

예조건화기법을 이용한 유동장 및 반응유동장의 계산

Computation of Non-reacting and Reacting Flow-Fields

Using a Preconditioning Method

고 현^{1)*}, 윤용섭²⁾

Hyun Ko, Woong-Sup Yoon

In this paper, non-reacting and reacting flowfields were computed using a preconditioned Navier-Stokes solver. The preconditioning technique of Merkle et al. and TVD scheme of Chakravarthy and Osher was employed and the results obtained using developed code have a good agreement with the previous results and experimental data. The preconditioned Navier-Stokes equation set with low Reynolds number $k-\epsilon$ equation and species continuity equations, are discretized with strongly implicit manner and time integrated with LU-SSOR scheme. For the purpose of treating unsteady problem, the dual-time stepping scheme was employed. For the validation of the code in incompressible flow regime, steady driven square cavity flow was considered and calculation result shows reasonably good agreement with the result of incompressible code. Shock wave/boundary layer interaction problem was considered to show the shock capturing performance of preconditioned-TVD scheme. To validate unsteady flow, acoustic oscillation problem was calculated, and supersonic premix flame of H_2 -air reaction problem, which is calculated with turbulence model, 9-species/18-reaction step reaction model, shows reasonable agreement with the previous results. As a result, the preconditioning method has an advantage to calculate incompressible and compressible flow through one code and preconditioned solver easily developed from standard compressible code with minor efforts. But, additional computational time and computer memory is required due to preconditioning matrix.

1. 서론

공학적 관심의 대상이 되는 연소 문제는 대부분 저 마하수에서 발생하며, 로켓 엔진, 가스 터빈 엔진, 자동차 엔진 등을 그 대표적인 예로 들 수 있다. 전산기의 활용 분야의 급진적인 확대와 더불어, 저속에서 발생하는 연소현상을 전산유체 역학을 도입해 해석하고자 하는 수많은 연구가 진행되어왔으며, 그 대표적인 예로서 TEACH형의 프로그램을 들 수 있다. TEACH형의 프로그램은 지난 20여 년 동안 광범위하게 사용되어 왔으며 비교적 간단하게 보강될 수 있으나 화학발생항(chemical source term)의 외재적(explicit)인 처리와 항렬적인 해법의 적용으로 인하여 수렴성이 약하다. 지난 수년간의 CFD기법의 발전과 이의 적용을 위한 전산기의 진보로 인한 연소장계산의 범위가 넓어지고 있으며 알고리즘의 복잡성과 대규모의 컴퓨터 용량을 필요로 하는 시간전진 기법을 이용한 내재적인 전산모사 방법들이

압축 및 비압축성 유동장의 계산에 적용되고 있다. Shuen과 Yoon[1]은 고속의 유동에 병행한 연소장의 계산을 위한 내재적 방법을 제시하였으나 이 방법은 저속의 유동장 계산에는 적용하기 어렵다. 압축성 지배방정식에 시간전진 기법을 적용하는 경우, 저 마하수에서 고유치의 큰 차이로 인해 경직성(Stiffness)이 발생하여 수렴성이 심각하게 저하되기 때문이다[2,3,4,5].

저 마하수에서 수렴저하 문제를 해결하기 위해 대두된 대표적인 방법으로는 압축성 지배방정식의 고유치를 재조정하기 위해 시간미분항에 예조건 행렬을 미리 곱하여 지배방정식의 특성을 변환하는 방법으로, 인공압축성(Artificial compressibility) 기법의 아이디어에서 출발하는 Merkle[2], Turkel[6]의 기법, 그리고 최대 특성속도와 최소 특성속도의 비로 정의되는 조건수(condition number)의 직접적인 제어를 위한 van Leer 등[7,8]의 예조건화기법을 들 수 있다. 그리고, Navier-Stokes 방정식 계를 원시변수(primitive

