

파라미터 수정을 사용한 형상변화 및 측정오차가 있는 빔의 모델개선

윤 병 옥* · 최 유 근** · 장 인 식***

Model Updating of Beams with Shape Change and Measurement Error Using Parameter Modification

Byung Ok Yoon, Yoo Keun Choi and Insik Jang

Key Words: Parameter Model Updating(파라미터 모델 개선), Beam Shape Change(빔 형상 변화), Measurement Error(측정 오차), Design Parameter(설계 파라미터), Finite Element Method(유한요소법), Modal Frequency(모드 주파수), Modal Vector(모드 벡터).

Abstract

It is important to model the mechanical structure precisely and reasonably in predicting the dynamic characteristics, controlling the vibration, and designing the structure dynamics. In the finite element modeling, the errors can be contained from the physical parameters, the approximation of the boundary conditions, and the element modeling. From the dynamic test, more precise dynamic characteristics can be obtained. Model updating using parameter modification is appropriate when the design parameter is used to analyze the input parameter like finite element method. Finite element analysis for cantilever and simply supported beams with uniform area and shape change are carried out as model updating examples. Mass and stiffness matrices are updated by comparing test and analytical modal frequencies. The result shows that the updated frequencies become closer to the test frequencies.

기호설명

m_e : element mass matrix

k_e : element stiffness matrix

M_U : updated mass matrix

K_U : updated stiffness matrix

M_A : mass matrix used in analysis

K_A : stiffness matrix used in analysis

P : design parameters

ϕ_A : eigenvector from analysis

λ_A : eigenvector from analysis

ϕ_T : eigenvector from test

1. 서 론

정확한 수학적인 구조 모델은 동적 거동의 예측이나 진동의 제어, 구조적인 동역학 모델의 설계 등에 있어서 중요한 역할을 한다. 구조해석을 위해서 가장 많이 사용되는 방법으로는 유한요소법이

* 대구가톨릭대학교 기계자동차공학부

** 대구가톨릭대학교 대학원

*** 홍익대학교 기계정보공학과

있다. 그러나, 유한요소는 모델링에 있어서 물리적인 파라미터나 경계조건의 근사화, 연결 부위의 불확실성과 접합 부위의 단순화에 의한 가정 등에 의하여 부정확한 요소를 내포하고 있다. 실제적으로 해석적인 결과와 실험의 결과는 상당한 차이를 나타내는 경우가 있다. 복잡한 구조물의 보다 정확한 동역학적인 특성은 동적 실험을 통해서 얻을 수 있다. 따라서, 실험적인 모드 해석은 구조 동역학이나 진동학에서는 모델을 규명하는데 널리 사용되는 방법이다. 그러나, 이러한 방법에도 불완전한 실험 데이터나 잡음 등에 의하여 생기는 문제점을 해결해야하는 어려움이 있다. 해석 결과가 실험 결과와 일치하지 않을 경우에 고려해야할 오차로는, 해석 모델이 실제 모델의 물리적 거동을 정확하게 표현할 수 없기 때문에 발생하는 구조 오차, 연속적인 실제 구조물을 이산화 할 때 충분한 자유도가 고려되지 않아서 발생하는 모델 차수 오차 그리고 해석 모델은 정확하지만 파라미터의 수치적인 값들이 정확하지 않아 발생하는 모델 파라미터 오차 등이 있다. 모델 개선(model updating)은 이러한 파라미터의 추정 및 개선을 위한 기술이며, 여러 가지의 방법이 연구되어 왔다. 그 중에서 파라미터 모델 개선법(parameter model updating) 유한요소법과 같이 설계 변수가 해석을 위한 변수로 바로 입력되는 해석법에는 가장 적합한 방법이다. 유한요소법에서 설계 변수 입력 값에는 물성치(material properties)인 Young's modulus 나 밀도 등이 있고 기하학적인 특성치(geometrical properties)로는 관성모멘트 등이 있다. 본 연구에서는 이러한 해석 모델의 개선을 통하여 실제 구조물의 변화를 추정하는 것을 목적으로 한다.

