

Eulerian-Lagrangian 방법을 사용한 임의 물체주위 유동해석의 정도 향상을 위한 연구

A Study of Accuracy Improvement of an Analysis of Flow around
Arbitrary Bodies by Using an Eulerian-Lagrangian Method

*박일룡(1), 전호환(2)

Il-Ryong Park, Ho-Hwan Chun

An Eulerian-Lagrangian method, so called immersed boundary method, is used for analysing viscous flow around arbitrary bodies, where governing equations are discretized on a regular grid by using a finite volume method. To improve the accuracy of flow near body boundaries, a second-order accurate interpolation scheme is used and a level-set based grid deformation method is presented to construct the adaptive grids around body boundaries. The present scheme is used to simulate steady flow around a semicircular cylinder mounted on the bottom of flow domain and calculated results are validated by results of a body fitted grid method. Finally, present method is applied to a complex flow around multi body and the usefulness is checked by investigating calculated results.

1. 서론

일반적으로 점성유동의 해석에 있어서 임의의 형상을 가지는 물체주위의 유동해석은 정렬과 비정렬 격자계를 포함해서 물체적합격자계(body fitted grid system)를 사용하여 많이 해석해 오고 있으며, 상당히 발달된 격자생성법들이 연구되고 있다. 다른 한편으로는 기본적으로 Cartesian 격자계에 바탕을 두고 Eulerian 개념을 사용하여 격자를 통과하여 지나가는 물체경계면을 다양한 방법으로 정의하고 경계조건을 여러 가지 방법으로 만족시켜서 해석하는 연구들 또한 활발히 진행되고 있다[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Eulerian법을 사용한 방법을 크게 3가지로 나누어 설명하면 다음과 같다. 참고문헌[1, 2, 3]에서와 같이 유한체적법(Finite Volume Method)을 사용하고 물체경계면이 지나가는 임의의 격자선들을 찾아내어 물체경계면을 포함하고 있는 각각의 단위 검사체적의 경계면들을 재구성하거나 물체경계면의 존재로 인한 플럭스의 변화를 정확히 계산하고 고려하여 임의 물체주위의 유동문제를 해석하는 방법들이다. 이 방법들은 매우 복잡한 형상을 가지는 물체에 대해 Eulerian 개념으로 정의하여 물체적합격자계를 사용한 계산결과 만큼이나 정확한 해석결과를 얻을 수 있는 방법이다. 하지만 계산과정이 매우 복잡한 방법들이고 물체가 움직이거나 변형을 일으키는 문제에 적용하는대는 더욱 부과된 복잡성을 가지게 된다. 또 다른 방법[4, 5]들은 소위 Immersed Interface Method라 부르며 유한차분법(Finite Difference Method)를 바탕으로한 방법들이 있다. 이들은 Cartesian 격자계 내에서 물체가 존재하는 위치를 정하고 물체경계면에서 고차의 내삽법을 통해서 2차 정도의 불연속 조건(jump condition)을 부과하여 물체경계조건을 매끄럽고 비교적 정확하게 정의하는 2

차 정도의 정확성을 가지는 조금 복잡한 방법이다. 마지막으로 앞서 설명한 방법들보다 조금 덜 복잡한 방법으로서 Immersed Boundary Method 또는 Virtual Boundary Method가 있다[6, 7, 8, 9, 10]. 이 방법들은 Immersed Interface Method방법과 마찬가지로 연속적인 물체의 경계면을 수개의 Lagrangian 요소로 나누어 계산하는 개념을 포함하고 있어서 Eulerian-Lagrangian법으로 분류된다. Immersed Boundary Method는 물체의 존재나 운동 그리고 변형정보를 지배방정식의 생성함에 외력으로 첨가된 정식화에 바탕을 두고 있어서 보다 쉬운 계산 알고리즘과 함께 공학적인 응용성이 뛰어난 방법으로 볼 수 있다. Immersed Boundary Method는 경계근방에서 해의 정도가 낮은 편이다. 지배방정식의 외력항으로 정의된 물체경계면에 대한 정보를 보다 정확하게 하는 것이 이 방법의 정도를 높이는 길이다.