1) 연세대학교 대학원 기계공학과

2) 연세대학교 기계공학과



variable) 형태로 변환하여, 고유치의 크기를 조절하는 Weiss 등[4]의 방법이 있다. 이 중에서 van Leer 등의 방법은 대각화변수 (Symmetrizing Variable)의 도입을 통해 Navier-Stokes 방정식을 직접적으로 변환하므로, 저속과 음속점을 포함하는 모든 마하수에서 1의 차수를 갖는 조건수를 얻을 수 있는 반면, 기존의 압축성 코드의 상당 부분을 재작성 하여야 한다는 단점이 있으며 아직 난류와 연소장의 계산에 대한 성공적인 연구 결과가 보고되지 않는 실정이다. 이에 반해, Merkle 등[1]의 예조건화기법은 지배방정식의 시간미분항만이 변경되기 때문에 기존의 압축성 코드의 일정 부분 만을 수정하여 적용할 수 있다는 장점을 가지고, 따라서 기존의 난류모델 그리고 다원 화학종을 포함하는 코드로의 확장도 용이하므로, 본 연구에서는 Merkle 등의 예조건화기법을 도입하였다. 또한, 유동의 강한 불연속성의 포획을 위해 Chakravarthy 과 Osher [9]의 TVD 기법을 예조건화기법에 확장한 Yang [10,11]등의 방법을 도입하였다.

난류의 포함으로 인해, 평균 유동의 스케일과 난류의 시간 스케일의 차이로 인해 경직성이 발생하므로, 본 연구에서는 난류 생성항을 내재적으로 처리하였다. 화학반응 역시 아주 짧은 시간 스케일을 갖기 때문에, 특히 저속의 반응 유동장의 경우에는 유동의 특성시간과 화학반응의 특성 시간 사이에 큰 차이가 발생하게 되어 또 다른 경직성을 유발하게 된다. 이를 위해 정상상태 반응 유동장의 해석을 위해 생성항을 내재적으로 처리하는 방법이 일반적으로 이용되고 있으며, 본 연구에서도 화학반응항을 강하게 연계하여 내재적으로 처리하였다.

앞에서 열거한 수치해석적 방법들을 이용하여 본 연구에서는 2차원, 축대칭 Reynolds averaged Navier-Stokes 방정식을 이용해, 비압축성 캐비티 유동의 해석을 통해 저속에서의 유동장을 검증하고, 충격파/경계층 상호작용 문제에 적용하여 초음속 유동장을 검증한다. 반응 유동장의 검증을 위해 수소-공기의 9 화학종/18 단계 상세반응을 적용해 에혼합 화염을 해석하고, 이중시간진진 기법을 적용하여 음향파의 교란 문제를 해석하여 비정상 해를 검증한다

2. 예조건화 지배방정식

2.1 공식화 (Formulation)

인공적인 시간항에 대해 예조건화를 수행하여 다음의 일반좌표계에 대한 2차원, 축대칭 Navier-Stokes 방정식을 구성하였다

$$\Gamma \frac{\partial Q_i}{\partial \tau} + \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \frac{\partial(E - E_i)}{\partial \xi} + \frac{\partial(F - F_i)}{\partial \eta} = H \quad (1)$$

여기서 $Q_i = (\rho, u, v, T, k, \epsilon, Y_i)$ 이며, Q 는 보존형 변수, E, E_i 와 F, F_i 는 비점성, 점성 유속벡터, H 는 축대칭, 난류 및 화학반응을 포함하는 생성항을 나타내며, Γ 는 예조건화행렬이다.

가스의 열역학적 상태를 표현하기 위해 열적완전기체 (Thermally Perfect Gas)로 가정하였고, 각 화학종의 정압비열, 열전도계수, 점성계수 등의 열역학적 물성치는 온도에 관한 다항식으로 표현되는 실험치를 사용하였다[13]. 혼합가스의 점성계수와 열전도 계수는 Wilke의 혼합법칙을 이용하여 구하였고, 확산계수는 Lennard Jones의 potential을 이용하는 Chapman-Enskog 이론을 적용하여 계산하였다[14].