2. 유한요소해석모델

2.1 모델의 구성

모델 개선법을 적용하여 해석 모델의 정확성을 찾아내기 위한 대상 구조물로는 외팔보(cantilever)와 단순지지보(simply supported beam)를 이용한다. 외팔보 해석에서는 먼저 일정 단면의 보를 모두 요소의 길이가 같은 10개의 요소로 나누고, 각 절점당 변위와 회전각을 고려해

서 총 22자유도의 Bernoulli-Euler보로 모델링한다. 단순지지보 해석에서는 같은 모양의 보를 양 끝에서 지지하므로 요소의 수를 11개이다. 따라서, 이 경우에는 총 24 자유도의 해석 모델이 된다. 유한요소 모델링을 통하여 강성 행렬과 질량 행렬을 구한다. 요소의 강성 및 질량 행렬은 다음 식을 이용하여 구한다.

$$m_e = \frac{\rho A_e l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ & & 156 & -22l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

symmetry

$$k_e = \frac{EI}{l_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l_e & -12 & 6l_e \\ & 4l_e^2 & -6l_e & 2l_e^2 \\ & & 12 & -6l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

symmetry

여기서, m_e 와 k_e 는 각각 요소 질량행렬과 요소 강성행렬을 나타낸다. E 는 Young's modulus, ρ 는 Mass density 의 물질특성을 나타내며, I 는 Moment of Inertia for bending, A_e 는 단면적, l_e 는 요소의 길이와 같은 기하학적인 특성을 나타낸다. 균일 단면적의 모델의 해석 후에는 일부 요소에서 단면적이 변하는 모델에 대하여도 해석을 수행한다. 이 경우 단면적이 작아진 부분을 하나의 요소로 구성하고, 그 요소에서는 위의 요소 행렬 중 단면적과 inertia 의 값이 달라진다.

2.2 모델 개선의 방법

위에서 얻어진 계산데이터와 실험데이터를 토대로 모델개선을 하게 되는데, 모델 개선은 유한요소법에서 수행된 모드 해석과 실험에 의한 데이터를 이용하여 다음과 같은 개선된 질량행렬(mass matrix)과 강성행렬(stiffness matrix)을 얻을 수 있다.

$$M_U = M_A + \Delta M = M_A + \sum \frac{\partial M}{\partial P_j} \Delta P_j \quad (1)$$

$$K_U = K_A + \Delta K = K_A + \sum \frac{\partial K}{\partial P_j} \Delta P_j \quad (2)$$

여기서, U는 개선된 모델을 나타낸 첨자이고, A는 해석을 위한 모델을 나타내며, 오차 질량 및 오차 강성 행렬인 $\Delta M, \Delta K$ 는 각각 다음과 같은 설계 파라미터 P에 대한 변화의 함수이다.

$$\Delta P_j = P_{Uj} - P_{Aj}, j = 1, 2, \dots, N_p \quad (3)$$

나머지(residues)는 개선된 해석 모델에 의한 결과와 측정된 결과의 차이로 다음과 같이 정의된다. 나머지는 설계 파라미터의 함수이며 개선된 모델에서 계산된 결과는 Taylor 급수로 전개가 가능하다.

$$R(\Delta P) = y_U(\Delta P) - y_T \quad (4)$$

$$y_U(\Delta P) \approx y_A + \sum \frac{\partial y}{\partial P_j} \Delta P_j \quad (5)$$

따라서

$$R(\Delta P) \approx y_A + \sum \frac{\partial y}{\partial P_j} \Delta P_j - y_T \quad (6)$$

이러한 설계 파라미터의 변화를 위하여 다음과 같은 고유치 문제(eigenvalue problem)에서 유도된 고유값과 고유 벡터로부터 유도된 모드 주파수(modal frequencies)와 모드벡터(modal vectors)를 이용한다.

$$(K_A - \lambda_A M_A) \phi_A = 0 \quad (7)$$

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial P_j} \Delta P_j \approx \lambda_T - \lambda_A = \Delta \lambda \quad (8)$$

$$\sum \frac{\partial \phi}{\partial P_j} \Delta P_j \approx \phi_T - \phi_A = \Delta \phi \quad (9)$$

여기서, λ 는 고유치(eigenvalue)이며 ϕ 는 고유벡터(eigenvector)이다. 또한, 첨자 A는 해석에 의한 결과를 나타내며, T는 실험에 의한 결과를 나타낸다. 식(7)을 파라미터에 대하여 미분하고 정리하면

$$\frac{\partial \lambda}{\partial P_j} = \frac{\phi_A^T \left(\frac{\partial K}{\partial P_j} - \lambda_A \frac{\partial M}{\partial P_j} \right) \phi_A}{\phi_A^T M \phi_A} \quad (10)$$

이 되고 식(8)을 이용하면 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\sum \frac{\phi_A^T \left(\frac{\partial K}{\partial P_j} - \lambda_A \frac{\partial M}{\partial P_j} \right) \phi_A}{\phi_A^T M \phi_A} \Delta P_j \approx \Delta \lambda \quad (11)$$

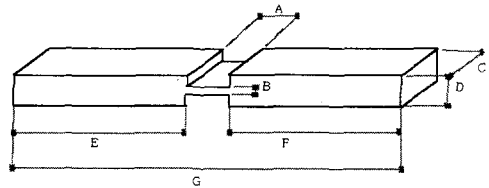
위의 식에서 ΔP_j 를 구하여 식 (1), (2)에 대입함으로써 개선된 강성 및 질량 행렬을 구할 수 있다.

