

# 회전 관절형 로봇의 강인제어

이수한\* · 김태균\*\*

## Robust Control of a Revolute Joint Robot

Lee, Soo Han and Kim, Tae Gyun

**Key Words:** Robust control (강인제어), Asymptotic Stable(점근 안정), Lyapunov function (리아푸노프 함수), Revolute joint robot (회전 관절형 로봇)

### Abstract

In this paper, a robust controller is proposed to control a robot manipulator which is governed by highly nonlinear dynamic equations. The controller is computationally efficient since it does not require the dynamic model or parameter values of a robot manipulator. It, however, requires uncertainty bounds which are derived by using properties of revolute joint robot dynamics. The stability of the robot with the controller is proved by using Lyapunov's direct method. The results of computer simulations also show that the robot system is stable, and has excellent trajectory tracking performance.

### 1. 서론

로봇 매니플레이터는 일반적으로 관절로 연결된 링크들로 구성되어 있다. 그래서, 많은 동적 항들이 연성되어 매우 복잡한 비선형 운동방정식으로 표현된다. 또, 이러한 비선형 항 이외에도 외란, 하중의 변화 등과 같이 정확히 모델링하기 힘든 항도 가지고 있다. 일부 비선형 항은 자세, 속도, 하중 등의 변화에 민감하여 단순한 비례-미분제어기로는 로봇을 정확히 제어하기가 어렵다. 그래서, 로봇의 정밀한 제어를 위하여 여러 가지 비선형 제어가 연구되어 왔다. (2,4,8,9,10)

가장 보편적으로 알려져 있는 비선형 제어기는 계산 토크 제어기(Computed-Torque Controller)이다. 하지만, 하중의 변화, 관절의 마찰력 등의 변

수 값은 정확히 알기가 힘들고, 계산량도 많기 때문에 다축 로봇에 적용하기에 문제가 있다. (6,7) 적응제어기에 대하여도 많은 연구가 되어졌는데 제어기에 따라서는 복잡한 적응법칙으로 많은 양의 온라인 계산이 필요한 경우도 있다. (7,11) 최근에는 신경회로망이나 퍼지 제어기에 대하여도 많이 연구되어 왔는데, 시스템에 대한 사전 지식 없이도 제어가 가능한 장점은 있으나 시스템의 안정도 해석이 어렵거나 학습속도가 느린 단점 등이 있다. (12,13)

본 연구에서는 제어기 계산량이 비교적 적은 강인제어기를 제안한다. 제어기를 유도하기 위하여 정확히 모델링하기 어려운 동적 항이나 비선형 항의 제한 범위를 먼저 구한다. 그리고, 리아푸노프 안정도 해석에서 이 제한 범위를 이용한다. 따라서, 정확한 동적 모델링이 필요하지 않기 때문에 제어기 설계가 보다 간편하다. 제안된 제어기는 리아푸노프(Lyapunov) 이론을 적용하여 안정도를 증명한다. 본 제어기는 속도와 위치 신호로부터 제어 토크를 계산한다. 마지막으로 전

\* 울산대학교 기계자동차공학부

shiee@mail.ulsan.ac.kr

\*\* 일신기계(주)

산 모의 실험을 통해 제어기의 성능을 검증한다. 선형제어기인 PD제어기와 비교하여 본 연구에서 제안된 제어기가 안정하고도 제어성능이 우수함을 보인다.

## 2. 로봇의 운동방정식 및 특성

본 연구에서는 다음과 같은 운동방정식으로 표시되는 로봇의 모델을 사용한다.