난류 모델은 $k-\epsilon$ 을 모델을 사용하였다. 표준 $k-\epsilon$ 모델은 벽면의 영향을 고려하지 않기 때문에, 벽면에서 난류 운동에너지가 영이 되어, 난류에너지 소산을 방정식에 특이성(Singularity)이 발생하는 문제점이 있으며, 이를 위해 벽함수(Wall-function)를 벽면 근처에서 적용하지만, 모든 형상에 대해 일반적으로 적용되는 벽함수의 부재로, 본 연구에서는 벽함수를 필요로 하지 않는 저 레이놀즈 수 $k-\epsilon$ 모델 중 Shih 과 Lumley[12]에 의해 제안된 2방정식 $k-\epsilon$ 모델을 사용한다. 이 모델은 벽 근처에서 난류의 모든 스케일이 Kolmogorov 마이크로 스케일에 의해 결정되므로, 벽 근처에서의 난류 에너지와 에너지 소산율을 계산하여 경계조건으로 사용함으로써 벽면 효과를 위해 $k-\epsilon$ 방정식에 특별한 수정을 가하지 않아도 된다는 장점이 있다.

연소모델로는 질소를 비활성 기체로 가정하여 해리반응을 무시한 수소와 공기의 9 화학종 18 반응단계를 갖는 상세 화학반응 모델을 적용하였다[15]

2.2 예조건화 (Preconditioning)

시간 미분항에 곱해지는 예조건화 행렬은 대류항과 음향파의 큰 속도 차이에서 기인하는 저 마하수에서의 수렴 저하 문제를 해결하는 데 있다. 본 연구에서 적용한 예조건 행렬은 다음과 같다 [1].

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \rho'_p & 0 & 0 & \rho'_r & \rho_r & 0 & \rho_r \\ u\rho'_p & \rho & 0 & u\rho'_r & u\rho_r & 0 & \rho_r \\ v\rho'_p & 0 & \rho & v\rho'_r & v\rho_r & 0 & \rho_r \\ h_p \rho'_p - (1-\rho h_p) \rho u & \rho v & h_p \rho'_r + \rho h_r & \frac{5}{3} \rho + \rho h_p + h_p \rho_r & 0 & h_p \rho_r + \rho h_r \\ k\rho'_p & 0 & 0 & k\rho'_r & k\rho_r & 0 & k\rho_r \\ e\rho'_p & 0 & 0 & e\rho'_r & e\rho_r & \rho & e\rho_r \\ Y\rho'_p & 0 & 0 & Y\rho'_r & Y\rho_r & 0 & Y\rho_r + \rho \delta_r \end{bmatrix}$$

여기서 아래 첨자는 미분을 의미한다. Merkle 등 [1]이 제안한 예조건화기법은 섭동이론 (Perturbation Theory)를 적용해 유동의 물리적인 스케일을 비교하여, 저 마하수에서 시간 스케일 및 속도 스케일의 상대적인 크기에 영향을 미치는 인자를 찾아내어, 이를 인공적인 항으로 변환하여 스케일 차이를 최소화하는 방법이다. 위의 예조건화행렬의 정의에서 ρ'_p 과 ρ'_r 가 바로 인공적으로 디자인된 예조건화 계수이며, 정의는 식 (2-1), (2-2)와 같다. 이 계수들이 실제 값 즉, 밀도의 압력에 관한 미분항과 밀도의 온도에 관한 미분항으로 처리되면, 예조건화가 고려되지 않은 보존형 변수가 원시 변수로 변환된 형태의 지배방정식이 된다.

$$\rho'_p = \frac{1}{V_p^2} - \frac{\rho'_r(1-\rho h_p)}{\rho h_r} \quad (2-1)$$

$$\rho'_r = -\frac{\rho}{T} \quad (2-2)$$

여기서 V_p^2 은 인공음속(artificial speed of sound)이며, 이는 모든 속도 범위에서 고유치를 재조정하기 위한 파라메타이며, 다음과 같이 정의된다.

$$V_p^2 = \max(V^2, \min(u^2 + v^2, c)) \quad (3)$$

여기서 V^2 은 아주 작은 숫자이며, c 는 물리적인 음속, 그리고 u, v 는 Cartesian 속도 성분이다.