본 논문에서는 유한체적법을 사용하여 지배방정식을 이산화하고 Immersed Boundary Method를 사용하여 보다 개선된 임의의 물체주위 유동해석을 위한 연구내용을 소개하였다. 물체근방에서 해의 정도를 향상시키기 위해 최근 소개된 level-set법을 사용한 집중격자생성법[11]을 도입하였다. 2차원 정상문제에 적용하여 물체적합격자를 사용한 결과와 비교하여 본 방법의 정확성을 검증하고 다 물체(multi body) 주위 유동해석을 수행하여 본 방법의 유용성을 검증하였다.

2. 지배방정식 및 물체경계조건

임의의 물체주위의 유체의 운동은 다음과 같이 비압축성 Navier-Stoke방정식에 의해 지배된다.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

1) 부산대학교 조선해양공학과 (박사후 연구과정, pir96@hyowon.cc.pusan.ac.kr Tel : 051-510-2757)

2) 부산대학교 조선해양공학과 (부산시 금정구 장전동 산30 Tel.: 051-510-2341)



$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{F} \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$ 인 속도벡터를 나타내고, $p(\mathbf{x}, t)$ 는 압력 그리고 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 는 외력항을 각각 나타낸다. ρ, μ 는 유체의 밀도와 점도이다.

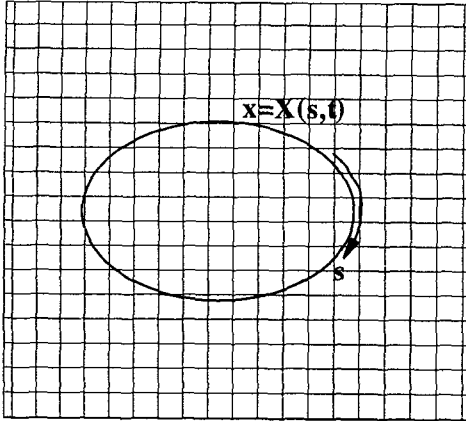


Fig. 1 Sketch of the immersed boundary

Fig. 1의 그림에서 볼 수 있듯이 유동장 중에 고정 또는 이동 그리고 변형을 하는 물체의 위치를 $\mathbf{x} = \mathbf{X}(s, t)$ 로 정의할 수 있으며, 여기서 s 는 물체의 경계면을 따르는 경로를 나타낸다.

유동장 가운데 존재하는 물체의 정보와 움직임과 변형 등은 물체 경계면에서의 외력항은 아래와 같이 정의될 수 있다.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \int_r \mathbf{f}(s, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(s, t)) ds \quad (2)$$

여기서 $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)$ 인 두 방향의 Dirac delta 함수의 곱을 나타낸다.

식(2)는 물체의 움직임과 변형에 대한 유동장에 끼치는 외력은 물체의 경계면 위에서만 존재하고 다른 영역에서는 없다는 것을 이상적으로 정식화한 것이다. $\mathbf{f}(s, t)$ 는 물체의 움직임과 변형에 따라 정의할 수 있는 경계면상에서의 외력성분을 나타낸다. 이와 같은 물체에 경계조건의 정식화를 통해서 임의의 물체주위 유동에 대해 식(2)를 사용한 수치계산법을 도출해 낼 수 있다.

3. 수치해석법

임의 물체 주위 유동장은 단일 영역의 $N_X \times N_Y$ 의 격자계로 나타내고, 연속적인 물체 경계면은 Lagrangian 개념을 사용하여 N_B 개의 선 요소로 표현할 수 있다. 식(2)에서 사용된 불연속 Dirac delta 함수는 수치적으로 물체 경계면에 분포된 외력을 유동장으로 외삽하기 위해 다음과 같이 미소 영역에서 연속된 함수로 나타낼 수 있다.

$$\delta_{2h}(x_i, y_j) = d(x_i)d(y_j)$$

$$d(r) = \begin{cases} \frac{1}{4h} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi r}{2h}\right)\right) & \text{if } |r| < 2h \\ 0 & \text{if } |r| \geq 2h \end{cases} \quad (4)$$

여기서 h 는 격자간격이다.

본 논문에서는 물체의 변형은 무시하였으며 물체 경계조건을 만족시키기 위해 다음과 같은 외력의 정의를 사용하였다[1].

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}_s, t) = \alpha \int_0^t [\mathbf{u}(\mathbf{X}_s, t') - \mathbf{u}_b(\mathbf{X}_s, t')] dt' + \beta [\mathbf{u}(\mathbf{X}_s, t) - \mathbf{u}_b(\mathbf{X}_s, t)] \quad (5)$$

여기서 α, β 는 음의 부호를 가지는 상수이고, \mathbf{u}_b 는 물체의 속도를 나타낸다. 물체 내부의 비물리적인 유동을 억제하기 위해 물체내부영역에서도 외력을 적용시켰다. 이러한 외력작용법에 대한 자세한 설명은 [10]을 참조할 수 있다.

