행하였다. 그림 1은 등밀도선도이며, 격자에 교란이 들어간 중심선 주위로부터 시작해 충격과 형상이 깨진 것을 확인할 수 있다.

2.2 이중 마하 반사

충격과 불안정성이 발견되는 또 다른 문제로 이중 마하 반사(DMR, Double-Mach Reflection)가 있다. 이 문제는 Godunov 유형의 수치기법뿐 아니라 carbuncle 현상이

1. 서울대학교 항공우주공학과
2. 서울대학교 항공우주공학과 조교수
3. 서울대학교 항공우주공학과 교수
4. 국방과학연구소

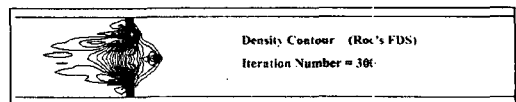
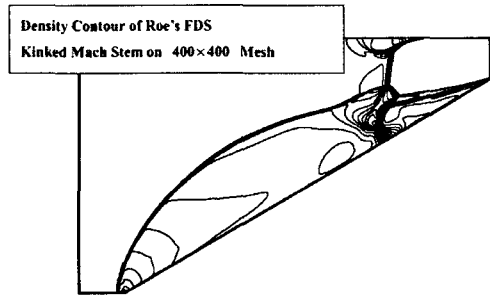
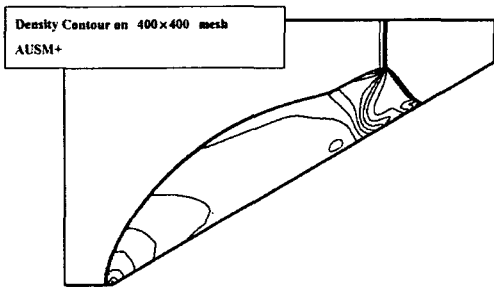


Fig. 1 Quirk's test



(a)



(b)

Fig. 2 Density contour of double mach reflection

나타나지 않는다고 알려진 AUSM+에서도 비물리적인 3중점이 생기는 것으로 보고된 바 있다.[2] 유동조건은 마하수 5.5의 이동 충격파 조건이고 경사면의 각도는 30°이다. 계산격자계는 400×400의 크기를 갖는다. 그림 2는 Roe의 FDS와 AUSM+를 사용하여 공간정확도 1차로 계산한 등밀도선도이며, 모두 벽면근처에서 마하파가 앞으로 튀어나온 것을 볼 수 있다.

2.3 Carbuncle 현상

무딘 물체 (blunt body) 주위의 유동에 충격파가 형성되는 경우, 정체선 주위에서 비물리적인 해가 발생하는 경우를 목격할 수 있는데 이를 carbuncle 현상이라 한다.[1] 그림 3은 마하수 8.0의 유동을 Roe의 FDS, 1차 정확도로 계산한 결과이다. Carbuncle 현상은 충격파가 격자와 정렬되어 있을 때, 발생하는 것으로 알려져 있다. 격자에 정렬되어 생성된 충격파에 교란이 생길 경우 Roe의 FDS와 같이 접촉불연속면(contact discontinuity)을 포착할 수 있

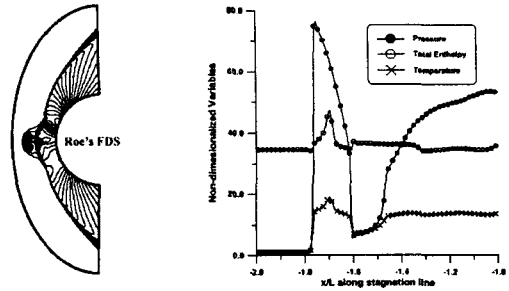


Fig.3 Carbuncle phenomenon

는 수치기법은 이를 감쇠할 수 있는 능력이 없으므로 초기 교란 값이 계속 증가하여 결국 전체 수치해에 영향을 미치게 된다. 반면, HLLC와 같이 접촉불연속면을 포착하지 못하는 수치기법은 이러한 교란을 제거할 수 있으므로 carbuncle 현상이 나타나지 않는다. 이러한 관점에서 충격파 불안정성을 해결하기 위하여, 선형파(linear wave)에 점성을 추가하는 entropy fix의 방법이 많이 시도되었다.