3. 각 모델의 진동 실험

3.1 실험 방법

외팔보 및 단순지지보에 가속도계(accelerometer)를 부착하고, 충격 해머(impact hammer)로 가격하여 신호를 고속푸리에변환기(FFT Analyzer)에서 주파수에 따른 신호의 형태를 얻는다. 실험에 사용된 외팔보와 단순지지보는 알루미늄(AL)합금으로 제작된 Fig.1과 같은 규격의 균일 단면적인 시편과 단면적의 변화가 있는 시편을 사용하였다. 외팔보는 대형 바이스를 사용하여 시편끝 30mm를 고정하였고, 단순지지보는 양끝단을 얇은 철판 위에서 고무로 눌러 주었다.

실험은 해석의 결과와 비교하기 위해 유한요소 절점에서 임팩트 해머로 가진 한 후 가속도계로 측정된 신호를 받아 고유진동수와 고유모드를 구하였다.



	A	B	C	D	E	F	G
1	0	25	50	25	515	515	1030
2	24	13	50	25	506	500	1030

단위 : mm

Fig.1. Beam model used in this study

3.2 실험 결과

가속도 신호를 측정한후 시편의 전달함수(transfer

function)을 구하면 Fig.2 ~ Fig.5와 같다.

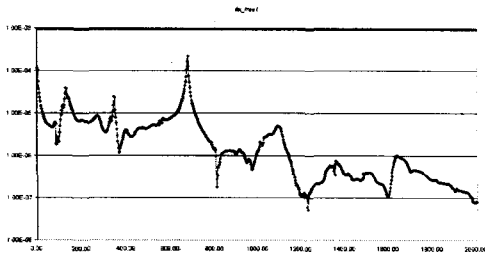


Fig.2. Natural frequency and acceleration of beam model without step (fixed-free boundary condition)

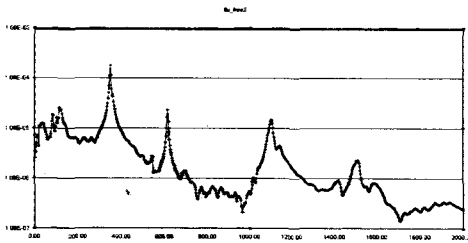


Fig.3. Natural frequency and acceleration of beam with step (fixed-free boundary condition)

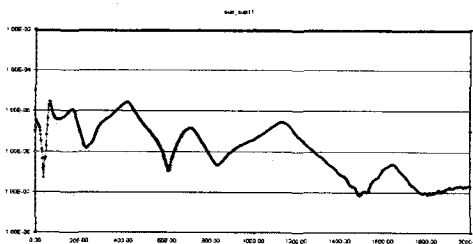


Fig.4. Natural frequency and acceleration of beam model without step (pinned-pinned boundary condition)

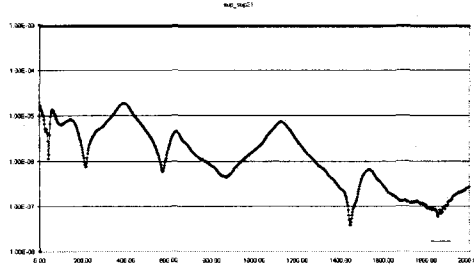


Fig.5. Natural frequency and acceleration of beam with step (pinned-pinned boundary condition)

고유진동수(or 모드주파수)의 상세한 값은 Table 1 ~ Table 4의 측정주파수(f_i)와 같다. 이렇게 구한 모드주파수(modal frequency)와 모드 벡터(modal vector)를 계산 결과와 비교하였다.

4. 개선된 모델에 의한 해석

모델 개선을 위한 파라미터로는 기하학적인 특성을 나타내는 면적과 물질적인 특성을 나타내는 영률(Young's modulus)을 택하였다. 설계 파라미터의 변화에 의한 행렬의 변화는 실험값과 처음 계산값 모드 주파수(modal frequency)를 비교한 후 MATLAB을 사용하여 계산하였다. 각 모드에서 식 (11)을 이용하여 ΔP_i 를 구한 후 이를 식 (1), (2)에 대입하여 개선된 강성, 질량 행렬을 구한다.

Table 1은 단면적이 균일한 외팔보에 대하여 각 모드별로 모델 개선 알고리즘을 적용하여 새로 계산된 주파수를 나타낸다.

