

# 예하중을 받는 헬리컬 스프링의 진동 해석

이재형\* · 허승진\*\*

## Vibration Analysis of a Helical Spring under the pre-load Jaehyung Lee, Seung-Jin Heo

**Key Words:** 헬리컬 스프링(helical spring), 예하중(pre-load), 동강성(dynamic stiffness), 고유주파수(natural frequency), 프레넬 공식(Frenet formula)

### Abstract

By using Frenet formulation and Timoshenko beam theory, the partial differential equations of motion are derived for a helical spring having a doubly symmetrical cross section subjected to the pre-load axially. These equations of motion are solved to give the dispersion relationship and dynamic stiffness matrix is assembled. Natural frequencies are obtained from the receptance of the system. The results of the dynamic stiffness method are compared with those of the transfer matrix method from published examples and finite element method.

### 1. 서론

곡률을 갖는 보요소로 가장 대표적인 기계 요소가 헬리컬 스프링이다. 헬리컬 스프링의 진동 특성에 대한 연구는 Wahl<sup>(1)</sup>에 의하여 원형 단면을 갖는 코일 스프링의 양단이 고정되어 있는 경우에 대하여 축방향의 기본 고유진동수를 구하였으며, 축방향의 2차 이상의 고유진동수는 기본 고유진동수의 자연수의 배수로 나타남을 보여주었다. 1966년에 Wittrick<sup>(2)</sup>은 헬리컬 스프링을 전단력에 의한 변형과 회전관성을 포함하는 티모센코 보로 취급하여 12원 선형 편미분 방정식을 유도하였다. 이 운동방정식은 거의 완벽한 수준에 이르고 있어 필요에 따라 약간의 수정을 하여 현재까지 사용되고 있다. 그 후 Pearson<sup>(3)</sup>과 Yildirim<sup>(4)</sup> 등이 베르누이-오일러 보 이론과 프레넬 공식을 이용하여 운동방정식을 유도한 후, 전달행렬법을 사용하여 고유진동수와 모우드 형상을 구하였다. 또한 이재형<sup>(5)(6)</sup>

등은 티모센코 보 이론과 프레넬 공식으로부터 헬리컬 스프링에 대한 12원 선형 편미분 방정식을 유도하였는데, 그 결과가 Wittrick이 유도한 것과 동일하였으며, 동강성법을 이용하여 파동의 전달 특성과 고유진동수를 구하였다.

참고문헌 (3)과 (5)를 제외한 대부분의 헬리컬 스프링에 대한 진동 해석은 예하중의 조건을 고려하지 않은 상태로 이루어졌다. 그러나 일반적으로 헬리컬 스프링은 축방향의 예하중을 받고 있는 상태에서 동하중이 작용하며, 이 예하중에 의하여 헬리컬 스프링의 기하학적인 형상이 변하게 되고 그에 따라 동적 특성도 달라지게 된다.

본 논문은 예하중을 포함한 동하중을 고려하여 헬리컬 스프링의 진동 특성을 규명하였다. 먼저 티모센코 보 이론과 프레넬의 공식<sup>(7)</sup>으로부터 운동방정식을 유도하였고, 파동수와 고유주파수의 관계를 보여주는 분산관계를 이용하여 동강성 행렬을 구성하였다. 헬리컬 스프링의 고유주파수는 동강성 행렬의 고유값의 역수가 극값을 취하는 점들로 구할 수 있었다. 그리고 이 결과를 참고문헌 (3)에서 제시한 방법으로 구한 결과와 비교하였다.

\* 국민대학교 자동차공학전대학원

\*\* 국민대학교 기계자동차공학부

## 2. 운동에 대한 편미분 방정식의 유도

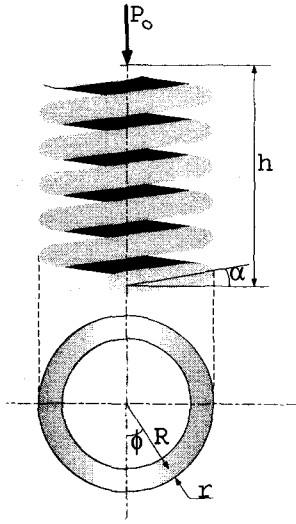


Fig. 1 Schematic view of a compressed helical spring

Fig. 1과 같이 반경이  $r$ 인 철선을 오른쪽으로  $n$ 번 감아서 만들어진 원통형 헬리컬 스프링의 반경이  $R$ 이고 권선의 각이  $\alpha$ 라고 하자. 스프링이 축방향으로 작용한 정하중  $P_0$ 에 의하여 압축을 받는 경우 스프링은 권선을 따라 감겨지면서 권선의 각은 줄어들게 되는 반면에 권선의 수는 약간 늘어나게 될 것이다. 이 때 압축된 스프링의 권선의 곡률  $\kappa$ 와 비틀림률  $\tau$ 는 각각 다음과 같이 정의되고 있다.