2.4 충격파 불안정성

Carbuncle 현상이 발견된 이후, 충격파 불안정성이 발생하는 많은 사례가 발견되었고 또한 이를 해결하기 위한 연구도 지속적으로 전개되었다. 우선, 충격파 불안정성은 1차원 유동에서는 생기지 않는 다차원 현상이라는 것이 밝혀졌고, HLLC와 Van Leer의 FVS(Flux Vector Splitting)와 같이 점성소산이 많은 수치기법에서는 발생하지 않는다는 것이 밝혀졌다. 이에, 비록 수치해의 정확성이 떨어지더라도 수치기법에 점성항을 추가하는 것이 유일한 해결책으로 여겨지게 되었다. Sanders[3]는 linear analysis를 통해 충격파 불안정성은 crossflow 소산항이 부족하기 때문에 생성되는 것을 보였고, Gressier[2]는 linear stability analysis를 통해 정확한 접촉불연속면 포착과 충격파 안정성은 동시에 만족될 수 없다고 주장하였다. 이와 관점을 달리하여 충격파 불안정성이 생기는 근원을 파악하기 위하여, 수치기법의 압력항과 밀



도항의 관계에 관한 연구도 진행되었다. Quirk[1]은 Roe의 FDS와 HLLC 수치기법을 비교하여, 압력에서 발생한 교란 값이 밀도에 영향을 주는 수치기법은 충격과 불안정성을 내포하고 있다는 것을 밝혔고, Xu[4]도 수치기법의 압력항이 충격과 불안정성을 유발하는 역할을 한다는 것을 밝혔다. 또한 Liou[5]는 여러 수치기법들의 수치점성항을 비교하여 질량 유량(mass flux)에 압력에 의한 영향이 없는 수치기법은 충격과 안정성을 획득할 것이라는 결론에 도달하였다. 본 연구에서는 수치기법의 수치점성항에서 압력항을 조절함으로써 충격과 불안정성을 해결하고자하였다.

3. 마하수 함수를 이용한 Roe 수치기법의 개선

2차원 유동에서 Roe의 FDS는 다음과 같이 표현된다.

$$F_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [F_j + F_{j+1} - |\hat{A}| \Delta Q] \quad (2)$$

$$F_j = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + n_x P \\ \rho v U + n_y P \\ \rho U H \end{bmatrix}_j \quad (3)$$

질량 유량에 포함된 압력항이 명확히 표현될 수 있도록 Roe의 FDS를 다음과 같이 표현하였다.

$$F_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [F_j + F_{j+1} - \hat{M} (F_{j+1} - F_j) + \hat{\alpha} (\hat{M}^2 - 1) \Delta Q + \hat{\alpha} (1 - |\hat{M}|) B \Delta Q] + B \Delta Q = \left(\Delta \rho - \frac{\Delta P}{\hat{c}^2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \frac{\hat{u}^2 + \hat{v}^2}{2} \end{pmatrix} + \hat{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u - n_x \Delta U \\ \Delta v - n_y \Delta U \\ \hat{u} \Delta u + \hat{v} \Delta v - \hat{U} \Delta U \end{pmatrix} \quad (5)$$

식 (4)의 BΔQ는 반감쇠항으로 HLLC에 나타나는 반감쇠항과 같은 형식을 취한다. BΔQ를 생략하고 특성치의 값을 바꿔주면 HLLC 수치기법이 된다.

질량 유량은 일반적으로 원시변수(primitive variable)를 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$F_{j+\frac{1}{2}}^p = \frac{1}{2} [(\rho U)_j + (\rho U)_{j+1}] - \frac{1}{2} D(Q_j, Q_{j+1}) \quad (6)$$

$$D(Q_j, Q_{j+1}) = D^p \Delta \rho + D^u \Delta U + D^p \Delta P \quad (7)$$

Roe의 FDS와 HLLC 그리고 선형파(linear wave)에 entropy fix를 한 각각의 수치기법의 소산계수는 다음과 같이 표현할 수 있다.