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) + F_d\dot{\theta} + F_s(\dot{\theta}) + T_d. \quad (1)$$

여기서,  $\theta$ 는 관절 변수로  $n \times 1$  벡터이고,  $\tau$ 는 일반화된 힘으로  $n \times 1$  벡터이다.  $M(\theta)$ 는 관성 행렬로 대칭인 양의 한정행렬이고,  $n \times n$  행렬이다.  $C(\theta, \dot{\theta})$ 는 코리올리력 및 원심력 항을 포함하는  $n \times n$  행렬이고,  $G(\theta)$ 는 중력 항을 포함하는  $n \times 1$  벡터이다.  $F_d$ 는 일정한 값의 대각 행렬로 동적 마찰 항을 포함하는  $n \times n$  행렬,  $F_s(\dot{\theta})$ 는 정적 마찰 항을 포함하는  $n \times 1$  벡터, 그리고  $T_d$ 는 부정확하게 모델링된 운동방정식에 주어지는 추가적 외란으로  $n \times 1$  벡터이다. 식(1)은 아래와 같이 표시할 수 있다.

$$\tau = -M(\theta)\dot{r} - C(\theta, \dot{\theta})r + w. \quad (2)$$

여기서,  $r$ 은 위치오차와 속도오차에 동일한 가중치를 준 것으로  $r = e + \dot{e}$ 이고,  $w$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$w = M(\theta)(\ddot{\theta}_d + \dot{e}) + C(\theta, \dot{\theta})(\dot{\theta}_d + e) + G(\theta) + F_d\dot{\theta} + F_s(\dot{\theta}) + T_d. \quad (3)$$

이식에서 관성행렬은 그 크기가 다음과 같은 제한된 범위에 있다.

$$\mu_1 I \leq M(\theta) \leq \mu_2 I. \quad (4)$$

여기서,  $\mu_1$ 과  $\mu_2$ 는 스칼라 량이다. 따라서, 식(3)의 관성행렬과 관련된 항은 다음과 같이 제

한된다.

$$\|M(\theta)\ddot{\theta}_d\| \leq \beta_0, \quad (5)$$

$$\|M(\theta)\dot{e}\| \leq \beta_1\|\dot{e}\|. \quad (6)$$

여기서,  $\beta_0$ 와  $\beta_1$ 은 양의 스칼라 량이고,  $\|\cdot\|$ 은 유클리드 노름(Euclidean Norm)을 뜻한다.

코리올리력과 원심력 항의 크기도 다음과 같이 제한된다.

$$\|C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta}_d\| \leq \beta_2 + \beta_3\|\dot{e}\|, \quad (7)$$

$$\|C(\theta, \dot{\theta})e\| \leq \beta_4\|e\| + \beta_5\|e\|\|\dot{e}\|. \quad (8)$$

여기서, 크기를 제한하는 값들인  $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ , 및  $\beta_5$ 는 양의 스칼라 량이다.

중력 항의 범위는 다음 식으로 표시된다.

$$\|G(\theta)\| \leq \beta_g. \quad (9)$$

여기서,  $\beta_g$ 는 부하질량과 로봇에 의해서 결정되는 양의 스칼라 량이다.

마찰력 항은 동마찰 성분과 정마찰 성분으로 분리할 수 있다. 정마찰 성분의 경우,

$$F_s(\dot{\theta}) = K_d \operatorname{sgn}(\dot{\theta}) \quad (10)$$

로 표시할 수 있다. 여기서  $K_d = \operatorname{diag}\{k_i\}$ 인 대각 행렬이고  $k_i$ 는 상수이며, 시그넘 함수

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ \text{입의의 값}, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (11)$$

이다. 그리고, 외란,  $T_d$ ,는 그 크기가 제한된 미지의 변수이다. 따라서, 중력, 정적 마찰력 및 외란 항은 다음과 같이 제한된다.

$$\|G(\theta) + F_s(\dot{\theta}) + T_d\| \leq \beta_6. \quad (12)$$

그리고 동마찰의 크기는  $\dot{\theta} = \dot{\theta}_d - \dot{e}$ 인 관계를

이용하면,

$$\|F_d \dot{\theta}\| \leq \beta_7 + \beta_8 \|\dot{e}\| \quad (13)$$

이다. 그리고, 위의 식들에서 크기를 제한하는 값들인  $\beta_6$ ,  $\beta_7$ , 및  $\beta_8$ 은 양의 스칼라량이다.