$$\tau = \frac{1}{R} \cos^2 \alpha \quad (1)$$

$$\tau = \frac{1}{R} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2)$$

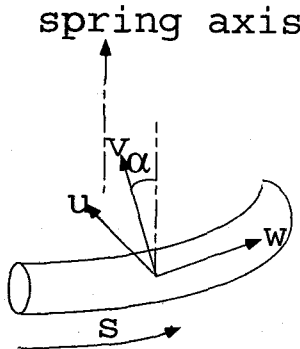


Fig. 2 coordinate system of a helical spring

압축된 권선의 길이를 따라서 측정된 길이를 Fig. 2에서와 같이 좌표  $s$ 로 나타낸다면 이 좌표의 법선방향의 단위벡터  $\mathbf{u}$ 와 접선방향의 단위벡터  $\mathbf{w}$  및 좌표의 오른손 법칙에 따라서 이 두 방향과 직교를 이루고 있는 방향의 단위벡터를  $\mathbf{v}$ 로 나타낼 수 있다. 이 단위벡터의 방향을 따라서 발생하는 미소의 동적 선형 변위를 각각  $\delta_u, \delta_v, \delta_w$ 라고 하고 권선의 단면적이 회전한 변위를  $\theta_u, \theta_v, \theta_w$ 라고 한다면 그 때의 선형 변위와 각 변위는 각각 다음과 같다.

$$\delta = \delta_u \mathbf{u} + \delta_v \mathbf{v} + \delta_w \mathbf{w} \quad (3)$$

$$\theta = \theta_u \mathbf{u} + \theta_v \mathbf{v} + \theta_w \mathbf{w} \quad (4)$$

이 단위벡터를  $s$ 에 대하여 미분하게 되면,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 가 각각 선형적으로 독립이므로 다음과 같은 프레넬의 공식을 적용할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} = \tau \mathbf{v} - \kappa \mathbf{w} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s} = -\tau \mathbf{u} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial s} = \kappa \mathbf{u} \quad (7)$$

한편, 스프링에 하중이 작용하여 정적인 평형을 이루었을 때 스프링의 반경이 변하지 않는다고 가정한다면 스프링의 임의의 점에 작용하는 정적인 힘  $\mathbf{P}_0$ 과 모멘트  $\mathbf{M}_0$ 를 단위벡터의 성분으로 나타내면 각각 식 (8) 및 (9)와 같다.

$$\mathbf{P}_0 = (-P_0 \cos \alpha) \mathbf{v} + (-P_0 \sin \alpha) \mathbf{w} \quad (8)$$

$$\mathbf{M}_0 = (P_0 R \sin \alpha) \mathbf{v} + (-P_0 R \cos \alpha) \mathbf{w} \quad (9)$$

정적으로 평형을 이룬 헬리컬 스프링에 동하중이 작용한다면 이 때 스프링에 나타나는 힘과 모멘트는 정하중과 동하중의 합력으로 나타나며, 단위벡터의 향으로 표시하면 식 (10)과 (11)과 같다.

$$\mathbf{P} = P_u \mathbf{u} + (P_v - P_0 \cos \alpha) \mathbf{v} + (P_w - P_0 \sin \alpha) \mathbf{w} \quad (10)$$

$$\mathbf{M} = M_u \mathbf{u} + (M_v + P_0 R \sin \alpha) \mathbf{v} + (M_w - P_0 R \cos \alpha) \mathbf{w} \quad (11)$$

이 식에서  $\mathbf{P}$ 와  $\mathbf{M}$ 은 힘과 모멘트를 나타내며, 아래 첨자  $u, v, w$ 는 각각 힘과 모멘트의 단위벡터 방향의 성분을 의미한다.