Roe의 FDS

$$D_{Roe}^p = \hat{\alpha} |\hat{M}|, \quad \frac{D_{Roe}^p}{\hat{c}^2} = \hat{\alpha} (1 - |\hat{M}|)$$

HLLC

$$D_{HLLC}^p = \hat{c}, \quad \frac{D_{HLLC}^p}{\hat{c}^2} = 0$$

Entropy 보정

$$D_{fix}^p = \max(\hat{\alpha} |\hat{M}|, \delta), \quad \frac{D_{fix}^p}{\hat{c}^2} = \hat{\alpha} (1 - |\hat{M}|)$$

Entropy 보정의 경우 δ 값은 적용하는 방법과 문제에 따라 여러 가지 다른 형식을 취할 수 있지만, 결과적으로 충격과 불안정성이 생길 수 있는 영역에서 수치점성의 최소값을 제한하는 역할을 한다. 충격과 불안정성이 없는 HLLC의 경우 질량 유량에서 압력의 영향이 전혀 없음을 알 수 있다. 결과적으로 충격과 불안정성 문제는 소산항에 나타나는 밀도의 영향과 압력의 영향을 어떻게 균형을 맞출 수 있는가하는 문제로 귀결될 수 있다. HLLC는 질량유량에서 압력의 영향을 완전히 제거함으로써, entropy 보정은 마하수 0이 되는 영역에서 밀도의 영향을 보존시켜줌으로써 압력항과 밀도항의 균형을 맞춰주고 있다고 볼 수 있다. 본 연구에서는 압력항과 밀도항의 균형을 맞추고 접촉불연속면을 정확히 모사할 수 있도록 다음과 같이 압력의 소산계수를 변형하였다.

$$\frac{D^p}{\hat{c}^2} = \hat{c} f (1 - |\hat{M}|) \quad (8)$$

$$f = \begin{cases} 1 & \hat{u}^2 + \hat{v}^2 = 0 \\ |\hat{M}| & elsewhere \end{cases} \quad (9)$$

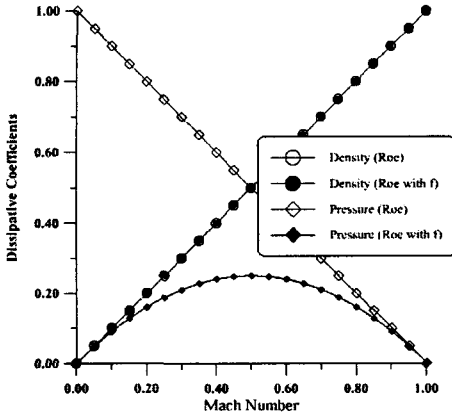


Fig. 4 Dissipative coefficients of pressure and density

그림 4는 f 를 도입한 후의 소산계수를 마하수의 함수로 나타낸 것이다. 기체의 상태 방정식은 다음과 같이 차분될 수 있다.

$$\Delta P = RT\Delta\rho + \rho R\Delta T \quad (10)$$

온도의 구배를 무시할 수 있을 경우, 즉 교란 값이 작은 경우 식 (10)은 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\gamma \frac{\Delta P}{c^2} \approx \Delta\rho \quad (11)$$

식 (11)과 그림 4를 보면 압력항과 밀도항의 소산계수가 균형을 보이는 것을 알 수 있다.

Roe의 FDS는 총엔탈피를 보존하는 특성이 없으므로, 식 (9)의 함수 f 를 그대로 적용할 경우 오차가 증가하여 열전달량 계산에서 정확성이 떨어지게 된다. 아음속 영역에서 Roe의 FDS의 에너지 방정식과 연속 방정식의 수치 점성은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} D_{continuity} \\ D_{energy} \end{array} \right] &= \hat{c} \Delta\rho \left[\begin{array}{c} 1 \\ H \end{array} \right] + \frac{1-|\hat{M}|}{\hat{c}} \Delta P \left[\begin{array}{c} 1 \\ H \end{array} \right] + \\ &\hat{\rho} \hat{M} \Delta U \left[\begin{array}{c} 1 \\ H \end{array} \right] + \hat{\rho} \hat{c} \hat{M} \left[\begin{array}{c} 0 \\ \Delta H \end{array} \right] + \\ &\Delta P \left[\begin{array}{c} 0 \\ \frac{\hat{U}^2}{\hat{c}} - \hat{c} \hat{M} \end{array} \right] - \\ &\Delta U \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hat{c}^2 \hat{\rho} (|\hat{M}| - 1) \hat{M} \end{array} \right] \quad (12) \end{aligned}$$