3. 수치해법

지배방정식 (1)에 Euler implicit 방법을 적용하고, 선형화하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\left[\begin{array}{l} \Gamma + \frac{3}{2} \frac{\Delta \tau}{\Delta t} P - D + \Delta \tau \frac{\partial}{\partial \xi} \left(A - R_{\xi\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \\ + \Delta \tau \frac{\partial}{\partial \eta} \left(B - R_{\eta\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \end{array} \right] \Delta Q_r^{n+1, p+1} = -\Delta \tau RHS \quad (4)$$

여기서 P 는 물리적 시간항의 자코비안 행렬, D 는 생성항의 자코비안 행렬이며, A, B 는 비

점성 유속 자코비안 행렬, R 은 점성 유속 자코비안 행렬을 의미하며, n 과 p 는 각각 물리적 시간과 가상 시간의 반복지수를 의미한다.

선형화된 방정식을 풀기위한 대부분의 내재적 수치기법은 블록 행렬의 역변환 과정을 요구하므로, 많은 수의 화학종을 포함하는 화학반응 유동장에 대한 계산의 경우 막대한 계산시간과 전산기의 기억장소가 요구된다. 이런 어려운 때문에 Jameson 과 Turkel [10,16]의 LU 근사 인자분해 기법을 적용하여 대수 방정식을 블록-대각 행렬로 변환하여 시간적분을 수행하는 LU-SSOR (Lower-Upper Symmetric Successive Over Relaxation) 기법을 적용하였다. 이때, 유속 자코비안은 다음과 같이 예조건화를 고려하여 분할 하였다.

$$A_i^\pm = \frac{1}{2} \left(A_i \pm \left(\Gamma M_\xi \Lambda_\xi M_\xi^{-1} \right)_{i\pm 1/2} \right) \quad (5)$$

여기서 $M_\xi, \Lambda_\xi, M_\xi^{-1}$ 는 각각 ξ 방향의 좌특성, 고유치, 우특성 행렬을 의미한다.

식 (5)의 분할 방법을 적용하여 근산인자 분해를 취하면 다음의 하삼각, 상삼각, 그리고 대각 행렬 성분을 얻을 수 있다.

$$L = -\frac{1}{2} \Delta \tau (A_{i-1} + B_{j-1} + \Omega_{\xi, i-1/2} + \Omega_{\eta, j-1/2})$$

$$U = \frac{1}{2} \Delta \tau (A_{i+1} + B_{j+1} - \Omega_{\xi, i+1/2} - \Omega_{\eta, j+1/2})$$

$$D = S_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta \tau (\Omega_{\xi, i+1/2} + \Omega_{\xi, i-1/2} + \Omega_{\eta, i+1/2} + \Omega_{\eta, j-1/2}) \quad \text{여기}$$

서 $\Omega = \Gamma M |\Lambda| M^{-1}$ 이다.

식 (1)이 가상 시간 τ 에 대해 쌍곡선 형이기 때문에, 공간에 대한 차분을 풍상차분으로 수행하였다. 특성 이론에 의한 파동의 물리적인 전파 특성을 고려하지 않는 중심차분법과 달리, 풍상차분법은 이산화된 식에 유동방정식의 물리적 특성을 도입한다. 중심차분법은 통상적으로 불안속을 포함하는 영역에서 수치해의 진동이나 불안정성이 유발되므로, 인공점성을 통한 안정화가 요구된다. 하지만, 풍상차분법은 특성치의 방향에 따라 차분을 달리하므로 중심차분법에 비해 강건성(Robustness)이 우수하다. 또한 식(1)의 유속벡터가 종속변수 Q_r 에 대한 동질(Homogeneous) 함수가 아니기 때문에, 유속차이를 이용하는 풍상차분법이 적용되어야 한다[10]. 본 연구에서는 Chakravarthy 과 Osher[9]에 의해



제안된 TVD를 적용하여 고차의 공간정확도를 구현하였다. 예조건화된 지배방정식에 대한 수치적인 유속의 정확한 계산을 위해, Yang [10,11] 등이 제안한 수정 방법을 적용하여, 3차의 공간 정확도를 갖도록 하였으며, 점성항은 일반적인 중심차분법을 적용하였고, 이중시간전진기법 (Dual-time stepping method)을 적용하기 위해, 물리적 시간항은 2차 정확도를 갖도록 차분하였다.

