

Hilbert Transform을 이용한 진동모드 측정

강 민 식*

Measurement of Vibration Mode Shape By Using Hilbert Transform

Kang, Min Sig

Key Words: Mode Shape(모드형태), Continuous Scanning Laser Doppler Vibrometer(연속스캐닝 레이저 도플러 진동계), Fourier Transform(푸리에 변환), Hilbert Transform(힐버트 변환), Envelope(접근선), Instantaneous Phase(순간위상)

Abstract

This paper concerns on modal analysis of mechanical structures by using a continuous scanning laser Doppler vibrometer. In modal analysis the Hilbert transform based approach is superior to the Fourier transform based approach because of its fine accuracy and its flexible experimental settings. In this paper the Hilbert transform based approach is extended to measure area mode shape data of a structure by simply modifying the scanning pattern ranging the entire surface of the structure. The effectiveness of this proposed method is illustrated along with results of numerical simulation for a rectangular plate.

기호설명

$E(t)$: $v(x, y, t)$ 의 접근선 신호
 $v(x, y, t)$: (x, y) 위치에서 측정된 진동속도
 $\tilde{v}(x, y, t)$: $v(x, y, t)$ 의 Hilbert 변환
 $\phi(x, y)$: (x, y) 평면의 모드
 $\theta(t)$: $v(x, y, t)$ 의 순간위상 신호
 $F[*]$: *의 Fourier 변환

1. 서 론

기계적 구조물의 진동계측에 사용되고 있는 기존의 센서는 구조물에 직접 장착하거나 구조물에 근접하게 설치하여 측정하므로 센서 질량에 의한

진동 특성의 왜곡, 센서 설치의 어려움 등과 같은 문제가 있다. 반면 구조물의 표면에서 반사되는 레이저빔의 도플러 주파수 편이(frequency shift)를 이용하는 레이저 도플러 진동계(laser Doppler vibrometer: LDV)는 비접촉으로 측정이 가능하며, 측정점의 자유로운 변경이 용이하고, 비교적 먼 거리에서도 정밀한 측정이 가능한 장점 때문에 그 적용이 증가하고 있다^(1,2). 특히 레이저빔의 경로 상에 각도를 정밀하게 조정할 수 있는 반사경을 설치하여 레이저빔의 지향점을 임의로 변경할 수 있도록 함으로써 측정점을 원하는 위치로 쉽게 위치시킬 수 있는 연속 스캐닝 LDV(continuous scanning Laser Doppler vibrometer: CSLDV)는 기존의 센서를 이용한 모드해석에 비해 많은 장점을 제공하기 때문에 그 활용도가 높아지는 추세이다⁽¹⁻⁵⁾.

CSLDV를 이용한 실험적 모드해석 방법은 구조물이 진동하는 동안 구조물 표면을 정해진 궤적을 따라 스캐닝 하면서 구조물 표면의 진동속도를 측정하고 이 때 얻은 데이터를 처리하여 모드를 구하는 방법이다. CSLDV를 이용하여 획득한

* 경원대학교 기계공학과

E-mail: mskang@mail.kyungwon.ac.kr

Tel: 031) 750-5524

Fax: 031) 750-5273

데이터는 주파수 변조(frequency modulation)된 형태를 갖게 되며, 이 데이터로부터 모드를 추출하는 방법은 신호의 처리방법에 따라 복조(demodulation)방식, Fourier 변환방법^[1-5]과 Hilbert 변환방법으로 나눌 수 있다. 복조방식은 센서의 출력에 변조 주파수를 갖는 조화(harmonic)함수를 곱하고 이를 저역필터(lowpass filter)를 통과시켜 모드 형상을 얻는 방식으로 조화함수의 주파수 오차에 민감하며, 변조 주파수가 낮을 경우 필터링에 어려움이 있다. Fourier 변환방법은 모드를 다항식으로 근사화하고 각 항의 계수를 센서 출력의 스펙트럼(spectrum)으로부터 얻는 방법이며, 단 이 때 CSLDV의 스캐닝은 조화함수 형태로 해야되며 데이터의 길이는 데이터에 포함된 모든 주기함수의 주기의 정수배를 만족해야 된다. 이 조건을 주파수 적합조건(frequency matching condition)이라 하며, 만일 이 조건을 만족하지 못하면 스펙트럼에 누설(Leakage)이 발생하여 모드함수의 계수 추정에 이용되는 측파대(side-band)가 부정확하게 되어 정확한 모드를 얻기 어려우며, 누설이 큰 경우 적용할 수 없다. 또한 주파수 적합조건을 만족하기 위해서는 동일한 스캔선(scan line)의 중복 스캔이 필수적인 단점도 있다^[6,7]. 반면에 Hilbert 변환방법은 모드를 함수 형태가 아닌 모드형상 데이터 형태로 직접 구하므로 모드형상을 함수로 근사화 하는데서 기인하는 오차를 피할 수 있을 뿐 아니라 주파수 적합조건과 같은 극히 제한적인 조건 없이 모드형상을 구할 수 있어 매우 효율적인 방법이다^[6,7].