임의 물체주위 유동장 해석을 위해 앞서 서술한 수치기법을 사용하고 지배방정식은 유한체적법을 사용하여 이산화 하여 해석하였다[12]. 물체경계면에서의 유속의 계산은 2차 정도의 Lagrangian polynomial를 사용한 형상함수를 도입하여 내삽하였다.

4. Level-Set법을 사용한 집중격자 생성

Eulerian-Lagrangian법을 사용하여 물체주위 유동을 해석할 경우 물체경계면 근방에서의 해의 정도는 낮다. 이를 해결하기 위한 여러 가지 방법 중 격자계를 개선해서 해의 정도를 높이는 방법이 있다. 본 연구에서는 단일 격자계 내에서 경계면 근처로 격자를 집중시키는 level-set개념을 이용한 집중격자생성법 도입하여 해의 정도를 높여 시도하였다. (x, y, z) 영역에서 $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ 의 영역으로 변환할 때

Jacobian은 $\mathcal{J}(\Phi) = \det \nabla \Phi = |dA'|/|dA|$ 이다. 여기서 A 는 체적 또는 2차원의 경우 면적을 나타낸다. 적절한 격자계의 변형을 얻기 위해서 $\mathcal{J}(\Phi) = 1/f(\Phi, t)$ 를 만족하는 모니터 함수 $f(\Phi, t)$ 를 사용하여 격자속도를 결정하고 구하여진 격자속도를 사용하여 level-set 곡선들을 이동시킨다. 그런 후 교차점들을 통해서 새로운 격자점들을 결정할 수 있다. 격자점들의 속도분포를 \mathbf{v}_g 라고 할 때 $f(\Phi, t)$ 가 Jacobian과의 관계가 성립되도록 다음의 조건으로 결정할 수 있다.

$$g_t + \nabla \cdot (g \mathbf{v}_g) = 0 \quad (6)$$

여기서 $g = 1/f$ 이다.

주어진 함수 f 로부터 속도 \mathbf{v}_g 는 식(6)에서 다음의 Poisson 방정식, $\nabla \cdot (g \mathbf{v}_g) = -g_t$ \rightarrow

$\nabla^2 w = -g_i$ 를 풀어 다음과 같이 구한다.

$$v_g = \nabla w / g \tag{7}$$

여기서 $w = (g \cdot v_g)$ 이다.

이렇게 구해진 속도를 통해서 다음의 level-set함수에 대한 방정식을 풀어서 새로 변형된 격자점들을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi_t(x, y, t) + \langle \nabla \phi, v_g \rangle &= 0 \\ \psi_t(x, y, t) + \langle \nabla \psi, v_g \rangle &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

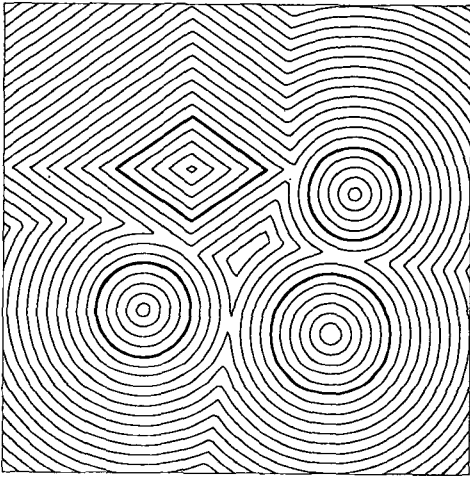


Fig. 2 Level-set function plots around bodies

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 일 경우 초기조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi(x, y, 0) &= x, \psi(x, y, 0) = y, \text{ at } t=0 \\ \phi(0, y, t) &= 0, \phi(1, y, t) = 1, \\ \phi(x, 0, t) &= \phi(x, 1, 0) = x \\ \psi(x, 0, t) &= 0, \psi(x, 1, t) = 1, \\ \psi(0, y, t) &= \psi(1, y, 0) = y \end{aligned} \tag{9}$$

Fig. 2는 Level-set법을 사용한 격자변형의 예제를 위해 준비된 4개 물체의 경계면에 대한 거리의 함수로 정의된 Level-set 함수의 분포를 보이고 있다. 예제에 사용된 모니터 함수 f 는 다음과 같다 [11].

$$f = \begin{cases} 1 - 2t + 2k(0.2 - 8d) & \text{if } -0.1 < d < 0 \\ 1 - 2t + 2k(0.2 - 8d) & \text{if } 0 < d < 0.1 \\ 1 & \text{if } |d| > 0.1 \end{cases} \tag{10}$$

여기서 d 는 level-set 함수이다.