4. 계산 결과

본 연구에서 적용한 수치기법을 사용하여 개발된 코드의 검증은 위해 비압축성 유동, 압축성 유동, 그리고 출구에서 압력 진동이 발생하는 비정상 상태 유동에 적용하여 검증하였고, 반응 유동장의 검증은 수소-산소 예혼합 화염에 난류모델을 포함하여 적용하였다.

4.1. 정상상태 캐비티 유동

저 마하수 비압축성 유동장에 대한 계산의 정확성과 수렴성의 검증을 위해 정방형 캐비티 유동에 적용하여 보았다. 레이놀즈 수는 400, 1000, 3200에 적용하였고, 71x71의 벽면에 밀집된 격자를 사용 하였다. 각 레이놀즈 수에 대한 마하수는 각각 1.8×10^{-5} , 4.52×10^{-5} , 1.44×10^{-4} 이며, CFL수는 50.0을 사용하였다.

Fig. 1은 캐비티의 중심에서 축방향, 그리고 수직방향 속도 분포를 Ghih 등[17]의 129x129격자를 이용한 비압축성 코드 계산결과와 비교한 것이다. 레이놀즈 수 400과 1000은 두 결과가 잘 일치하지만, 레이놀즈 수 3200의 경우, 벽면 근처에서 수평방향 속도와 수직방향 속도에서 불일치성이 보이고 있다. [17]의 연구에서 보다 더 작은 수의 격자를 이용했기 때문에, 높은 레이놀즈 수에서 코너 와류(vortex)를 정확히 예측하지 못한 이유로 보인다.

4.2. 충격파/경계층 상호작용 문제

충격파 포획능력과 TVD기법의 검증을 위해 Hakinen[18]등의 실험으로 알려진 충격파/경계층의 상호작용 문제를 해석하여 보았다. 격자는 141x101이며, 입구의 마하수는 2.0, 그리고 입사되는 충격파의 각도는 32.58°가 되도록 윗면을 미끄럼 벽면 경계조건으로 처리하였고, 입구의 온도와 압력을 각각 293K, 14959.8pa로 하였다. 3차 정확도의 TVD를 적용하였으며, 이 계산에서

는 예조건화를 고려하지 않았다. Fig.2a와 b는 등압력 선도와 마하수 선도를 보이고 있다. 경사충격파가 평판의 층류 경계층에 입사되어, 경계층을 산란하여 박리기포가 발생하고, 박리기포에 의한 충격파와 재부착 지점에서 재압축 충격파가 발생하는 현상이 잘 나타남을 볼 수 있다. Fig.3는 Hakinen 등[18]의 실험을 통해 얻어진 표면 압력 분포를 계산 결과와 비교한 것으로, 박리 기포 전면에서의 압력 상승과 압력의 평평한 위치 그리고 재압축 되는 위치를 비교적 잘 예측하고 있다.

4.3. 비정상 acoustic 유동

이중시간 전진기법의 검증은 원통형 관내에서 압력파의 진동 문제의 비정상 해석을 통해 이루어 졌다. 고체로켓의 연소실에서 벽면에서 연료의 연소율(burning rate)를 유체역학적인 관점에서 모사한 것으로, 길이 0.3m, 반경 0.0254m인 축대칭 관에 대해, 1기압, 300K의 공기를 작동 유체로 하고, 좌측은 벽면으로 막혀있고, 윗 경계면에서 2.5m/s의 유동이 중심축 방향으로 유입된다고 가정하였다. 비정상 계산을 수행하기에 앞서 우선, 정상상태의 계산을 수행하고, 출구압력의 2%를 출구 면에서 종방향 첫번째 고유진동수인 588Hz로 가진 하였으며, 물리적 시간 간격의 크기는 가진 압력의 한 주기를 40등분 하여 설정하였다.

Fig.4a와 b는 정상상태에서의 마하수와 압력 선도를 나타낸 것으로, 압력 분포가 파이프 내의 축방향으로 일정하게 분포 함을 알 수 있다. Fig.4c와 d는 0.038sec후의 마하수와 압력을 도시한 것으로, 벽면에서의 점성의 영향이 지배적이어서 벽면 근처에서 속도장이 심하게 왜곡되는 것을 볼 수 있으며, 저속의 유동이 유입되기 때문에, 챔버 전체에서 압력장이 일차원적인 분포를 보며, 수직방향으로의 압력 변화는 나타나지 않는다.