Hilbert 변환을 이용하여 모드형상을 구하는 방법은 지금까지 빔(Beam)과 같은 1차원적인 모드 해석에만 이용되었는데^[6,7], 본 논문에서는 이를 평판과 같은 일반적인 기계구조물의 2-차원 모드형상의 해석에 확대 적용하였다.

2. Hilbert 변환 방법을 이용한 2차원 모드해석

구조물에 특정한 주파수의 조화 가진력이 작용

하고 있을 때 구조물 표면에 수직인 방향의 정상 상태 진동속도는 다음 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$v((x, y), t) = \phi(x, y) \cos(\omega t + \alpha) \quad (1)$$

여기서 $v((x, y), t)$ 는 CSLDV의 스캔선을 따라 좌표점 (x, y) 에서 측정된 진동속도에 해당하며, $\phi(x, y)$ 는 좌표 (x, y) 에서의 진동형상이다. 만일 ω 가 구조물의 고유진동수와 일치할 경우 $\phi(x, y)$ 는 그 고유진동수에서의 모드형상에 해당된다. 위상 α 는 측정 시작 순간 진동의 위상을 나타낸다.

만일 CSLDV가 식 (1)과 같이 진동하는 구조물 표면을 다음과 같이 스캔한다면

$$x = g(t) \quad (2-1)$$

$$y = h(t) \quad (2-2)$$

CSLDV에서 측정되는 신호는

$$v(t) = \phi(g(t), h(t)) \cos(\omega t + \alpha) \quad (3)$$

이 된다. 식 (3)에서 $\phi(g(t), h(t))$ 의 스펙트럼 밴드(band)의 최고주파수가 가진주파수 ω 보다 작다면 $v(t)$ 의 Hilbert 변환 $\bar{v}(t)$ 는 다음 식으로 나타낼 수 있다^[8].

$$\bar{v}(t) = \phi(g(t), h(t)) \sin(\omega t + \alpha) \quad (4)$$

여기서 Hilbert 변환은 신호의 크기는 변화시키지 않고 위상만을 -90도 천이시키는 일종의 필터(filter)로 이해할 수 있다^[8,9].

일반적으로 모드형상은 완만하며, 스캐닝 속도 및 스캐닝 형태 역시 저주파 형태를 가지므로 $\phi(g(t), h(t))$ 의 스펙트럼 밴드가 가진주파수 ω 보다 작다는 가정은 그리 제한적인 조건은 아니다. 또한 스캐닝의 형상이나 속도는 측정자가 선택할 수 있기 때문에 이 가정은 충분히 만족시킬 수 있다.

Hilbert 변환을 이용하여 모드 형상을 얻기 위해 다음과 같은 복소함수를 정의하자.

$$z(t) = v(t) + j\bar{v}(t) \quad (5)$$

여기서 $j = \sqrt{-1}$ 이다.

함수 $z(t)$ 를 극좌표로 나타내면

$$z(t) = E(t) e^{-j\theta(t)} \quad (6)$$

가 되며, 이 식에서

$$E(t) = \sqrt{v^2(t) + \bar{v}^2(t)} = |\phi(g(t), h(t))| \quad (7-1)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1} \frac{\bar{v}(t)}{v(t)} = \alpha t + \alpha \quad (7-2)$$

이므로 식(7-1)과 (7-2)에서 $\phi(g(t), h(t))$ 를 구할 수 있다. 또한 식 (2)에서 시간에 따른 (x, y) 좌표를 알 수 있으므로 2차원 모드형상 $\phi(x, y)$ 를 얻게 된다.

신호의 Hilbert 변환은 다음과 같이 Fourier 변환과 역(Inverse) Fourier 변환을 이용하여 얻을 수 있다. 즉, 함수 $v(t)$ 의 Fourier 변환을 $V(\omega)$ 라 하면 식 (5)에 있는 $z(t)$ 의 Fourier 변환 $Z(\omega)$ 는 다음과 같다.

$$Z(\omega) = V(\omega) + j\bar{V}(\omega) \quad (8)$$

식 (8)에서 $\bar{V}(\omega)$ 는 $\bar{v}(t)$ 의 Fourier 변환이다. 또한 Hilbert 변환 함수의 Fourier 변환은 다음의 관계를 만족한다.

$$\bar{V}(\omega) = (-j \operatorname{sgn}[\omega]) V(\omega) \quad (9)$$

식 (9)에서 $\operatorname{sgn}[\omega]$ 은 ω 에 대한 부호함수로 다음과 같다.