식(3)을 양의 상수  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , 그리고  $\delta_3$ 로 표현하면 아래의 식과 같다.

$$\begin{aligned} \|w\| \leq & \delta_0 + \delta_1 \|e\| + \delta_2 \|\dot{e}\| \\ & + \delta_3 \|e\| \|\dot{e}\|. \end{aligned} \quad (14)$$

여기서  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , 그리고  $\delta_3$ 의 값은 식(5)부터 식(13)까지를 이용하여 구하면

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \beta_0 + \beta_2 + \beta_6 + \beta_7, \\ \delta_1 &= \beta_4, \\ \delta_2 &= \beta_1 + \beta_3 + \beta_8, \\ \delta_3 &= \beta_5 \end{aligned}$$

이다.

### 3. 제어기설계

본 연구에서는 아래와 같은 강인제어기를 제안한다.

$$\tau = k_p e + k_v \dot{e} + V_R. \quad (15)$$

여기서,

$$V_R = \frac{(\delta_0 + \delta_3 \|e\| \|\dot{e}\|)^2 r}{(\delta_0 + \delta_3 \|e\| \|\dot{e}\|) \|r\| + \epsilon}$$

이고,  $\dot{\epsilon} = -k_\epsilon \epsilon$ ,  $\epsilon(0) > 0$ 이다. 또,  $k_p$ ,  $k_v$ , 그리고  $k_\epsilon$ 은 양의 스칼라량이다. 제안한 제어기의 블록선도는 Fig. 1과 같다.

본 연구에서 제안한 강인제어기의 안정성을 증명하기 위해 리아푸노프의 직접법을 사용한다. 먼저, 다음과 같은 리아푸노프 함수 후보를 정의한다.

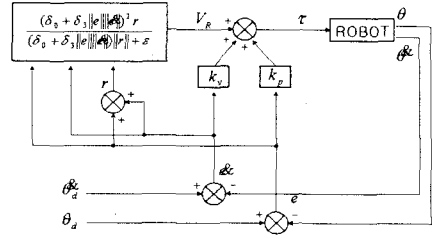


Fig. 1 Block diagram of the proposed controller

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} r^T M(\theta) r + \frac{1}{2} k_p e^T e \\ & + \frac{1}{2} k_v e^T e + k_\epsilon^{-1} \epsilon. \end{aligned} \quad (16)$$

식(16)를 식(2)에 따라 미분한 후, 식(15)의 관계를 이용하여 정리하면 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} r^T (\dot{M}(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta})) r + r^T w \\ & - r^T V_R - k_p e^T e - k_v \dot{e}^T \dot{e} - \dot{\epsilon}. \end{aligned}$$

여기서, 왜대칭 행렬의 성질과 식(14)를 이용하면 아래의 식(17)으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -k_p \|e\|^2 - k_v \|\dot{e}\|^2 + \|r\| (\delta_0 \\ & + \delta_3 \|e\| \|\dot{e}\|) - r^T V_R - \dot{\epsilon} \\ & + (\delta_1 + \delta_2) \|e\| \|\dot{e}\| + \delta_1 \|e\|^2 \\ & + \delta_2 \|\dot{e}\|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

식(17)을 간단히 나타내면,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -X^T Q X, \\ \leq & 0 \end{aligned} \quad (18)$$

이 된다. 여기서

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} k_p - \delta_1 & -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \\ -\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} & k_v - \delta_2 \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} \|e\| \\ \|\dot{e}\| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

을 뜻하고, 행렬  $Q$ 는 양의 한정행렬이다.  $\forall$ 가  $\forall \leq 0$ 을 만족함으로써 전체 계는 점근 안정하다. Gershgorin 정리[1]를 이용하여 행렬  $Q$ 가 양의 한정인 조건을 구하면,

$$k_p > \frac{3\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad k_v > \frac{\delta_1 + 3\delta_2}{2} \quad (19)$$

이다.

따라서, 본 논문에서 제안한 제어기에 의한 로봇 매니플레이터 시스템은 조건식(19)을 만족할 때 점근 안정하다.