헬리컬 스프링의 한 요소가 티모셴코 보의 거동을 한다고 가정하면 보에 작용하는 힘과 모멘트에

의한 변형의 관계로부터 다음과 같은 6 개의 편미분 방정식을 유도할 수 있다<sup>(5)(6)</sup>.

$$\frac{\partial \delta_u}{\partial s} = \frac{P_u}{GA\gamma} + \theta_v + \tau \delta_v - \chi \delta_u \quad (12)$$

$$\frac{\partial \delta_v}{\partial s} = \frac{P_v}{GA\gamma} - \theta_u - \tau \delta_u \quad (13)$$

$$\frac{\partial \delta_w}{\partial s} = \frac{P_w}{EA} + \chi \delta_u \quad (14)$$

$$\frac{\partial \theta_u}{\partial s} = \frac{M_u}{EI_u} + \tau \theta_v - \chi \theta_w \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial s} = \frac{M_v}{EI_v} - \tau \theta_u \quad (16)$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial s} = \frac{M_w}{GI_w} + \chi \theta_u \quad (17)$$

이 식에서 E와 G는 각각 권선의 영률과 전단강성 계수이고, A와 I는 각각 단면적과 그에 대한 회전 관성 모멘트를 의미한다. 스프링의 단면을 원형으로 가정한 경우에는  $I_u=I_v$ 이고  $I_w=2I_u$ 가 된다.

Fig. 2에서와 같이 스프링의 한 요소의 중심을 C 라하고 양쪽 끝을 각각 A와 B로 표시하면 C점에서 스프링의 축에 수직방향으로 작용하는 힘 P는 B점과 C점에 작용하는 순수한 힘의 변화량에 좌표의 회전에 의한 변화량을 고려한 값으로 식 (18)로 표현된다.

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s} ds + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial s} \times \mathbf{P} ds = 0 \quad (18)$$

식 (10)과 (15)~(17)을 식 (18)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 3 개의 편미분 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_u}{\partial s} &= (P_o \sin \alpha) \left( \frac{M_v}{EI_v} \right) \\ &\quad - (P_o \cos \alpha) \left( \frac{M_w}{EI_w} \right) + \tau P_v - \chi P_w \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial P_v}{\partial s} = - (P_o \sin \alpha) \left( \frac{M_u}{EI_u} \right) - \tau P_u \quad (20)$$

$$\frac{\partial P_w}{\partial s} = (P_o \cos \alpha) \left( \frac{M_u}{EI_u} \right) + \chi P_u \quad (21)$$

동일한 방법으로 스프링 요소의 중심 C에 작용하는 모멘트  $\mathbf{M}$ 과 C점으로부터  $\left[ \mathbf{w} + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial s} \right) \frac{ds}{2} \right]$  만큼 떨어진 A점과 B점에 작용하는 힘 요소에 의하여 발생하는 모멘트 성분을 고려하면 식 (22)와 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\left\{ \left( \mathbf{w} + \frac{\partial \boldsymbol{\delta}}{\partial s} \right) \times \mathbf{P} \right\} ds \\ &+ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} ds + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial s} \times \mathbf{M} ds = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

식 (10), (11) 및 (15)~(17)을 식 (22)에 대입하여 정리하면 스프링 요소에 작용하는 모멘트에 대한 3 개의 편미분 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_u}{\partial s} &= - (P_o \sin \alpha) \theta_u \\ &\quad + \left( 1 + \frac{P_o \sin \alpha}{GA\gamma} \right) P_v \\ &\quad - \left( \frac{P_o \cos \alpha}{EA} \right) P_w \\ &\quad + \left\{ \tau + \left( \frac{P_o R \cos \alpha}{EI_v} \right) \right\} M_v \\ &\quad + \left\{ \left( \frac{P_o R \sin \alpha}{EI_w} \right) - \chi \right\} M_w \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_v}{\partial s} &= - (P_o \sin \alpha) \theta_v \\ &\quad - \left( 1 + \frac{P_o \sin \alpha}{GA\gamma} \right) P_u \\ &\quad - \left\{ \tau + \left( \frac{P_o R \cos \alpha}{EI_u} \right) \right\} M_u \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_w}{\partial s} &= (P_o \cos \alpha) \theta_v \\ &\quad + \left( 1 + \frac{P_o \cos \alpha}{GA\gamma} \right) P_u \\ &\quad + \left\{ \chi - \left( \frac{P_o R \sin \alpha}{EI_u} \right) \right\} M_u \end{aligned} \quad (25)$$

식 (12)~(17)과 관련된 변위에 대한 편미분방정식과 식 (19)~(21)의 힘에 대한 편미분방정식 및 식 (23)~(25)의 모멘트와 관련된 편미분방정식을 식 (26)의 행렬식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

이 식의  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$ 는 부록에 정리하였다.