$$\operatorname{sgn}[\omega] = \begin{cases} 1 & \text{for } \omega > 0 \\ 0 & \text{for } \omega = 0 \\ -1 & \text{for } \omega < 0 \end{cases} \quad (10)$$

식 (9)와 (10)을 식 (8)에 대입하면

$$Z(\omega) = B(\omega) V(\omega) \quad (11)$$

이 되며, 여기서 $B(\omega)$ 는 다음과 같다.

$$B(\omega) = 1 + \operatorname{sgn}[\omega] = \begin{cases} 2 & \text{for } \omega > 0 \\ 1 & \text{for } \omega = 0 \\ 0 & \text{for } \omega < 0 \end{cases} \quad (12)$$

식(11)의 $Z(\omega)$ 를 역 Fourier 변환하면

$$\mathcal{F}^{-1}[Z(\omega)] = z(t) + j\bar{z}(t) \quad (13)$$

이 되므로, 따라서 식 (13)으로부터 $z(t)$ 의 Hilbert 변환인 $\bar{z}(t)$ 를 구할 수 있다.

이상에서 $\bar{z}(t)$ 를 구하기 위해 Fourier 변환과 역 Fourier 변환을 이용하였지만 이 변환은 간편하게 $\bar{z}(t)$ 를 구하기 위해서 사용된 것으로 Fourier 변환을 이용한 모드해석 방법과는 다르

다. $\bar{z}(t)$ 가 구해지면 식 (7-1)과 (7-2)에 대입하여 시간 영역에서 모드형상 $\phi(x, y)$ 를 구할 수 있다.

3. 컴퓨터 시뮬레이션

이상에서 제시된 Hilbert 변환방법을 이용한 2차원 모드형상의 실험적 해석 방법의 타당성 검증을 위해 사각평판의 모드해석을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 수행하였다.

선정된 평판은 네 변이 모두 자유인 정사각형 평판으로 첫 번째 모드를 해석 대상으로 하였다. 즉 평판이 첫 번째 모드의 고유진동수로 가진 되고 있을 때 CSLDV를 이용하여 평판 표면을 스캐닝 하면서 진동속도 데이터를 획득하고 이 데이터를 Hilbert 변환방법으로 처리하여 평면의 모드형상을 추출한다. 평판의 포아송 비(Poisson's ratio)는 $\nu = 0.225$ 이며 $\omega_1 a^2 \sqrt{\rho/D} = 14.14$ 로 가정하였다. 여기서 ω_1 은 첫 번째 고유진동수, a 는 평판의 변 길이, ρ 는 평판의 비중, D 는 Flexural rigidity로 $D = EH^3/12(1-\nu^2)$ 이다. E 는 Young's modulus, h 는 평판의 두께이다. 이상의 평판의 특성에 기준하여 첫 번째 고유진동수는 20Hz로 가정하였다. 첫 번째 모드의 Nodal Line은 Fig. 1과 같이 사각형의 중심선에 있으며, 모드 형상은 다음 식으로 주어진다^[10,11].

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & A_{11}X_1Y_1 + A_{13}(X_1Y_3 + X_3Y_1) + A_{33}X_3Y_3 \\ & + A_{15}(X_1Y_5 + X_5Y_1) + A_{35}(X_3Y_5 + X_5Y_3) \\ & + A_{55}X_5Y_5 \end{aligned} \quad (14)$$

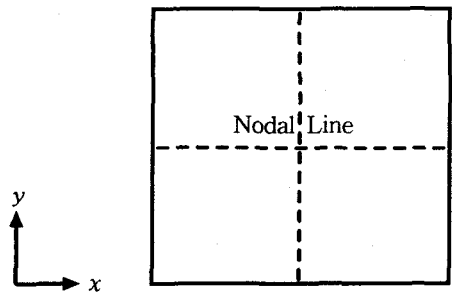


Fig. 1 Square Plate and its Nodal lines

식 (14)의 계수는 표 1과 같이 주어지며, X_i, Y_i 는 다음 식으로 주어진다.

$$X_m(\bar{x}) = \frac{\cosh k_m \cos k_m \bar{x} + \cos k_m \cosh k_m \bar{x}}{\sqrt{\cosh^2 k_m + \cos^2 k_m}}, \quad (m \text{ is even}) \quad (15-1)$$

$$X_m(\bar{x}) = \frac{\sinh k_m \sin k_m \bar{x} + \sin k_m \sinh k_m \bar{x}}{\sqrt{\sinh^2 k_m - \sin^2 k_m}}, \quad (m \text{ is odd}) \quad (15-2)$$

$Y_m(\bar{y})$ 는 식 (14)에서 \bar{x} 대신 \bar{y} 를 대입하여 얻는다. 여기서 \bar{x} 와 \bar{y} 는 표준화된 x, y 좌표로 식(16)과 같다.