식 (12)를 보면 마지막 두 항이 오차항임을 알 수 있다. 마하수 함수 f 를 도입하고 총엔탈피를 보존하도록 Roe의 FDS를 수정하면 다음과 같은 새로운 수치기법을 만들 수 있다.

$$F_{j+1/2} = \frac{b_1 \times F_j - b_2 \times F_{j+1}}{b_1 - b_2} + \frac{b_1 \times b_2}{b_1 - b_2} \Delta Q^* - \frac{b_1 \times b_2}{b_1 - b_2} \times \frac{1}{1 + |\hat{M}|} B \Delta Q^* \quad (13)$$

$$\Delta Q^* = \Delta \left(\begin{array}{c} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho H \end{array} \right) \quad (14)$$

$$B \Delta Q^* = \left(\Delta\rho - f \frac{\Delta P}{c^2} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{H} \end{array} \right) + \hat{\rho} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \Delta u - n_x \Delta U \\ \Delta v - n_y \Delta U \\ \Delta H \end{array} \right) \quad (15)$$

$$b_1 = \max(0, \hat{U} + \hat{c}), \quad b_2 = \min(0, \hat{U} - \hat{c}) \quad (16)$$

비선형파의 전파속도에 해당하는 b_1 과 b_2 는 entropy 조건을 만족하고, 팽창영역에서의 강건성을 유지하도록 HLLEM 기법에서 정의된 값을 사용할 수 있다. 단, 접촉 불연속면을 포착할 수 있도록 음속은 Roe 평균값을 공통적으로 사용한다.

RoeM 1 (Roe with Mach number based function 1)

$$F_{j+1/2} = \frac{b_1 \times F_j - b_2 \times F_{j+1}}{b_1 - b_2} + \frac{b_1 \times b_2}{b_1 - b_2} \Delta Q^* - \frac{b_1 \times b_2}{b_1 - b_2} \times \frac{1}{1 + |\hat{M}|} B \Delta Q^* \quad (17)$$

$$b_1 = \max(0, \hat{U} + \hat{c}, U_{j+1} + \hat{c}), \\ b_2 = \min(0, \hat{U} - \hat{c}, U_j - \hat{c}) \quad (18)$$

식 (11)은 교란 값이 작다는 가정이 들어가 있으므로 이미 carbuncle 현상이 나타난 수치해를 초기 조건으로 갖거나, 격자에서 계속하여 교란 값이 증폭되어 들어가는 경우에는 성립될 수 없다. 이러한 문제는 식 (17)의 반감쇠항의 크기를 조절하여 해결할 수 있다.

RoeM 2

$$F_{j+1/2} = \frac{b_1 \times F_j - b_2 \times F_{j+1}}{b_1 - b_2} + \frac{b_1 \times b_2}{b_1 - b_2} \Delta Q^* -$$

$$g = \frac{b_1 \times b_2}{b_1 - b_2} \times \frac{1}{1 + |\hat{M}|} B\Delta Q^* \quad (19)$$

$$g = |\hat{M}|^{1 - \min\left(\frac{P_i}{P_{i+1}}, \frac{P_{i+1}}{P_i}\right)} \quad (20)$$

4. 수치해석 결과

충격과 안정성을 검증할 수 있는 비점성 유동 예제와 수치기법의 정확성을 검증할 수 있는 점성 유동 예제를 통하여 제안된 수치기법의 정확성과 충격과 안정성을 검증하도록 한다.

4.1 비점성유동 예제

충격과 안정성을 확인할 수 있는 예제로 Quirk 문제와 초음속 코너 유동, 그리고 이중 마하 반사 문제를 선정하여 해석하였다. 그림 5는 앞에서 예를 든 Quirk 문제를 해석한 결과로 RoeM 1과 RoeM 2를 사용하여 3400번의 반복계산을 행하였다. 두 수치기법 모두 안정적으로 충격파를 포착하고 있는 것을 확인할 수 있다.