Fig.5a는 관 내의 임의의 점에서 속도와 압력의 시간 추이를 나타낸다. 출구에서 시간에 대해 진동하는 압력조건에 의해 유동장이 교란되어, 초기에는 압력과 속도의 변화에 규칙성이 없지만, 어느 정도 시간이 흐른 뒤, 속도와 압력은 90° 정도의 위상차를 보이며 변화됨을 알 수 있다. Fig.5b는 압력의 nodal point에서 반경방향에 대한 파동 속도 (acoustic velocity)를 도시한 것이다. 여기서 파동 속도는 축방향 속도에서 정상상태의 축방향 속도를 뺀 값으로 정의되며, Flandro[19]에

의하면 파동 속도와 파동 압력은 다음의 관계가 있다.

$$|u| \approx \frac{|p|}{\bar{\rho}c} \quad (6)$$

여기서 $\bar{\rho}(=1.1178891)$ 와 $\bar{c}(=352.7)$ 는 각각 유동장의 평균 밀도와 음속을 의미하며, 위 식(6)을 이용해 얻은 파동 속도(4.873m/s)와 Fig.5b의 축 중심에서의 파동 속도가 거의 같음을 알 수 있으며, Fig.5b에서 벽면으로 갈수록 점성의 영향이 강하게 나타나 속도가 심하게 교란되는 것을 볼 수 있다.

4.4 초음속 예혼합 화염

화학반응 유동장의 검증은 Shuen 등[1]의 초음속 수소/공기 예혼합 화염문제로 하였다. 초음속 유동이 10°의 램프에서 발생한 경사 충격파와 점성 경계층으로 인해 화학반응을 일으키기에 충분한 온도가 되어 화염이 발생하는 문제로, 초음속 화학반응의 검증에 자주 쓰이는 문제이다. 당량비 1로 혼합된 수소와 산소가 1기압, 1200K, 마하수 4.0으로 유입되는 것을 입구조건으로 하였다. 계산 격자는 91x81로 하였고, 이 문제의 경우 난류모델을 포함하는 계산을 수행하였다. 화학반응 모델은 9.화학종/18-반응의 상세반응을 적용하였다.

Fig.6은 벽면으로부터 0.13cm 위치에서의 계산 결과를 Shuen 등[1] 과 Yee[20]의 결과와 비교한 것이다. Shuen 등은 중심차분법을 이용하고 14단계의 상세 화학반응모델을 이용하였고, Yee 등은 TVD 기법과 2단계의 광역화학반응 모델을 이용한 결과이다. Fig.6a는 압력을 비교한 것으로, 램프에서 압력의 상승과 압력 정점(pressure peak)을 잘 포착하고 있으며, 램프 충격파 이후에도 연소에 의한 열 방출로 압력이 계속 증가하는 것을 볼 수 있다. Fig.6b는 화학종의 질량분율의 분포를 비교한 것으로 14단계의 상세 화학 반응 모델의 결과인 Shuen 등의 결과와 유사한 결과를 얻을 수 있었다. 수소(H₂)와 산소(O₂)의 질량분율의 변화를 보면, Shuen의 결과 보다 더 앞쪽에서 반응이 일어남을 알 수 있고, OH 생성물은 14 단계의 반응모델보다 더 많이 생성됨을 알 수 있다.