#### 4. 전산 모의실험

##### 4.1 전산 모의실험

제안한 제어기의 안정도와 제어 성능을 검증하기 위하여 전산 모의 실험을 한다. 전산 모의 실험에 사용한 로봇의 모델은 중력 방향으로 움직이게 배치한 2관절형 로봇으로, 운동방정식의 행렬은 다음과 같다.

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} M_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & M_{22}(\theta) \end{bmatrix} \text{이고, 여기서}$$

$$M_{11}(\theta) = m_1 l_{c1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos \theta_2) + I_1 + I_2$$

$$M_{12}(\theta) = M_{21}(\theta) = m_2(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} \cos \theta_2) + I_2$$

$$M_{22}(\theta) = m_2 l_{c2}^2 + I_2 \text{이다.}$$

$$C(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} h \dot{\theta}_2 & h(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ -h \dot{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix} \text{이고,}$$

여기서  $h = -m_2 l_1 l_{c2} \sin \theta_2$ 이다.

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} G_1(\theta) \\ G_2(\theta) \end{bmatrix} \text{이고,}$$

여기서,

$$G_1(\theta) = (m_1 l_{c1} + m_2 l_1) g \cos \theta_1 + m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2),$$

$$G_2(\theta) = m_2 l_{c2} g \cos(\theta_1 + \theta_2) \text{이다.}$$

식(1)의 마찰력 항은 다음과 같이 가정하였고, 외란은 포함시키지 않았다.

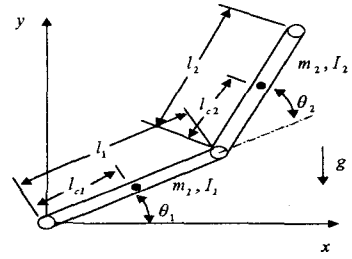


Fig. 2 Two-link robot manipulator

$$\text{링크1: } F_d \dot{\theta} + F_s(\dot{\theta}) = 2 \dot{\theta}_1 + 5.5 \text{sgn}(\dot{\theta}_1),$$

$$\text{링크2: } F_d \dot{\theta} + F_s(\dot{\theta}) = 0.2 \dot{\theta}_2 + 0.1 \text{sgn}(\dot{\theta}_2).$$

식(2.14)에서  $\delta_0$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ , 그리고  $\delta_3$ 의 값들은 기준궤적에서의 속도 및 가속도에 따라 많은 영향을 받는다. 모의 실험에서는 최고 속도를 링크1은  $\pi \text{ rad/s}$ , 링크2는  $\pi/2 \text{ rad/s}$ 으로 제한하였고, 최대가속도는 각각  $\pi^2 \text{ rad/s}^2$ 과  $\pi^2/2 \text{ rad/s}^2$ 으로 제한하였다. 기준궤적으로는 사이클로이드함수를 선택하였으며, 그 궤적은 다음과 같다.

$$\theta_1(t) = \theta_1(0) + \frac{\theta_1(0) - \theta_1(t_c)}{2\pi} \times (\omega t - \sin \omega t), \quad (0 \leq t \leq t_c)$$

$$\theta_1(t) = \theta_1(t_c), \quad (t_c \leq t)$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(0) + \frac{\theta_2(0) - \theta_2(t_c)}{2\pi} \times (\omega t - \sin \omega t), \quad (0 \leq t \leq t_c)$$

$$\theta_2(t) = \theta_2(t_c) \quad (t_c \leq t)$$

여기에서,  $t_c = 1 \text{ sec}$ ,  $\theta_1(t_c) = 0$ ,  $\theta_2(t_c) = \pi/4$ 이다. 또, 초기위치 및 속도,  $\theta_1(0) = -\pi/2$ ,  $\dot{\theta}_1(0) = \theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ 로 두었다. 또 제어기에 사용한  $\delta$ ,  $k_p$ ,  $k_v$  값과  $k_e$ 의 값은 Table 1에 나타나 있다.