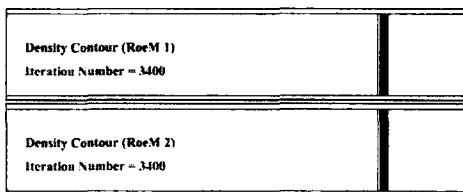


Fig. 5 Quirk's test

그림 6은 초음속 코너 유동을 계산한 결과로 등밀도선도를 나타내고 있다. 격자는 400×400으로 등간격을 주었고, 유동 조건은 마하수 5.09의 이동충격파 조건이며, 90°의 코너를 주어 팽창영역이 생기게된다. Roe의 FDS는 팽창충격파가 생기며, 또 한 팽창 영역에서의 불안정성으로 수치해결을 얻을 수 없기 때문에 HLEM에서 정의된 wave speed를 사용하여 entropy 보정을 해주었다. Entropy 보정의 결과 비물리적인 팽창충격파 현상은 없어졌으나 충격파 형상이 깨지는 충격파 불안정성은 여전히 나타나는 것을 확인할 수 있다. 반면 RoeM 1은 불안정성의 징후 없이 물리적 현상을 잘 포착하고 있다. RoeM 2의 결과는 RoeM 1과

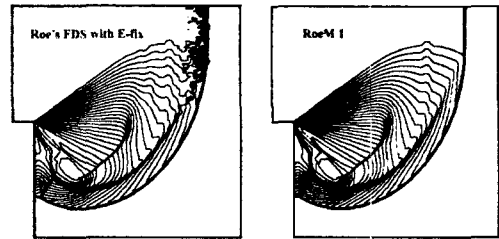


Fig. 6 Supersonic corner problem

동일하여 생략하였다.

그림 7은 앞에서 예로 든 이중 마하 반사 문제로 RoeM 2를 사용하여 얻은 등밀도선도이다. RoeM 1의 경우, AUSM+와 같이 마하파가 앞으로 튀어나오는 현상이 발생하였다. 이는 격자의 형상에서 계속하여 발생하는 교란 값으로 식 (11)이 더 이상 성립하지 않아 충격과 불안정성이 생기는 것으로 생각된다. 그러나, 이러한 문제는 RoeM 2에서는 발생하지 않는 것을 확인할 수 있다.

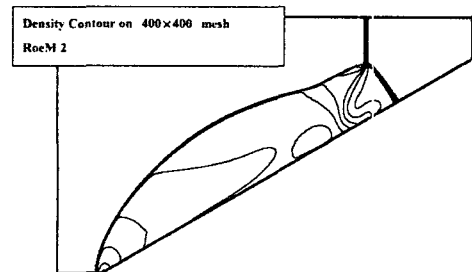


Fig. 7 Double mach reflection

4.2 점성유동 예제

수치기법의 정확성을 검증하고자 박리현상이 존재하는 충격파/경계층 상호작용 문제와 난류 유동인 RAE2822 익형 문제, 그리고 열전달 현상이 존재하는 극초음속 문제를 선정하였다.

그림 8은 충격파/경계층 상호작용의 결과로 유동조건은 $M_\infty = 2.0$, $Re_\infty = 2.96 \times 10^6$ 충격파 입사각 $\theta = 32.585^\circ$ 이다. Van Leer 제한자를 이용하여 2차의 공간정확도를 유지하였다. 제안된 수치기법의 결과가 Roe의 FDS와 차이가 없이 박리영역을 포착하고 있으며, 정량적으로도 일치하는 결과를 보이

