2001년 한국정보처리학회 춘계 학술발표논문집 제8권 제1호

결함 노드를 갖는 특정 (n,k)-스타 그래프로의 링 임베딩

장정환*, 김진수**
*부산외국어대학교 컴퓨터전자공학부
**건국대학교 컴퓨터과학과
e-mail: jhchang@taejo.pufs.ac.kr

Embedding Ring into the Special (n,k)-star Graphs with Node Faults

Jung-Hwan Chang*, Jinsoo Kim**
*Division of Computer & Electronics Engineering, Pusan University of Foreign Studies
**Department of Computer Science, Kon-Kuk University

요 약

본 논문에서는 최근에 제안된 상호연결망 *(n,k)*-스타 그래프가 결함 노드를 포함하는 경우의 링 임베딩 문제를 다룬다. 그래프 자체의 계층적 특성을 이용한 일련의 차원 확장 및 결함 노드의 분산 전략을 효율적으로 이용하여 *n-3*개 이하의 결함 노드만을 포함하고 $n-k\geq 3$을 만족하는 *(n,k)*-스타 그래프에서 고장 노드들만 제외시킨 최대 크기의 링을 임베딩할 수 있음을 밝힌다.

1. 서 론

대규모 병렬처리시스템을 구성하고 있는 다중 프로세서와 프로세서 상호간 연결 채널을 각각 노드(node) 및 에지(edge)로 표현한 그래프 형태의 상호연결망(interconnection network)은 그래프 자체의 내재된 특성에 의존적인 성능을 갖게 됨에 따라 보다 좋은 성능의 상호연결망 그래프를 설계하려는 시도는 많은 관심을 받아 왔으며, 알고리즘에 내재된 자료구조를 실제 구현된 시스템 구조에 효율적으로 매핑시키거나, 상호연결망 상호간 시뮬레이션을 위한 이론적인 기반으로써 그래프 임베딩(embedding) 문제가 연구되었다[1].

지난 여러 해 동안 많은 관심을 받아 온 대표적인 상호연결망으로는 하이퍼큐브(hypercube)가 잘 알려져 있지만[2], 보다 성능이 우수한 상호연결망을 찾으려는 다양한 시도의 일환으로 스타 그래프(star graph 또는 *n*-스타)가 등장하게 되었다[3].

한편, 스타 그래프는 여러 특성에서의 우수성에도 불구하고 인접된 차원간의 차가 기하급수적으로 커지는 문제로 인 상호연결망으로 구현시 적절한 차원을 결정하기가 어렵다는 단점이 지적되어 왔는데 이러한 단점을 보완하기 위한 새로운 상호연결망으로서 *(n,k)*-스타 그래프가 등장하면서 새로운 가능성을 모색할 수 있게 되었다[4].

(n,k)-스타 그래프는 *n*-스타 그래프를 포함하는 초-집합(super-set)에 해당하는 그래프로써 *(n,k)*-스타 그래프에서의 사이클 특성을 분석한 여러 연구가 알려져 있다[5][6].

본 논문에서는 노드에서의 결함을 고려한 결함 허용(fault-tolerant) 링 임베딩 문제를 다룬다. 조건 $n-k\geq 3$을 만족하는 특정 *(n,k)*-스타 그래프에서 고장 노드의 개수가 *n-3*개를 초과할 수 없다는 조건하에서 결함 노드를 제외시킨 최대 크기의 링을 찾는 문제로써 정상 노드들을 모두 연결시킨 최대 크기의 링을 찾을 수 있음을 보인다.

본 논문의 제2절에서는 *(n,k)*-스타 그래프에 대한 정의 및 주요 특성을 살펴보고 제3절에서는 최대 크기의 링을 임베딩할 수 있는 기법을 제시하며, 마지막 제4절에서 결론을 맺는다.

2. (n,k)-스타 그래프 특성

본 절에서는 *(n,k)*-스타 그래프에 대해 밝혀진 사이클 관련 특성들을 살펴보고자 한다. 본 논문에서 표현식 <n>은 자연수의 집합 $\{1,2,...,n\}$을 의미한다.