Fig. 3은 계산된 속도포텐셜 w 의 분포를 보이고 있다. 경계면 근방에서의 포텐셜의 구배가 큰 것을 볼 수 있으며 level-set함수가 영에 가까운 이 영역에서의 격자의 집중도가 높을 것이라는 예상되는 결과를 Fig. 4에서 물체 경계면 주위로 집중된 격자계를 통해 볼 수 있다. 모니터함수의 적절한 선택을

통해 집중도를 조절할 수 있다.

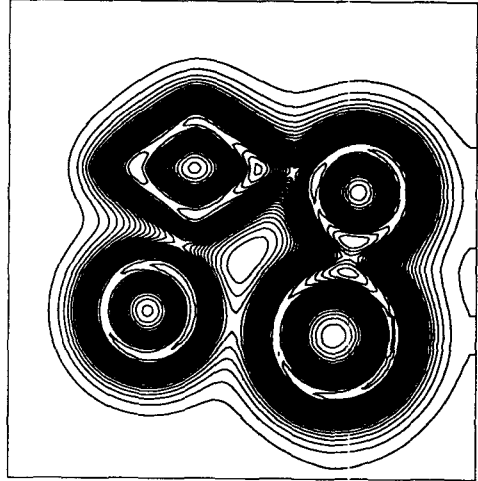


Fig. 3 Velocity potential w function plots

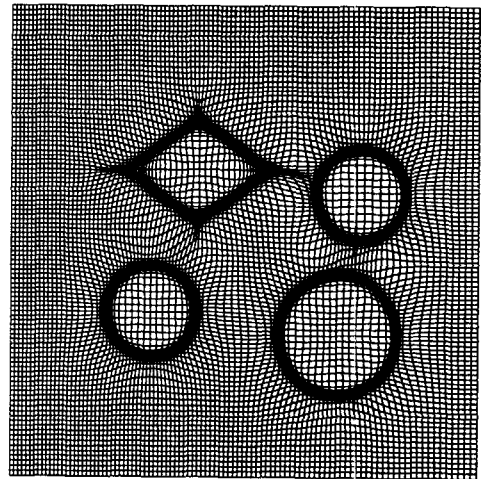


Fig. 4 Level-set adaptive grid plots

5. 결과 및 토의

Level-set법을 사용한 새로운 격자변형법을 사용하여 단일격자계 내에서의 입의의 활체주위 유동해석의 정도향상을 위한 검증으로서 바닥 면에 돌출되어 있는 반원 실린더 주위의 정상(steady) 점성유동해석을 하였다. 경계조건을 처리하지 않은 계단형상으로 계산된 결과와 일반적으로 활체주위 영역으로만 격자를 집중시켜 계산된 결과를 본 연구에서 제시한 방법과 함께 물체적합격자계를 사용한 수치계산결과와 비교하여 해의 정도를 검증하였다. 비교내용은 물체경계면에서의 유속에 대한 오차와 물체적합격자계를 사용한 계산결과를 해석해로 여기고 유동장 영역에서의 오차값을 비교하여 나타내었으며

그 오차값은 다음의 l_2 -norm으로부터 구하였다.

$$\epsilon_{body} = \sqrt{\frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{N_B} (u_i)^2}$$

$$\epsilon_{domain} = \sqrt{\frac{1}{N_x N_y} \sum_{i,j=1}^{N_x N_y} (u_{i,j} - u_{i,j}^{body\ fitted\ grid})^2}$$

(11)

수치계산 결과의 마지막에는 단순한 단일 격자계를 사용한 본 방법을 여러 물체가 존재하는 복잡한 문제에 적용하여 보다 본 논문에서 제시하는 방법의 유용성과 공학적 다양한 응용가능성을 보이려 하였다. 유동장의 바닥에 고정된 반원주위의 점성유동문제에 사용된 격자수는 100×25 , 150×38 , 200×50 CVs(control volumes)를 사용하였고, 반원의 반경은 $0.25m$, 유장의 크기는 $0 \leq x \leq 4m$, $0 \leq y \leq 1m$, $Re = 100$ 이다. 물체적합격자계의 경우 150×50 CVs를 사용하였다.