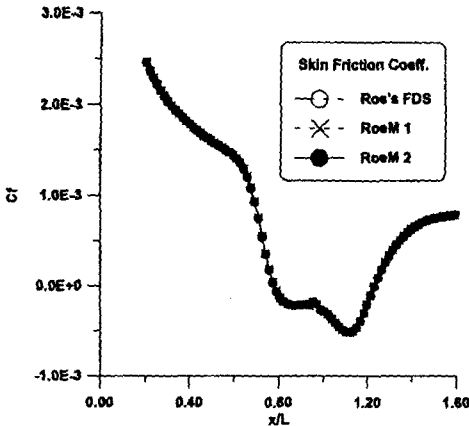


Fig 8 Skin friction coefficients of shock-boundary layer interaction

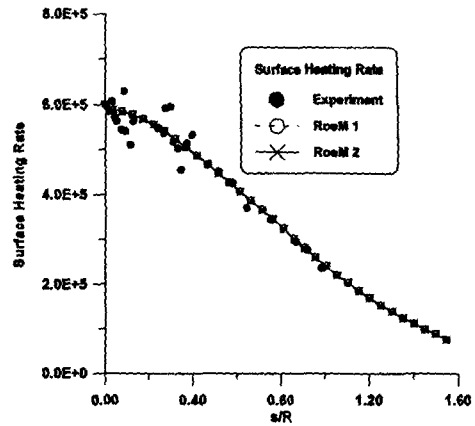


Fig. 10 Surface heating rate

고 있다. 그림 9는 Baldwin-Lomax 난류 모델을 이용하여 RAE2822 case 9에 해당하는 문제의 압력계수 곡선이다. C-type의 241×49 격자계를 사용하였으며, 유동조건은 $M_\infty = 0.73$, $Re = 6.5 \times 10^6$, $AOA = 2.919^\circ$. 각 수치기법이 모두 동일한 결과를 보이고 있음을 확인할 수 있다. 그림 10은 실린더 주위의 열전달량을 나타낸 곡선이다. $Re = 1.4972 \times 10^5$, $T_\infty = 52K$, $T_{wall} = 294.4K$, $P_\infty = 82.95(N/m^2)$, $\rho_\infty = 5.557 \times 10^{-3}(kg/m^3)$, $M_\infty = 16.32$ 위 유동이며, minmod 제한자를 이용하여 3차의 공간정확도를 유지하였다.

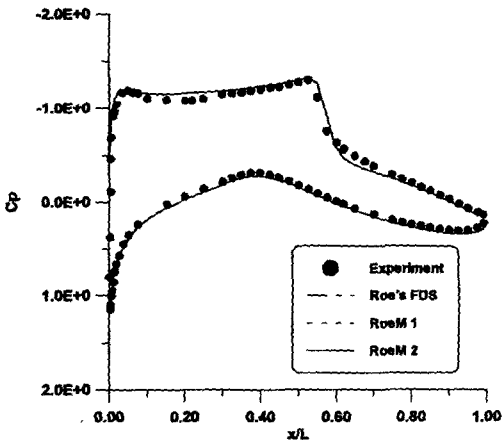


Fig. 9 Cp distribution around RAE2822

Roe의 FDS는carbuncle 현상으로 수치해를 얻을 수 없었다. RoeM 1과 RoeM 2 모두 실험값과 일치하는 결과를 보이고 있다.

5. 결론

Roe의 FDS를 근간으로 마하수를 이용한 함수를 도입하여 충격파 안정성을 획득한 새로운 수치 기법을 제시하였다. 새로운 wave speed를 도입하여 팽창영역에서의 불안정성 문제를 해결하였으며, 열전달량 문제의 정확성을 위하여 총 엔탈피를 보존하도록 하였다. 다양한 예제를 통하여 제안된 수치기법의 충격파 안정성과 수치해의 정확성을 확인할 수 있었다.

본 연구는 국방과학연구소의 기초연구 사업과 BK-21의 지원으로 수행된 연구결과이며 지원에 감사 드립니다.

참고문헌

- [1] Quirk, J.J., Int. J. for Numer. Meth. in Fluids, Vol. 18, (1994) p.555
- [2] Gressire, J. et al., Int. J. Numer. Meth. in Fluids. Vol. 33, (2000), p. 313
- [3] Snaders, R. et al., J. of Computational Physics, Vol. 145, (1998), p. 511
- [4] Xu, K., VKI LS 1998-03, Vol. 1 (1998)
- [5] Liou, M. S., J. of Computational Phycsis, Vol. 160, (2000), p. 623