[정의 1] $1\leq k<n$을 만족하는 주어진 두 정수 n과 k 값에 의해 그 크기가 결정되는 노드의 집합 $V(S_{n,k})$와 에지의 집합 $E(S_{n,k})$에 의해 다음과 같이 *(n,k)*-스타 그래프 $S_{n,k}$를 정의한다.

1) $V(S_{n,k})=\{p_1p_2...p_k \mid p_i\in\langle n\rangle,\ 1\leq i\leq k\}$
2) $E(S_{n,k})=\cup_{1\leq i\leq k} E_i(S_{n,k})$

① $2 \le i \le k$에 해당하는 i-차원 에지;
$E_i(S_{n,k})=\{(p_1p_2...p_{i-1}p_ip_{i+1}...p_k,\ p_ip_2...p_{i-1}p_1p_{i+1}...p_k)\}$
② 1-차원 에지;
$E_1(S_{n,k})=\{(p_1p_2...p_i...p_k,\ xp_2...p_i...p_k) \mid x \in \in \{<n> \setminus \{p_j \mid 1 \le \le j \le k\}\}\}$
여기서 부호 '\'는 차집합을 의미한다. □

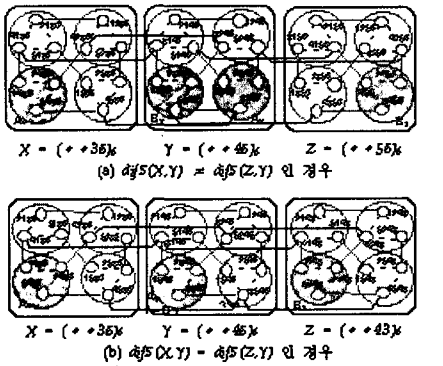
[정의 2] 표현식 $S = (s_1s_2...s_k)_n$는 $n>k$를 만족하고 해당 범위 내의 각 i에 대해서 $s_i \in \{<n> \cup \{*\}\}$를 만족하는 길이 k의 스트링 표현이라고 하자. 만일 S의 스트링 표현식 내에 $1 \le l < k$를 만족하는 l개의 '*'부호를 포함하고 있다면 S는 $S_{n,k}$로부터 분할된 결과로 얻어진 $(n-k+l,l)$-부스타 그래프를 나타내고 있다. 여기서 특별한 부호인 '*'는 해당되는 차원이 미확장 상태임을 의미하며 집합 $<n> \setminus \{\cup_{1 \le j \le k} \{ s_j \mid s_j \ne \text{'*'}\}\}$에 해당되는 임의의 부호가 올 수 있음을 의미한다. □

[정의 3] $S_{n,k}$ 내에서 $X = (x_1...x_j...x_k)_n$ 를 x_j = '*'인 $(n-l,k-l)$-부스타 그래프라고 하자. X 상에 ***j*-차원 확장(*j*-dimensional expansion)**을 적용한다는 의미는 X를 차원 j를 따라 확장시킴으로써 $n-l$ 개의 $(n-l-1,k-l-1)$-부스타 그래프들로 분할함을 의미한다.□

[정의 4] $S_{n,k}$에서 임의의 인접한 두 $(n-j,k-j)$-부스타 그래프를 X, Y라고 할 때 X와 Y의 스트링 표기법에서 '*'를 제외한 부호들이 위치하고 있는 차원들 중에서 오직 하나의 차원에서만 대응되는 부호가 서로 다른 경우에 X와 Y는 서로 **인접 관계(adjacent relation)**에 있다고 한다. 인접 관계의 두 $(n-j,k-j)$-부스타 그래프 X 및 Y에 대해서 ***X*로부터 *Y*로의 차-부호(difference in symbol)**란 X를 구성하는 부호 중에서 Y에는 존재하지 않는 부호를 의미하고, ***difS(X,Y)***로 표기한다. □