Fig. 5는 유동장 바닥면에 돌출되어 있는 반원주위의 물체적합격자계의 모습과 단순히 반원주위 영역으로 격자를 집중시킨 것과 level-set법을 사용하여 경계면 근처로 격자를 집중시킨 격자계의 모습을 보여주고 있다. 앞서 level-set 집중격자법의 예에서 보여 주었던듯이 반원주위로 잘 집중된 격자를 볼 수 있다.

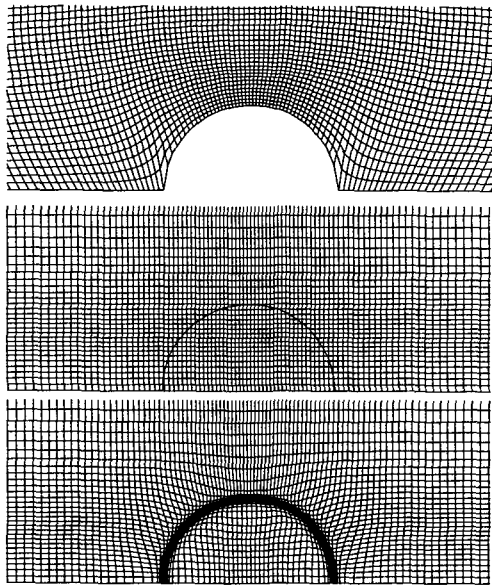


Fig. 5 Grids used for simulation of flow around semicircular cylinder

Table 1은 물체경계면에서는 유속이 없어야 된다는 조건에 대한 만족도를 서로 다른 계산조건에 대해 비교하였다. 물체경계조건을 Eulerian

-Lagrangian법으로 처리한 결과는 적은 격자수에서도 계단모양 그대로 계산한 결과보다 더 정확히 물체경계조건을 잘 만족시키고 있는 것을 보여주고 있다. 본 논문에서 적용한 level-set법을 사용한 집중격자생성법을 사용한 결과를 살펴보면 사용하지 않은 경우보다 일차 정도의 매우 향상된 경계조건 만족성을 보여주고 있다.

Table 2의 내용에서도 영역에 대한 속도분포 해의 결과를 물체적합격자계를 사용하여 정확히 경계조건을 만족시킨 계산결과와 비교한 것을 살펴보면 level-set 집중격자법을 도입한 결과가 도입하지 않은 결과보다 한 차수에 가까운 정도의 해의 정확성을 보여주고 있다.

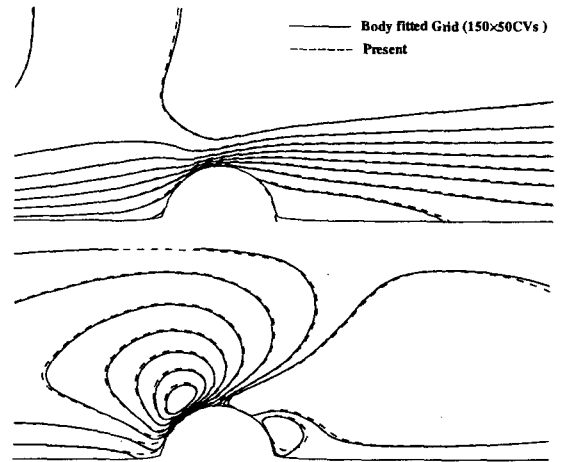


Fig. 6 Velocity contours compared with the result of body fitted grid (upper: u-velocity, lower: v-velocity)

Fig. 6은 생성된 집중격자계를 사용한 계산된 속도분포를 물체적합격자계의 계산결과와 비교하여 나타낸 그림이다. 경계면 근방을 포함하여 전반적으로 약간의 차이를 보이고 있지만 만족할 만한 일차도를 보여주고 있다.

다음의 계산결과를 임의로 배치된 한 개의 사각실린더와 4개의 크고 작은 원형 실린더 주위의 $Re = 200$ 에서의 복잡한 유동문제에 대해 적용한 것을 보여준다. 여기서 D 는 가장 큰 원의 직경 ($0.3m$)을 나타낸다. 유장의 크기는 유장의 크기는, $0 \leq x \leq 5m$, $0 \leq y \leq 1.6m$, 격자수는 200×150 CVs이다. 이 경우의 유동장은 비정상 상태를 보이며 어느 한순간의 유선의 형태를 Fig. 7에서 보여주고 있다. 물체주위의 유동들이 각각의 물체의 들의 영향으로 복잡한 형태를 보이고 있으며 여러 군데의 순환영역을 보여주고 있다.