Table 1 Updated frequencies for uniform cantilever

mode f_i	1st	2nd	3rd	4th	5th
matrices	70	127.5	345	677.5	1092.5
M_A, K_A	20.4	127.9	358.1	702.2	1162.5
M_A, K_U	70	127.5	345	677.5	1092.5
M_U, K_A	comp.	127.5	345.89	679.12	1100
M_U, K_U	comp.	127.15	333.27	655.28	1033.8

첫 번째 열에는 계산에 사용된 행렬의 종류를 나타낸다. 여기서 M_A , K_A 는 각각 원래의 유한요소 모델에서의 질량, 강성 행렬을 나타내며, K_U 와 M_U 는 개선된(updated) 강성 및 질량 행렬을 나타낸다. 따라서, 계산된 주파수의 첫 번째 경우는 개선되기 전 본래의 유한요소 해석에 의한 것이며, 마지막 경우는 질량과 강성 행렬이 모두 개선된 경우를 나타낸다. mode는 개선에 사용된 각각의 진동 모드를 나타내며, f_i 는 각 모드에서 측정된 주파수를 나타낸다. comp. 는 계산된 주파수가 복소수임을 나타낸다. 첫 번째 모드의 경우 유한요소에 의한 계산치와 실험치가 상당한 차이를 보임으로써 개선과정에서 과도한 행렬의 변화가 이런 결과를 초래한 것으로 보인다. Table 1에서도 알 수 있듯이 질량 행렬을 개선하지 않고, 강성 행렬만을 개선한 경우에는 실험에서 측정된 주파수와 동일한 결과를 얻을 수 있다. 질량 행렬만을 개선하여 계산한 결과가 행렬을 모두 개선하여 구한 결과보다 실험치에 보다 가까운 결과를 나타낸다.

Table 2 Updated frequencies for cantilever with shape change

mode f_i	1st	2nd	3rd	4th	5th
matrices	87.5	122.5	347.5	612.5	1097.5
M_A, K_A	19.8	114.9	357.9	646.4	1159.9
M_A, K_U	87.5	122.5	347.5	612.5	1097.5
M_U, K_A	comp.	123.67	348.07	615.73	1103.6
M_U, K_U	comp.	131.88	337.98	583.4	1044.2

Table 2 는 그림 1에서와 같이 단면적이 변화하는 외팔보에 대하여 각 모드별로 모델 개선 알고리즘을 적용하여 새로 계산된 주파수를 나타낸다. Table 1의 경우와 마찬가지로 강성 행렬만 개선한 경우는 실험치와 같은 주파수를 나타낸다. 질량과 강성 행렬을 모두 개선한 경우에는 실제 실험에서 얻어진 주파수에 비해 약 5% 정도 작게 나타나고 있다.

Table 3 Updated frequencies for simply supported beam with uniform cross section

mode f_i	1st	2nd	3rd	4th	5th
matrices	65	172.5	420	685	1140
M_A, K_A	54.0	215.9	486.0	864.9	1354.2
M_A, K_U	65	172.5	420	685	1140
M_U, K_A	72.79	159.33	434.15	738.2	1191.7
M_U, K_U	87.65	174.69	375.17	584.65	1003.2

Table 3은 단면적이 균일한 단순 지지보에 대하여 각 모드별로 모델 개선 알고리즘을 적용하여 새로 계산된 주파수를 나타낸다. 이 경우는 질량 행렬을 개선한 경우에도 모드에 따라서 실험치의 주파수보다 작은 경우와 큰 경우가 동시에 나타남을 알 수 있다.

Table 4 Updated frequencies for simply supported beam with shape change

mode f_i	1st	2nd	3rd	4th	5th
matrices	52.5	147.5	397.5	632.5	1130
M_A, K_A	48.2	215.9	445.4	864.7	1264.0
M_A, K_U	52.5	147.5	397.5	632.5	1130
M_U, K_A	53.436	174.35	405.99	714.4	1153.5
M_U, K_U	58.202	119.12	362.34	522.58	1031.2

Table 4은 단면적이 변화하는 단순지지보에 대하여 각 모드별로 모델 개선 알고리즘을 적용하여 새로 계산된 주파수를 나타낸다. 이 경우에는 개선된 질량 행렬에 대하여, 본래의 강성 행렬을 적용하였을 경우에는 대체적으로 실험치보다 큰 주파수를 나타내었다. 또한, 질량, 강성 행렬이 모두 개선된 모델에서는 첫 번째 모드를 제외하고는 실험치보다 약 10% 정도 작은 주파수를 나타내었다.