정적으로 평형인 상태에서 구해진 식 (26)에 탄성력에 반대방향으로 작용하는 관성력을 고려한 달랑베르 정리를 이용하면 식 (27)과 같은 동적 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ T_{21} & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\delta} \\ \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

이 식의  $T_{21}$ 은 부록에 나타내었다.

### 3. 동강성 행렬의 구성

#### 3.1 분산관계

스프링의 파동은 시간에 따른 변화와 공간에 따른 변화로 구성된다. 시간에 대한 변화는 각주파수  $\omega$ 로 표시되며, 공간에 대한 변화는 파동수  $k$ 로 표시하는데 이 두 변화의 특성은 복소수의 형태로 나타나는데 실수부는 파동의 감쇠특성을 표현하게 되고 허수부는 파동의 전달 특성을 보여준다.

만일 스프링 요소에 작용하는 하중과 그 때 발생하는 변위가 조화함수의 형태를 취하게 된다고 가정하면 식 (27)은 다음과 같은 선형 연립 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{pmatrix} K & I \\ S_{21} - \omega^2 T_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \theta \end{pmatrix} = 0 \quad (28)$$

#### 3.2 동강성 행렬

헬리컬 스프링의 동강성 행렬은 자유 파동에 대한 해석으로부터 구할 수 있다. 먼저 식 (27)의 변위에 해당하는 처음 6행으로부터 거리  $s$ 만큼 떨어진 곳에서의 하중과 변위의 관계를 정리하면,

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = -[S_{12}]^{-1} [S_{11}] \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} \pm [S_{12}]^{-1} \frac{\partial}{\partial s} \begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (28)$$

가 되며, 변위에 대한 식은 전방방향으로 전달되는 6 개의 파동과 다시 돌아오는 6 개의 파동의 합으로 표시할 수 있으므로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \delta \\ \theta \end{Bmatrix} = - \sum_i^{12} a_i \{ \phi_i \} e^{k_i s} e^{j\omega t} = [\Phi] \text{diag}(k_i e^{k_i s}) \{ a_i \} e^{j\omega t} \quad (29)$$

이 식에서  $[\Phi]$ 는 식 (28)의 고유값 해석을 통하여 얻은 고유벡터 행렬이며,  $a_i$ 는 파동의 진폭을 의미한다. 식 (29)와 이 식을  $s$ 에 대하여 편미분한 결과를 식 (28)에 대입하여 정리하면 식 (30)을 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = -[S_{12}]^{-1} [S_{11}] [\Phi] \text{diag}(e^{k_i s}) \{ a_i \} + [S_{12}]^{-1} [\Phi] \text{diag}(k_i e^{k_i s}) \{ a_i \} \quad (30)$$

식 (29)로부터  $S=0$ 과  $L$ 에 대한 변위 벡터를 구하면 식 (31)로 쓸 수 있다.

$$U = D_1 a \quad (31)$$

동일한 방법으로 식 (30)으로부터 하중 벡터를 구하면 식 (32)와 같다.

$$F = D_2 a \quad (32)$$

식 (31)로부터  $a = D_1^{-1} U$ 이므로 이 식을 식 (32)에 대입하여 정리하면

$$F = (D_2 D_1^{-1}) U = K U \quad (33)$$

가 되어 헬리컬 스프링의 동강성 계수  $K$ 를 결정할 수 있다.

### 4. 적용 사례 및 검토

구조물의 고유주파수는 단위 하중에 대한 변위가 무한대의 값을 갖는 주파수를 의미하므로, 이 경우 동강성 행렬의 역행렬에 대한 고유치가 극값을 갖는 주파수가 고유주파수가 된다.

본 논문에서 제시한 방법으로 헬리컬 스프링에 대하여 고유주파수를 구하였으며, 그 결과를 참고 문헌 (3)에서 제시한 전달행렬법으로 구한 결과 및 실험으로 구한 결과와 비교하였다. 여기에 사용된 스프링은 소형 승용차의 전륜 현가장치에 사용되는 것으로 스프링 작용을 하지 않는 끝부분은 비연삭 벌림끝 자리 감김으로 마무리 처리를 하였다.