[성질 1] $(m,1)$-스타 그래프 $S_{m,1}$은 m개의 노드를 갖는 완전그래프 K_m과 동형(isomorphic)이다[5]. □

[정의 5] $S_{n,k}$로부터 파생된 임의의 연속된 $(n-j,k-j)$-부스타 그래프들의 집합 $X = [X_0,X_1,...,X_{r-1}]$에서 각 X_i가 전후에 위치한 두 개의 $(n-j,k-j)$-부스타 그래프들 $X_{(i-1) \bmod r}$ 과 $X_{(i+1) \bmod r}$ 상호간에 인접(adjacent) 관계를 만족하는 경우에 X를 길이 r의 ***(n-j,k-j)*-부스타-링**이라고 칭하고 각 X_i를 ***(n-j,k-j)*-부스타-노드**로, X_i와 인접 $(n-j,k-j)$-부스타-노드와의 연결에 참여하고 있는 에지들의 집합을 ***(n-j,k-j)*-부스타-에지**로 일컫는다. □



(a) difS(X,Y) ≠ difS(Z,Y) 인 경우
(b) difS(X,Y) = difS(Z,Y) 인 경우
[그림 1] 인접한 부스타-노드간 상호 관계

[성질 2] X로부터 확장되어 생산된 각 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-노드들은 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-에지에 의해 서로 완전 연결(completely connected) 구조를 이루고 있으며, Y에서도 성립한다. 뿐만 아니라 X 내의 특정한 한 개의 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-노드를 제외한 $n-j-1$개의 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-노드들은 각각 Y 내의 대응되는 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-노드와 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-에지에 의해 일대일 방식으로 서로 연결되어 있다(물론 Y 내에도 X의 대응되는 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-노드와 연결될 수 없는 특별한 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-노드가 하나 존재한다)((그림 1) 참조). □

본 논문에서 언급될 임의의 $(n-j,k-j)$-부스타-링 $R = [X_0,X_1,...,X_{r-1}]$에서 각 X_j의 인덱스를 나타내는 j의 표기상에서 "$j+1$" 또는 "$j-1$"은 각각 "$(j+1)$ mod r" 또는 "$(j-1)$ mod r"을 의미한다. 아울러 차원 확장후 임의의 X_i 내에 존재하는 $n-j$개의 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-노드 중에서 전방 또는 후방 부스타-노드에 해당하는 X_{j-1} 및 X_{j+1} 내의 어떤 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-노드와도 연결되지 않는 X_j 내의 해당 $(n-j-1,k-j-1)$-부스타-노드를 각각 W_i^+ 및 W_i^- 라고 표기한다.

3. 링 임베딩 기법

(n,k)-스타 그래프에 내재된 재귀적(recursive) 특성을 활용하여 결함 노드들을 효율적으로 회피하면서 링을 찾을 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

[보조정리 1] $S_{n,k}$ 내에서 $n-k \ge 3$ 및 $l \ge 2$를 만족하는 임의의 $(n-k+l,l)$-부스타-링 $R=[X_0,X_1,...,X_{r-1}]$에서 각 X_j의 미확장 차원들은 모두 위치가 같고, 1-차원을 반드시 포함하는 조건을 만족하면, 주어진 R로부터 다음의 조건을 만족하는 길이 $r(n-k+l)$의 $(n-k+l-1,l-1)$-부스타-링 $R' = [Y_0,Y_1,...,Y_{r(n-k+l)-1}]$을 항상 만들 수 있다.

(a) 각 인덱스 i에 대해서 $difS(Y_{i-1},Y_i) \ne difS(Y_{i+1},Y_i)$가 성립한다[5]. □

(보조정리 1)에서 주어진 부스타-링 내의 각 X_j 들을 순차적으로 방문하되 다음과 같은 세 가지 규칙(본 논문에서는 NKTR(Traversing Rules for (n,k)-star graphs)이라 칭함)을 준수하면서 진행함으로써 체계적으로 패스를 구성해 나갈 수 있게 된다.

NKS-1: X_j 내부로 일단 들어오면 X_j를 떠나 다음 차례의 X_{j+1}로 진행하기 전에 X_j 내에 존재하는 모든 $(n-k+l-1,l-1)$-부스타-노드들의 방문을 완료한다.

NKS-2: X_j 내에 존재하는 $(n-k+l-1,l-1)$-부스타-노드들 중에서 특별히 W_i^-에 해당하는 특정 $(n-k+l-1,l-1)$-부스타-노드를 X_j 내에서 마지막과 그 바로 전 차례에 해당하는 $(n-j)$-번째 및 $(n-j-1)$-번째에는 각각 방문되지 않도록 한다.