Fig. 8은 유동장에서 속도성분들과 와류들의 분포를 보여주고 있다. 와류의 분포는 복잡하고 와류와 와류 그리고 와류와 물체들의 상호작용들을 잘



Table 1 Comparison of errors(ϵ_{body})

gridsize	steplike bounday		no adaptive		level-set adaptive grid	
	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>u</i>	<i>v</i>
100×25	7.2548E-2	2.9848E-2	4.9810E-3	2.6842E-3	1.0915E-3	4.7924E-4
150×38	6.4900E-2	2.3321E-2	3.3602E-3	1.6550E-3	5.6226E-4	2.7315E-4
200×50	5.3571E-2	1.9478E-2	2.8444E-3	1.3458E-3	3.5166E-4	1.7993E-4

Table 2 Comparison of errors(ϵ_{domain})

gridsize	no adaptive		level-set adaptive grid	
	<i>u</i>	<i>v</i>	<i>u</i>	<i>v</i>
100×25	4.0703E-2	1.1231E-2	9.6153E-3	4.3343E-3
150×38	3.2424E-2	9.1404E-3	9.3337E-3	3.5688E-3
200×50	2.0007E-2	6.8289E-3	7.3202E-3	3.2795E-3

관찰할 수 있다. Level-set 집중격자법을 사용한 본 계산의 경우 물체의 경계면에서의 해의 정도를 높였는데 경계면 근방에서의 물체경계에 대한 비교적 매끈한 와류분포의 등고선 형태를 잘 보여주고 있다.

6. 결론

본 연구에서는 물체주위의 점성유동해석을 Eulerian-Lagrangian법, 소위 Immersed Boundary Method의 일종을 사용하여 수행한 해석결과를 개선하기 위해 최근 소개된 level-set 법에 바탕을 둔 집중격자 생성법을 접목하였다. Eulerian-Lagrangian법이 가지는 물체근방에서의 해의 정도가 낮은 점을 보완하기 위해서 2차정도의 내삽법을 사용하였으며 경계면 근방으로 level-set법을 사용한 집중격자생성법을 사용하여 물체 근방에서의 격자의 해상도를 높였다. 2차원 정상문제의 적용결과에서 물체경계면조건과 유동장 전반에 대한 해의 정도가 개선된 결과를 얻을 수 있었다. 이렇게 개선된 방법으로 복잡한 다 물체주위의 유동해석에서도 타당한 수치계산결과를 보여 주었다.

Eulerian-Lagrangian법은 매우 복잡한 물체 또는 물체가 변형을 일으키거나 운동을 하는 경우 적용하기 용이한 방법이다. 앞으로 3차원 문제에서의 검증과 함께 운동과 변형을 일으키는 문제에 본 방법을 적용하여 해의 정도를 검증하고 공학적 이용의 유용성에 대해 더욱 연구해야 할 것으로 보인다.

참고문헌

[1] Mittal, T. Ye., Udaykumar, H. S., and Shyy, W., "An Accurate Cartesian Grid Method for Viscous Incompressible Flows with Complex Immersed Boundaries", Journal of Computational Physics, 156 (1999), pp.209-240.

[2] Calhoun, Donna and LeVeque, Randall, J., "A Cartesian Grid Finite-Volume Method for the Advection-Diffusion Equation in Irregular Geometries", Journal of Computational Physics, 157 (2000), pp.143-180.

[3] Marcus, S. Day, Phillip, Colella, Micheal, J. Lijewski, Charles, A. Rendleman and Daniel, L. Marcus, "Embedded Boundary Algorithms for Solving the Poisson Equation on Complex Domains", Report 65N55, 33J05, 94C15, Lawrence Berkeley National Laboratory Berkeley, CA, 94720

[4] Udaykuma, H. S., Kan, Heng-Chuan, Shyy, Wei, and Tran-Son-Tay, Roger, "Multiphase Dynamics in Arbitrary Geometries on Fixed Cartesian Grids", Journal of Computational Physics, 137 (1997), pp.366-405.