5. 결론

본 연구에서는 예조건화 기법과 TVD 기법을 적용하여 작성한 코드를 통해 비압축성 유동, 압

축성 유동, 비정상 유동 및 화학반응 유동장을 계산, 검증 하였다. 예조건화 기법을 적용하는 경우, 하나의 코드를 이용해 비압축성과 압축성 유동장을 계산할 수 있다는 장점이 있고, 과거에 비압축성 유동장의 계산을 위해 많이 적용되었던, Pressure-based 기법에 비해 시간전진 기법을 위해 개발된 다양하고 세련된 수치해석적 기법들을 쉽게 적용할 수 있다는 장점을 갖는다. 하지만, 시간 미분항에 곱해지는 예조건 행렬로 인해, 부가적인 메모리가 소요되고, 또한 LU 기법을 적용할 때, 근사 유속 자크비안을 이용하여 스칼라 역변환이 가능한 LU-SGS기법을 이용할 수 없어 계산 시간이 증가한다는 단점과 풍상차분법의 적용시 고유벡터 행렬에 예조건화를 고려하기 위해 예조건화행렬을 곱해야 하므로, 부가적인 계산시간이 요구되며, 비압축성 유동장의 계산에서도 에너지 방정식을 포함해서 계산해야 하는 단점이 있다.

6. 참고 문헌

- [1] J.S. Shuen and S. Yoon, "Numerical Study of Chemically Reacting Flows Using an LU Scheme," AIAA-88-0436, 1988
- [2] S. Venkateswaran, C.L. Merkle, "Analysis of Preconditioning Methods for the Euler and Navier-Stokes Equations, Von Karman Institute Lecture Series, 1999
- [3] J.-S. Shuen, K.-H. Chen and Y. Choi, "A Time-Accurate Algorithm for Chemical Non-Equilibrium viscous Flows at All Speeds," AIAA 92-3639, 1992
- [4] J.M. Weiss and W.A. Smith, "Preconditioning Applied to Variable and Constant Density Flows," AIAA Journal, Vol.33, No.11, pp.2050, 1995
- [5] S. Venkateswaran, M. Deshpande and C.L. Merkle, "Application of Preconditioning to Reacting Flow Computations," AIAA-95-1673-C, 1995
- [6] Turkel, E., V.N and Radespiel, F., "Preconditioning Methods for Low-Speed Flows," ICASE Report
- [7] van Leer, B., Lee, W.T., and Roe, P.L., "Characteristic time-stepping of local preconditioning of the Euler equations," in AIAA 10th Computational Fluid Dynamics Conference, 1991.
- [8] A.G. Godfrey, B. van Leer, "Preconditioning for the



- Navier-Stokes Equations with Finite-Rate Chemistry," AIAA-93-0535, 1993
- [9] S.R. Chakravarthy, S. Osher, "A New Class of High Accuracy TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws," AIAA 85-0363, 1985
- [10] S.Y. Hsieh, V. Yang, " A Preconditioned Flux-Differencing Scheme for Chemically Reacting Flows at All Mach Numbers," Intl. J. of Computational Fluid Dynamics, vol.8, pp.31, 1997
- [11] S.G. Sung, "Unsteady Flowfiled in an Integrated Rocket Ramjet Engine and Combustion Dynamics of a Gas Turbine Swirl Stabilized Injector," PhD Thesis, The Pennsylvania State University, 1999
- [12] T.H. Shih and J.L. Lumley, "Kolmogorov Behavior of Near-Wall Turbulence and Its Application in Turbulence Modeling," NASA TM 105663, 1992
- [13] Gordon, S., and B.J. McBride, "Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions and Applications," NASA RP-1311, 1994
- [14] Reid, R.C., Prausnitz, J.M., and Poling, B.E., *The Properties of Gases & Liquids*, 4th Edition, McGrawHill
- [15] Yu, S., Tsai, Y. and Shuen, J., AIAA Paper 89-0391
- [16] Jameson A. and Turkel E., "Implicit Schemes and LU Decompositions," Mathematics of Computation, Vol.37, pp.385
- [17] U.Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method," Journal of Computational Physics, Vol.48, pp.387-411, 1982
- [18] Hakkinen, R.J., Greber, I., Trilling, L. and Abarbanel, S.S., "The Interaction of an Oblique Shock Wave with Laminar Boundary Layer," NASA Memo-2-18-59W, Mar. 1959
- [19] Flandro, G.A., "Effects of Vorticity Transport on Axial Acoustic Waves in a Solid Propellant Rocket Chamber," ASME Annual Meeting, San Francisco, CA., 1989
- [20] H.C. Yee, and J.L. Shinn, "Semi-Implicit and Fully Implicit Shock-Capturing Methods for Nonequilibrium Flows," AIAA Journal Vol.27, No.3, 1989