NKS-3: X_j 내에 존재하는 $(n-k+l-1,l-1)$-부스타-노드들 중에서 특별히 W_i^+에 해당하는 특정 $(n-k+l-1,l-1)$-부스타-노드를 X_j 내에서 첫 번째 및 두 번째 차례에는 방문되지 않도록 한다.

특별히 $n-k+l=4$인 경우는 (보조정리 1)만으로는 해결될 수 없음을 다음 보조정리가 언급하고 있다.

[보조정리 2] $S_{n,k}$ 내에서 $n-k=2$ 및 $l=2$를 만족하는 임의의 $(n-k+l,l)$-부스타-링 $R = [X_0,X_1,...,X_{r-1}]$에서

각 X_i의 미확장 차원들은 모두 위치가 같고 l-차원을 반드시 포함하며, 임의의 i에 대해 조건 $difS(X_{i-1},X_i) \neq difS(X_{i+1},X_i)$이 만족되면, 주어진 R로부터 다음의 조건을 만족하는 길이 $r(n-k+l)$의 새로운 $(n-k+l-1,l-1)$-부스타-링 $R' = [Y_0,Y_1,\ldots,Y_{r(n-k+l)-1}]$을 항상 만들 수 있다.

(a) 각 인덱스 j에 대해서 $difS(Y_{j-1},Y_j) \neq difS(Y_{j+1},Y_j)$가 성립한다.

[증명] (보조정리 1)과 유사하게 증명이 가능하며, 단지 주어진 조건에서 $n-k+l=4$ 이므로 각 X_i에는 각각 네 개씩의 $(n-k+l-1,l-1)$-부스타-노드가 존재하고, 주어진 조건 $difS(X_{i-1},X_i) \neq difS(X_{i+1},X_i)$가 성립되므로 최종적으로 만들어지는 $(n-k+l-1,l-1)$-부스타-링 R'에서 조건 (a)가 만족되기 위해 필요한 NKTR 법칙 중 NKS-2 및 NKS-3을 준수하는데 문제가 없고 따라서 보조정리가 성립된다. □

(보조정리 1) 및 (보조정리 2)는 주어진 $S_{n,k}$로부터 $S_{n-1,k-1}$을 만든 다음 $S_{n-1,k-1}$, $S_{n-2,k-2}$, ..., $S_{n-k+3,3}$,까지 분할시키는 일련의 과정들을 그래프 자체의 재귀적 성질을 이용하여 수행할 수 있음을 의미한다.

한편 본 논문에서는 결합 노드들을 효율적으로 처리하기 위해 일련의 차원 확장 과정에서 결합 노드들을 생성되는 부스타-노드들로 분산시키는 전략을 이용하고 있는데 다음의 보조정리가 이러한 전략의 가능성을 말해주고 있다.

[보조정리 3] $n-k \geq 2$를 만족하는 주어진 $S_{n,k}$가 $n-3$개 이하의 결함 노드를 포함하고 있다면, $1 \leq l < k$ 및 $|D|=l$를 만족하는 D-확장의 결과 생성된 $n(n-1)\ldots(n-l+1)$개의 $(n-l,k-l)$-부스타-노드들이 각각 $n-l-3$개 이하의 결함 노드만을 포함하도록 해주는 그런 차원 확장 집합 D를 항상 찾을 수 있다.

[증명] 차원 확장에서 확장되는 차원을 중심으로 결함 노드들이 분산되게 되는데 차원 확장 결과 생성될 한 차원 낮은 각 부스타-노드들에 포함되는 결함 노드들의 분포를 고려하여 가장 균등하게(나누어지는 각 부분에 속하는 결함 노드들의 차가 가능한 적도록) 나누어질 수 있도록 해 주는 그러한 조건을 만족시키는 차원을 선정하여 차원 확장을 수행함으로써 매번의 차원 확장 과장 결과 생성되는 부스타-노드들에 남아있는 결함 노드의 수는 최소한 하나씩은 줄어들게 되는 효과를 얻게 되므로, $n-3$ 개 이내의 결함 노드를 포함하고 있는 $S_{n,k}$로부터 출발하여 l번의 차원 확장을 거친 후 생성되는 각 $(n-l,k-l)$-부스타-노드들은 결국 $n-l-3$개 이하의 결함 노드만을 포함하게 됨을 알 수 있다.□

앞에서 언급한 방법들을 이용하면 연속적인 $k-2$회에 걸친 차원 확장과정을 거쳐 $(n-k+2,2)$-부스타-링을 얻게 되고, 부스타-링 내의 각 $(n-k+2,2)$-부스타-노드들은 각각 $n-k-1$개 이하의 결함노드를 보유하고 있음을 알 수 있다.