참고문헌 (3)의 전달행렬법에서 스프링 전체에 대한 전달행렬을 구하기 위하여 스프링을 5 개의 동일한 간격으로 나누어 각각의 요소에 대한 전달행렬을 구한 후에 각각의 요소에 대한 전달행렬을 순차적으로 곱하여 얻는 방법을 사용하였다. MATLAB을 사용하여 본 논문에서 제시한 동강성법을 이용한 프로그램을 작성하여 PC에서 해석을

Table 1. natural frequencies of a spring with free-free boundary conditions: wire radius=6 mm, helix radius=65 mm, helix angle=7.44°, number of total turns=6, mass density=7800 kg/m<sup>3</sup>, Young's modulus=2.09×10<sup>11</sup> N/m<sup>2</sup>, Poisson's ratio=0.28

	Dynamic stiffness method	Transfer matrix method	Test
1	41.96	41.96	42.25
2	43.31	43.32	43.68
3	44.11	44.11	-
4	49.38	49.38	48.81
5	80.18	81.18	81.25
6	86.72	86.72	87.69
7	88.30	88.30	90.86
8	94.93	94.93	93.88

수행하였다. 실험은 impact 가진 실험으로 경계조건은 free-free로 하였다.

Table 1에서는 예하중을 받지 않은 상태에서 각각의 방법으로 구한 결과를 비교하였다. 해석 결과 전달행렬법으로 구한 결과와 동강성법으로 구한 결과는 소숫점 둘째 자리까지 동일한 값을 보여주고 있으며, 실험 결과와의 오차도 최대 3%미만의 정확도를 보여주고 있다. 이러한 오차는 자리감김에 의한 기하학적인 형상의 변화를 제대로 고려하지 못해서 발생하므로 끝부분의 자리 매김의 종류에 따라 오차는 더 커질 수도 있다.

예하중을 받는 헬리컬 스프링의 진동 특성의 변화를 알아보기 위하여 동일한 헬리컬 스프링에 2 kN의 예하중을 가하고 양단을 고정시킨 경우에 대한 해석을 수행하였다. 이 경우 권선의 각은 7.4°에서 3.78°로 감소하게 되어 스프링의 높이가 49% 정도 줄어든다. 따라서 권선의 수는 약간 증가되며 전체적인 기하학적인 형상이 변화하게 되고 그 결과 고유주파수도 변하게 된다.

Table 2에는 변화된 고유주파수와 그 때의 주요 운동을 나타내었다. 팔호 안의 숫자는 예하중을 가하지 않은 상태에서 스프링의 기하학적 형상이 예하중을 가한 상태와 같은 경우에 대한 고유주파수 해석을 한 것이다. 이 결과에서 알 수 있듯이 헬리컬 스프링에 예하중을 가하였을 경우 축방향 운동이나 비틀림 운동에 미치는 영향이 거의 없는 반면에 횡방향 운동에 많은 영향이 있음을 보여주고

있다. 참고문헌 (5)에서도 헬리컬 스프링의 비틀림 운동에 대한 고유주파수가 예하중에 영향을 받지 않음을 보여주고 있다. 또한 해석 방법에 따라서는 횡방향의 운동에 대한 고유주파수도 차이가 나는 것을 알 수 있다. 특히 2차 횡방향 모드에 대해서는 해석 결과가 약 13% 정도의 차이를 보이고 있다.

## 5. 결론

본 연구에서는 예하중을 받는 헬리컬 스프링의 진동에 대한 해석을 수행하기 위하여 동강성 행렬을 구성하였다. 동강성 행렬은 티모셴코 보이론과 헬리컬 좌표계에 대한 프레넬의 공식으로부터 유도하였으며, 스프링 요소의 관성 효과를 고려하기 위하여 달랑베르의 정리를 이용하였다.

본 논문에서 제시한 방법으로 예하중을 받는 헬리컬 스프링의 고유주파수를 구하여 이전에 발표된 전달행렬법으로 구한 결과와 비교하였다. 그 결과 비틀림 모드에 대한 변화는 거의 없었으며 축방향 모드에 대한 변화도 미미하였다. 반면에 횡방향 모드에 대한 변화는 매우 크게 나타나고 있음을 알 수 있었다.