부록에는 강성 행렬만을 개선한 경우에 계산된 주파수가 실험치와 동일한 값으로 되는 과정을 본예제의 경우에 대하여 유도한 식을 나타내었다.

5. 결론

본 연구에서는 구조물의 동특성을 정확히 파악하기 위해 유한요소 모델과 실험 모델을 일치하도록 개선하는 방법을 구현하였고, 구조물의 형상 변화 및 측정오차 등이 있는 경우의 영향을 살펴보았다. 설계변수를 모드 주파수(modal frequency)와 모드 벡터(modal vector)를 사용하여 계산한 후 유한 요소모델의 개선을 실현하였고, 경계조건에 따라 구조물의 형상 변화 및 측정오차가 존재할 경우의 영향을 실험과 계산을 통해 비교한 후 유한요소 모델을 개선하였다.

균일한 단면적과 변화하는 단면적을 가진 외팔보와 단순 지지보에 대한 네 가지 경우에 대하여 해석을 수행하였으며, 모델 개선은 모드 주파수를 이용하여 질량 행렬과 강성 행렬에 대하여 독립적으로 수행하였다. 각 경우에서 개선된 모델의 주파수를 비교해 보면, 외팔보의 첫 번째 모드와 같이 주파수 크기의 차이가 아주 많이 나는 경우를 제외하고는 비록 개선 과정은 한번밖에 거치지 않았지만 높은 주파수의 모드로 갈수록 본래의 유한요소에 의한 주파수 보다 실험치에 근접함을 알 수 있었다. 따라서 유사한 과정을 반복하는 방법과 모드벡터의 차이를 고려하는 방법이 추가된다면 보다 나은 모델 개선의 효과가 있을 것으로 기대한다.

부 록

(강성행렬 만을 개선한 경우의 계산과정)

$$\Delta P_1 \frac{\phi_i^T \left(\frac{\partial K}{\partial P_1} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial P_1} \right) \phi_i}{\phi_i^T M \phi_i} = \Delta \lambda_i$$

$$= \lambda_{iT} - \lambda_{iA}$$

$P_1 = E$: Young's modulus 라고 하자.

$$\frac{\partial K}{\partial P_1} = \frac{K}{E} \quad \frac{\partial M}{\partial P_1} = 0$$

강성 행렬을 개선하는 과정은

$$K_U = K_A + \Delta K$$

$$= K_A + \frac{\partial K}{\partial P_1} \Delta P_1$$

$$= K_A + \frac{K}{E} \Delta E$$

$$\frac{\phi_i^T \Delta E \frac{K}{E} \phi_i}{\phi_i^T M \phi_i} = \lambda_{iT} - \lambda_{iA}$$

$$\phi_i^T \Delta E \frac{K}{E} \phi_i = \phi_i^T M \phi_i (\lambda_{iT} - \lambda_{iA})$$

$$\phi_i^T (K_U - K_A) \phi_i = \phi_i^T M \phi_i (\lambda_{iT} - \lambda_{iA})$$

$$\phi_i^T K_U \phi_i - \lambda_{iT} \phi_i^T M \phi_i$$

$$= \phi_i^T (K_A - \lambda_{iA} M) \phi_i = 0$$

$$\phi_i^T (K_U - \lambda_{iT} M) \phi_i = 0$$

위 식에서 개선된 고유치 문제에서의 주파수는 λ_{iT} 로서 실험치를 나타낸다.

참고문헌

- (1) J. E. Mottershead and M. I. Friswell, "Model Updating in Structural Dynamics: A Survey", Journal of Sound and Vibration, 167(2), pp.347-375, 1993
- (2) L. M. Zhang, "A Consistent Derivation & Assesment of Different Model Updating Procedures", Proc. of the 14th International Modal analysis Conference, pp 769-775, 1996
- (3) J. E. Mottershead and M. I. Friswell, Finite Element Model Updating in Structural Dynamics, Kluwer, 1995
- (4) 김홍준, 박영필, "특이값 분해와 고유치 해석을 이용한 유한요소모델의 개선", 한국 소음진동공학회지 제 9 권 제 1 호 pp. 163 ~ 173
- (5) 장경진, 박영필, "Model Updating of a Car Body Structure using a Generalized Free-Interface Mode Sensitivity Method", 대한기계학회논문집 A권, 제24권, 제5호, pp.1133~1145.2000
- (6) J. H. Gordis, "Artificial Boundary Conditions For Model Updating And Damage Detection", Mechanical Systems and Signal Processing, 13(3), pp 437~448, 1999
- (7) Francois M. Hemez, "Can Model Updating Tell The Truth?", IMAC, pp 1~10, 1998