[보조정리 4] $n-k \geq 3$을 만족하는 $S_{n,k}$ 내에서 주어진 $(n-k+2,2)$-부스타-링 $R = [X_0,X_1,\ldots,X_{r-1}]$이 다음의 조건들을 만족하면, 주어진 R로부터 길이 $r(n-k+1)(n-k+2)-f$의 링을 항상 만들 수 있다.

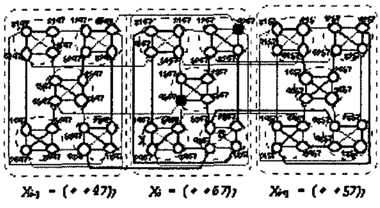
① $0 \leq i < r$을 만족하는 임의의 인덱스 i에 대해 X_i에는 $n-k-1$개 이하의 결함 노드를 포함하고, R 내의 전체 결함 노드 수 f는 $\lfloor r(n-3)(n-k+2)!/n! \rfloor$ 개 이하이며,

② 특정 $(n-k+2,2)$-부스타-노드 X_i 가 $n-k-1$개의 결함 노드를 갖는 경우에 인접된 두 부스타-노드 X_{i-1} 및 X_{i+1}는 결함 노드를 포함할 수 없고,

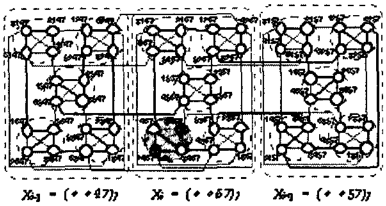
③ $difS(X_{i-1},X_i) \neq difS(X_{i+1},X_i)$가 성립한다.

[증명] 앞에서의 방법과 유사한 방법으로 증명할 수 있다. 결함 노드들의 분포에 따라서 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 고려한다.

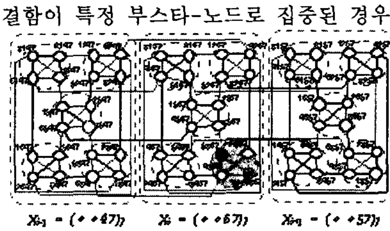
(1) 결함 노드들이 두 개 이상의 $(n-k+1,1)$-부스타-노드들로 분산되어 있는 경우, 각 노드는 적어도 두 개 이상의 정상 에지를 통해 외부와 연결되어 있기 때문에 주어진 조건하의 어떤 결함 노드 분포에 대해서도 정상 노드들만을 이용한 패스 구성이 가능함을 알 수 있다. 또한 최악의 경우에 X_i 내에 존재하는 $n-k+2$개의 $(n-k+1,1)$-부스타-노드 중 특정한 하나의 $(n-k+1,1)$-부스타-노드 주위에 인접된 $n-k-1$개 $(n-k+1,1)$-부스타-노드로의 진입 노드들이 모두 결함 노드인 경우((그림 2) (a)에서 X 참조)에도 최소 두 개 이상의 정상 노드는 존재하므로 이 노드들을 해당 $(n-k+1,1)$-부스타-노드의 진입 및 진출 노드로 하는 패스 구성이 가능하다.



(a) 결함이 특정 노드 주위로 에워싼 경우



(b) 결함이 특정 부스타-노드로 집중된 경우-타입 I



(c) 결함이 특정 부스타-노드로 집중된 경우-타입II

[그림 2] (보조정리 4) 증명 과정의 사이클 구성 예

(2) 모든 결함 노드들이 특정한 하나의 $(n-k+1,1)$-부스타-노드에 집중 분포되어 있는 경우((그림 2) (b)에서 부스타-노드 Y 참조)에는 해당 부스타-노드 내의 정상 노드와 인접된 외부 노드로의 유일한 연결 통로가 되는 하나의 에지만 남아 있게 되므로 이 에지는 필수적으로 사용하여야 하는데 이 경우에 결함 부스타-노드에 따라 다음과 같이 나누어 고려한다.