[5] LeVeque, R. J., and Li, Z., "The Immersed Interface Method for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients and Singular Sources", SIAM J. Num. Anal., 31 (1994), pp.1019-1044

[6] Fadlun, E. A., Verzicco, R., Orlandi, P., and Mohd-Yusof, J., "Combined Immersed Boundary Finite-Difference Methods for Three-Dimensional Complex Flow Simulations",

- Journal of Computational Physics, 161 (2000), pp.35-60
- [7] Cortez Ricardo, "An Impulse-Based Approximation of Fluid Motion due to Boundary Forces", Journal of Computational Physics, 123 (1996), pp.341-353.
- [8] Stokie, John, and Wetton, Brian R., "Analysis of Stiffness in the Immersed Boundary Method and Implications for Time-Stepping Schemes", Journal of Computational Physics, 154 (1999), pp.41-64.
- [9] Saiki, E. M., and Biringen, S., "Numerical Simulation of a Cylinder in Uniform Flow: Application of a Virtual Boundary Method", Journal of Computational Physics, 123 (1996), pp.450-465
- [10] Goldstein, D., Handler, R., and Sirovich, L., "Modeling a No-Slip Boundary with an External Force Field", Journal of Computational Physics, 105 (1993)
- [11] Liao, Guojun, Liu, Feng, de la Pena, Gary C., Peng, Danping, and Osher, Stanley, "Level-Set-Based Deformation Methods for Adaptive Grids", Journal of Computational Physics, 159 (2000), pp.103-122
- [12] Ferziger, J. H., and Perić, M., Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, 1996

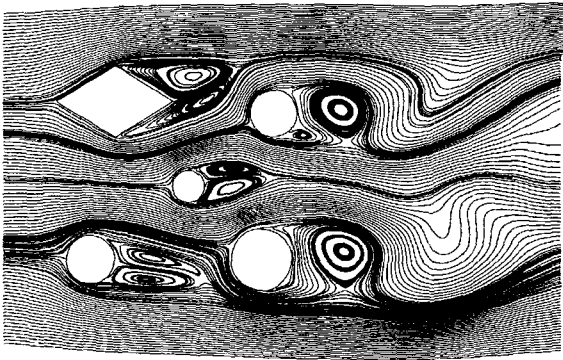
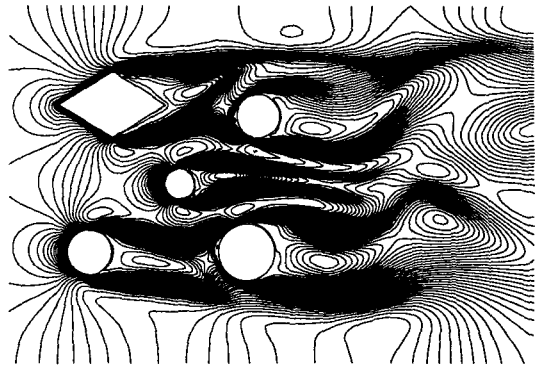
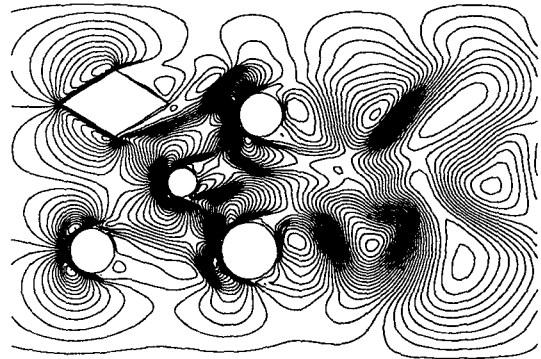


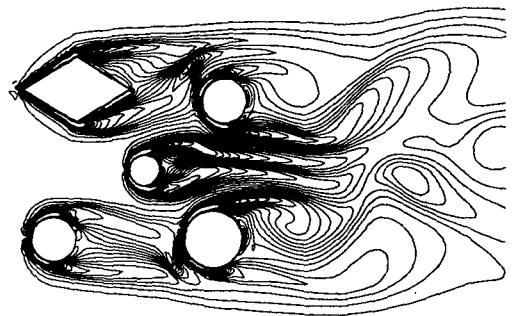
Fig. 7 Instantaneous streamlines of flow around multi body at $R_D=100$



(a) u-velocity



(b) v-velocity



(c) vorticity

Fig. 8 u-velocity, v-velocity & vorticity contours of flow around multi body at $R_D=100$