제안된 제어기의 성능비교를 위해 다음과 같은 PD제어기를 선정한다.

$$\tau = k_v \dot{e} + k_p e.$$

PD제어기는 제어 이득에 따라서 제어성능이 달라지는 데, 여기서는 비교의 목적으로 강인제어기의 PD항과 동일한 이득 값을 사용하였다. 로봇 모델의 주요 수치를 Table 2에 나타내었다.

Table 1 The values of  $\delta$ 's and gains

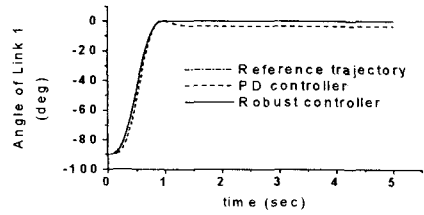
parameter s	$\delta_0$	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$k_p$	$k_v$	$k_\epsilon$
values	400	20	40	5	500	100	0.01

Table 2 Specification of the robot manipulator

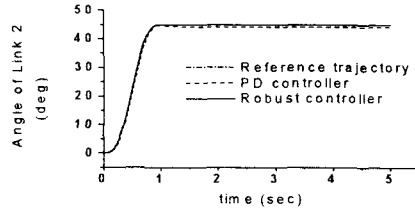
	링크1	링크2
질량 ( $m$ )	48kg	5kg
링크의 길이( $l$ )	0.6m	0.4m
길이( $l_c$ )	0m	0.2m
관성질량모멘트( $I_c$ )	3.33 kgm <sup>2</sup>	0.068 kgm <sup>2</sup>

#### 4.1 전산 모의실험 결과

모의 실험은 로봇의 끝에 부하질량을 부착한 경우와 부착하지 않은 경우 두 경우에 대하여 하였다. Fig. 3과 Fig. 4에 로봇 관절의 사이클로이드 궤적 추적 성능을 나타내었다. Fig. 3은 부하질량을 부착하지 않은 경우이고, Fig. 4는 부하질량 5kg을 부착한 경우이다. 그림에서 볼 수 있듯이 제안한 강인제어기가 두 경우 모두에서 궤적 추적 성능이 월등함을 알 수 있다. 단순 PD제어기 경우에는 로봇 끝의 부하질량 유무에 따라서 궤적 추적 상태와 정상상태에서 오차가 크고 많이 변하지만 강인 제어기 경우에는 오차를 거의 볼 수 없을 뿐 아니라 그 차이도 무시할 만하다. 특히 강인 제어기의 경우에는 정상상태에서 오차가 나지 않는 데 이는 제어기의 점근 안정성에 기인한다. Fig. 5와 Fig. 6에 제어 토크를 나타 내었다. Fig. 5는 부하질량을 부착하지 않은 경우이고, Fig. 6은 부하질량 5kg을 부착한 경우이다. 제어 토크의 크기는 두 경우가 비슷하지만 최대 값은 강인 제어기의 경우가 약간 작았다.