(a) Y가 W_i^+에 해당하는 경우: (그림 2) (b)에서 부스타-노드 Y 내의 노드들과 인접한 노드들이 모두

X_{i-1} 내의 대응되는 노드들과 일대일로 에지를 통해 연결됨으로써 X_i로의 진입 노드 역할을 하고 있는데 이 경우에 X_{i-1}로부터 X_i로의 진입 에지로 존재하는 $n-k+1$개의 에지들 중에서 결함 부스타-노드 내의 정상 노드 두 개와 인접되어 있는 두 개의 노드들로 진입시 또는 X_{i-2}로부터 X_{i-1}로의 진입 $(n-k+1,1)$-부스타-노드와 연결된 X_i 내의 해당 $(n-k+1,1)$-부스타-노드는 NKTR 법칙의 NKS-1 법칙 준수를 위해 불가피하게 X_i로의 진입 노드로서 역할을 할 수 없다는 사실을 고려할 때 적어도 $n-k-2$ 개의 $(n-k+1,1)$-부스타-노드는 남게 되는 셈이며, 주어진 조건에서 $n-k \geq \geq 3$이므로 적어도 하나 이상의 $(n-k+1,1)$-부스타-노드는 남게 되어 패스 구성에 문제가 없다.

(b) 그 외의 경우: 앞의 (a)의 경우보다는 특정 부스타-노드에 인접된 노드들로의 결함 집중도가 약하므로 패스 구성시 보다 많은 융통성을 발휘할 수 있어 전혀 문제가 없다((그림 2) (c) 참조). □

[보조정리 5] $n-k \geq 3$을 만족하는 $S_{n,k}$ 내에서 주어진 $(n-k+3,3)$-부스타-링 R = $[X_0, X_1, \ldots\ldots, X_{r-1}]$에서 각 X_i가 $n-k$개 이하의 결함 노드를 갖는다면, 주어진 R로부터 다음의 조건들을 만족하는 길이 $r(n-k+3)$의 $(n-k+2,2)$-부스타-링 R' = $[Y_0, Y_1, \ldots, Y_{r(n-k+3)-1}]$을 항상 만들 수 있다.

① $0 \leq j < 5r$을 만족하는 임의의 인덱스 j에 대해 Y_j에는 $n-k-1$개 이하의 결함 노드를 포함하며,

② 특정 $(n-k+2,2)$-부스타-노드 Y_i 가 $n-k-1$개의 결함 노드를 갖는 경우에 인접된 두 부스타-노드 Y_{j-1} 및 Y_{j+1}은 결함 노드를 포함할 수 없고,

③ $difS(Y_{j-1}, Y_j) \neq difS(Y_{j+1}, Y_j)$가 성립한다.

[증명] 앞에서의 방법과 유사하게 차원 확장 결과 생성되는 $(n-k+2,2)$-부스타-노드들을 부스타-링으로 구성해 가는 과정을 통해 증명이 가능하며, 다만 주어진 조건 ②가 만족되도록 구성해 주기 위해 특별한 고려가 필요하다.

(1) 부스타-노드 I_i가 결함 노드를 포함하고 있는 경우에는 나머지 남은 하나의 결함 부스타-노드를 다음과 같이 배치하여 NKTR 법칙을 유지시킨다.

a) 세 번째 이후의 임의의 순서에 배치 가능하다.

b) 다만, W_i^-에 해당하는 부스타-노드가 결함인 경우에는 마지막 두 차례에 해당하는 $n-k+2$번째 또는 $n-k+3$번째에 배치되지 않도록 주의한다.

c) 만일 I_i가 $n-k-1$개의 결함 노드를 갖는 $(n-k+2,2)$-부스타-노드인 경우에도 R 내 바로 앞 $(n-k+3,3)$-부스타-노드에 해당하는 X_{i-1}에서 마지막 방문한 $(n-k+2,2)$-부스타-노드가 항상 결함을 포함하지 않는 $(n-k+2,2)$-부스타-노드였다고 가정하면 $(n-k+2,2)$-부스타-링에서 요구되는 조건 ②는 항상 성립한다.