## 후 기

이 논문은 2000년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

## 참고문헌

- (1) A.M. Wahl, 1963, Mechanical Springs, 2nd Edn., NY, MacGraw Hill
- (2) W.H. Wittrick, 1966, "On Elastic Wave Propagation in Helical Springs," International Journal of Mechanical Science, 8, pp.25-47
- (3) D. Pearson, 1982, "The Transfer Matrix Method for the Vibration of Compressed Helical Springs," Journal of Mechanical Engineering Science, 24, pp.163-171
- (4) V. Yildirim and N. Ince, 1997, "Natural Frequencies of Helical Springs of Arbitrary Shapes," Journal of Sound and Vibration, 204(2), pp.311-329

Table 2. natural frequencies of a spring with clamped-clamped boundary conditions in the axial direction for a preload of 2.5 kN

	Dynamic stiffness method	Transfer matrix method	Principal motion
1	36.84	39.36	Torsional
2	42.84 (42.17)	43.64 (42.13)	Extensional
3	45.95 (57.73)	45.65 (57.62)	Lateral
4	45.95 (58.18)	- (58.25)	Lateral
5	47.68 (47.67)	48.55 (47.80)	Torsional
6	78.40 (81.88)	76.39 (81.80)	Extensional
7	90.04 (84.93)	80.16 (85.58)	Lateral
8	91.83 (86.34)	- (86.21)	Lateral
9	94.48 (93.55)	93.77 (93.01)	Torsional

- (5) 이재형, 허승진, 2001, "원형 단면을 갖는 헬리컬 스프링에 대한 파동," 대한기계학회논문집 A권 제25권 제5호
- (6) J.Lee and D.J. Thompson, 2001, "Dynamic Stiffness Formulation, Free Vibration and Wave Propagation of Helical Springs," Journal of Sound and Vibration, 239(2), pp.297-320
- (7) E. Kreyszig, 1993, Advanced Engineering Mathematics, 7th Edn., NY, Wiley

### 부 록

$$\begin{aligned} S_{11}(1,2) &= \tau \\ S_{11}(1,3) &= -\kappa \\ S_{11}(1,5) &= 1 \\ S_{11}(2,1) &= -\tau \\ S_{11}(2,4) &= -1 \\ S_{11}(3,1) &= \kappa \\ S_{11}(4,5) &= \tau \\ S_{11}(4,6) &= -\kappa \\ S_{11}(5,4) &= -\tau \\ S_{11}(6,4) &= \kappa \end{aligned}$$

이외의 요소는 모두 "0"임.

$$S_{12} = \text{diag}\left\{\frac{1}{GA\gamma}, \frac{1}{GA\gamma}, \frac{1}{EA}, \frac{1}{EI_u}, \frac{1}{EI_v}, \frac{1}{GI_w}\right\}$$

$$\begin{aligned} S'_{21}(4,4) &= -P_o \sin \alpha \\ S'_{21}(5,5) &= -P_o \sin \alpha \\ S'_{21}(6,6) &= P_o \cos \alpha \end{aligned}$$

이외의 요소는 모두 "0"임.

$$\begin{aligned} S'_{22}(1,5) &= \frac{P_o \sin \alpha}{EI_v} \\ S'_{22}(1,6) &= \frac{-P_o \cos \alpha}{GI_w} \\ S'_{22}(2,4) &= \frac{-P_o \sin \alpha}{EI_u} \\ S'_{22}(3,4) &= \frac{P_o \cos \alpha}{EI_u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S'_{22}(4,2) &= \frac{P_o \sin \alpha}{GA\gamma} \\ S'_{22}(4,3) &= \frac{-P_o \cos \alpha}{EA} \\ S'_{22}(4,5) &= \frac{P_o R \cos \alpha}{EI_v} \\ S'_{22}(4,6) &= \frac{P_o R \sin \alpha}{GI_w} \\ S'_{22}(5,1) &= \frac{-P_o \sin \alpha}{GA\gamma} \\ S'_{22}(5,4) &= \frac{-P_o R \cos \alpha}{EI_u} \\ S'_{22}(6,1) &= \frac{P_o \cos \alpha}{GA\gamma} \\ S'_{22}(6,4) &= \frac{-P_o R \sin \alpha}{EI_u} \end{aligned}$$

이외의 요소는 모두 "0"임.

$$S_{22} = S'_{22} - S_{11}^T$$

$$T_{21} = \text{diag}\{\rho A, \rho A, \rho A, \rho I_u, \rho I_v, \rho I_w\}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} [\Phi] \\ [\Phi] \text{diag}(e^{k_i L}) \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} -[S_{12}]^{-1}[S_{11}][\Phi] + [S_{12}]^{-1}[\Phi] \text{diag}(k_i) \\ -[S_{12}]^{-1}[S_{11}][\Phi] \text{diag}(e^{k_i L}) + [S_{12}]^{-1}[\Phi] \text{diag}(k_i e^{k_i L}) \end{bmatrix}$$