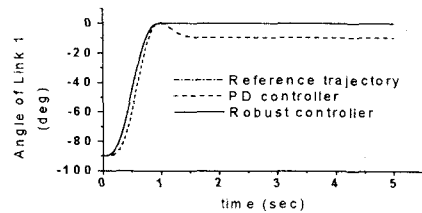


(a) link 1

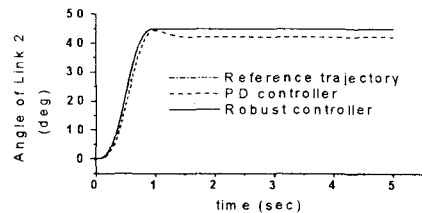


(b) link 2

Fig. 3 Joint motions of the robot manipulator without payload

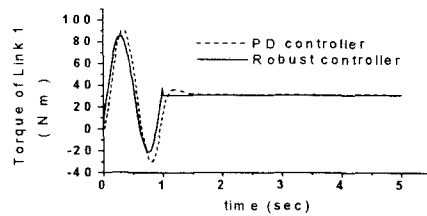


(a) link 1



(b) link 2

Fig. 4 Joint motions of the robot manipulator with payload



(a) link 1

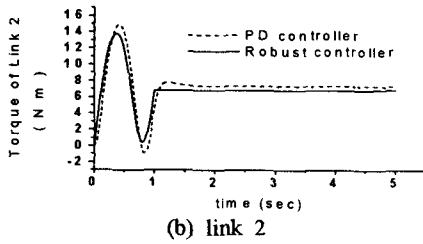
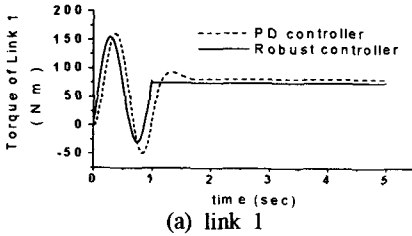
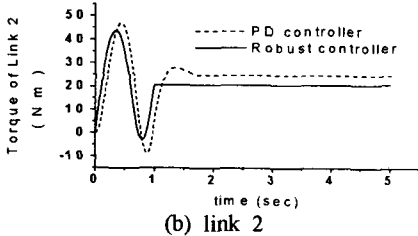


Fig. 5 Control torque without payload



(a) link 1



(b) link 2

Fig. 6 Control torque with payload

## 5. 결론

로봇 운동방정식의 특성으로부터 정확히 모델링하기 어려운 동적 항이나 비선형 항의 제한 범위를 구하고, 그 제한 범위를 이용하여 간단하고 계산량이 적은 비선형 강인제어기를 제안하였다. 제안한 제어기가 이론적으로 점근 안정함을 리아푸노프 직접법으로 증명하였다. 전산 모의 실험으로 제안한 제어기가 PD제어기에 비하여 궤적 추적 제어 성능이 우수함을 보였다.

## 참고문헌

1. F. L. Lewis, C. T. Abdallah and D. M. Dawson, 1993, "Control of Robot Manipulators", Macmillan Publishing company.
2. Romeo Ortega, and Mark W. Spong, 1988, "Adaptive Motion Control of Rigid Robots: A

Tutorial", Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, Vol.2, pp. 1575-1584

3. 이 재영, 1995, "비선형력 보상 관절 별 로봇 제어", 울산대학교 대학원
4. C. Abdallah, D. Dawson, P. Dorato, and M. Jamshidi, 1991, "Survey of Robust Control for Rigid Robots", IEEE Control Systems Magazine, Vol.11, pp. 24-30
5. Mark W. Spong, and M. Vidyasagar, 1989, "Robot Dynamics and Control", John Wiley & Sons, Inc.
6. Er, M. J., 1993, "Recent Developments and Futuristic Trends in Robot Manipulators Control", Motion Control Proceedings, pp. 106-111
7. John J. Craig, 1988, "Adaptive Control of Mechanical Manipulators", Addison-Wesley Publishing Company
8. Dawson, D. M., Z. Qu, F. L. Lewis, and J. F. Dorsey, 1990, "Robust Control for the Tracking of Robot Motion", International Journal of Control, Vol.52, pp. 581-595
9. H. G. Sage, M. F. De Mathelin, and E. Ostertag, 1999, "Robust Control of Robot Manipulators: A Survey", Int. Journal of Control, Vol.72, No.16, pp. 1498-1522
10. Jean-Jacques E. Slotine, 1985, "The Robust Control of Robot Manipulators", The International Journal of Robotics Research, Vol.4, No.2, pp. 49-64
11. W. C. Lee, J. Yuh, and Jing Nie, 1998, "Adaptive Control of Robot Manipulators using bound estimation", Proceedings of the 1998 IEEE/RSJ Int. Conference on Intelligent Robots and Systems, Vol.2, pp. 1126-1131.
12. Ham, C., Qu, Z., and Johnson, R., 2000, "Robust fuzzy control for robot manipulators", IEE Proceedings-Control Theory and Applications, Vol.147, Issue 2, pp. 212-216
13. Lewis, F.L., 1996, "Neural network control of robot manipulators", IEEE Expert, Vol.11, Issue 3, pp. 64-75