(2) 부스타-노드 I_i가 결함이 아닌 경우에는 남아있는 두 개의 결함 부스타-노드들을 각각 짝수 번째 차례에 배치될 수 있도록 패스를 구성해 준다.

여기서 다음과 같은 주장(claim)이 참이면 본 보조정리가 성립된다.

주장: R의 각 X_i 내에서 마지막 차례에 방문되는 $(n-k+2,2)$-부스타-노드는 결함 노드를 포함하지 않는다.

증명: X_i 내에 존재할 수 있는 최대 결함 노드의 수 $n-k$가 차원 확장 결과 생성된 $n-k+3$개의 $(n-k+2,2)$-부스타-노드들에 하나씩 포함됨으로써 최대 $n-k$개의 $(n-k+2,2)$-부스타-노드가 결함 노드를 포함하는 경우가 최악의 경우인데, 이 경우에도 세 개의 $(n-k+2,2)$-부스타-노드가 정상으로 남게 되고, NKTR 법칙에 따라 마지막 차례에 올 수 없는 제약을 갖는 특정 $(n-k+2,2)$-부스타-노드를 고려하더라도 남아있는 두 개의 $(n-k+2,2)$-부스타-노드들 중에 하나는 마지막 차례에 할당이 가능하다.

따라서 본 주장에 근거하여 전개시킨 증명과정은 성립됨을 확인할 수 있다. □

지금까지 언급한 여러 보조정리들을 종합하면 다음과 같이 요약할 수 있다.

[정리 1] $n-k \geq 3$을 만족하는 임의의 (n,k)-스타 그래프 내에 존재하는 결함 노드의 수 f가 최대 $n-3$개 이내인 경우에 길이 $n!/(n-k)!-f$의 정상 노드들로 구성된 링을 항상 찾을 수 있다. □

(n,k)-스타 그래프의 분지수가 $n-1$이기 때문에 결함 노드 수의 합이 최악의 경우에 $n-3$개를 초과할 수는 없는 점을 고려할 때 일반적인 조건하에서는 본 결과가 최적임을 의미하고 있다.

4. 결 론

본 논문에서는 병렬처리 분야의 응용과 관련하여 최근 많은 관심을 받고 있는 상호연결망 그래프 중의 하나인 (n,k)-스타 그래프에서 노드에 존재하는 결함의 수 및 차원을 결정하는 두 변수 n과 k가 조건 $n-k \geq 3$을 만족하는 경우에서의 결함 허용 링 임베딩 문제를 다루었다.

(n,k)-스타 그래프의 재귀적 성질을 이용하여 그래프를 체계적으로 차원 분할해 가는 일련의 과정에서 결함 노드들을 분산시키는 전략을 통해 모든 정상 노드들을 연결시킨 링을 찾을 수 있음을 보였다.

이러한 연구결과는 (n,k)-스타 그래프에 대한 결함 허용 임베딩 특성을 밝힌 연구 결과로써, 병렬처리 분야에서 사이클을 기반으로 하는 멀티캐스팅 등의 분야에 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," *J. of Parallel and Distrib. Comput.*, Vol.4, pp.439-458, 1987.

[2] Y. Saad and M. H. Schultz, "Topological properties of hypercubes," *IEEE Trans. on Comput.*, Vol.37, pp.867-872, 1988.

[3] S. B. Akers, D. Harel, and B. Krishnamurthy, "The star graph: An attractive alternative to the n-cube," *Proc. of the Int'l Conf. on Parallel Processing*, pp.393-400, 1987.

[4] W. K. Chiang and R. J. Chen, "The (n,k)-star graph: A generalized star graph," *Inf. Process. Lett.*, Vol.56, pp.259-264, 1995.

[5] 장정환, 좌경룡, "(n,k)-스타 그래프에서의 새로운 링 임베딩 및 결함 허용 임베딩으로의 응용," 한국정보과학회 논문지: 시스템 및 이론, Vol.27, No.3, pp.1384-1391, 2000.

[6] 장정환, "(n,k)-스타 그래프의 사이클 특성," 한국정보처리학회 논문지, Vol.7, No.5, pp.1464-1473, 2000.