$$-1 \leq \bar{x} = x/a \leq 1 \quad (16-1)$$

$$-1 \leq \bar{y} = y/a \leq 1 \quad (16-2)$$

식 (15)에서 특이값(eigen value) k_m 은 다음 식을 통해 구할 수 있으며, 다음 표 2와 같다.

$$\tan k_m + \tanh k_m = 0, \quad m \text{ is even} \quad (17-1)$$

$$\tan k_m - \tanh k_m = 0, \quad m \text{ is odd} \quad (17-2)$$

Table 1. Mode Shape Coefficients

Coefficients	value
A_{11}	1.0000
A_{13}	0.0378
A_{33}	-0.00541
A_{15}	-0.00265
A_{35}	0.00139
A_{55}	-0.000474

Table 1과 2에 주어진 계수와 식(15-2)로 주어진 함수를 식 (14)에 대입하여 구한 첫 번째 모드의 형상은 Fig. 2와 같다. Fig. 2에서 Fig. 1의 Nodal Line이 형성되어 있음을 확인할 수 있다.

평판의 스캐닝 패턴은 Fig. 3과 같이 평판의 좌측에서 출발하여 사선방향으로 스캐닝 하여 우측변에 도달 후 사선 방향으로 다시 좌측 변으로 가는 패턴의 연속으로 진행하였다. 스캐닝의 x -

축 방향 성분은 다음과 같이 Cosine 함수 형태를 취하였다.

$$x = g(t) = \cos \Omega t \quad (18)$$

여기서 스캔 속도 Ω 는 1 Hz로 하였다. Fig. 3에서와 같이 y -축 방향은 총 50개로 분할하였다.

Table 2. Eigen Values

m	k_m
0	0
1	0
2	2.36502
3	3.92660
4	5.49780
5	7.06858

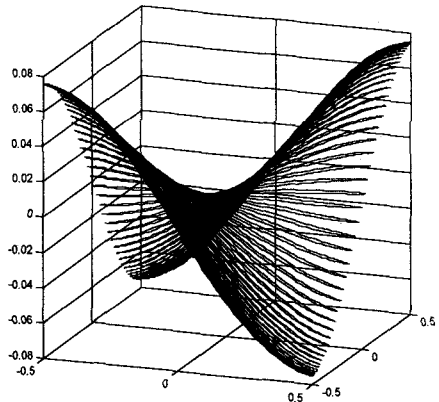


Fig. 2 First mode shape of the plate

Fig. 4는 평판을 첫 번째 고유진동수로 일정하게 가진하면서 Fig. 3과 같이 스캔하면서 측정된 평판 표면의 수직방향 진동속도의 일부분이다. 샘플링 속도(sampling rate)는 200Hz로 선정하였다. Fig. 4의 신호에서 평판이 첫 번째 고유진동수로 진동함을 확인할 수 있으며, 신호의 점근선(envelope)이 모드형상을 보여주고 있다. 시간 $t=0.25$ 초와 $t=0.75$ 초에서 노드선(nodal line)을 통과하고 있으며, 통과 순간 신호의 부호가

바뀌는 것을 확인 할 수 있다. 이 점에서 Hilbert 변환을 이용하여 모드형상을 구할 때 얻는 위상 α 가 180° 변화를 보이게 된다.

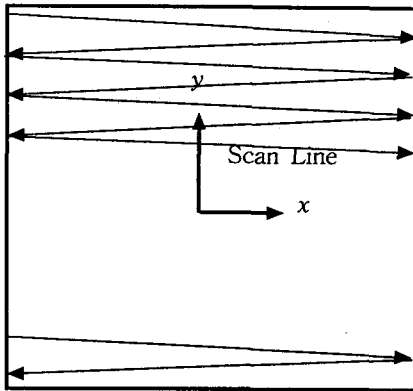


Fig. 3 Scanning pattern

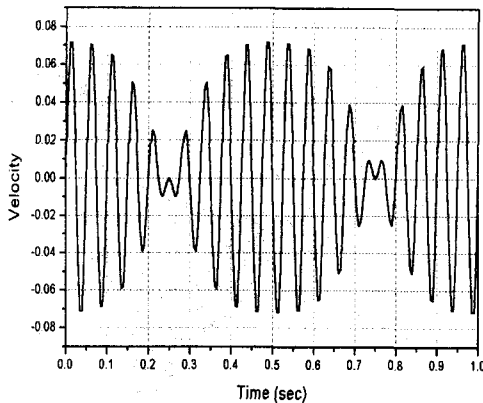


Fig. 4 Measured vibration velocity

스캔을 완료한 후 앞에서 제안한 Hilbert 변환 방법으로 모드형상 데이터를 구하였다. 이 때 데이터의 처리는 한꺼번에 전체 데이터를 처리하는 방법과 데이터를 임의의 구간으로 구분한 뒤 각각 구간에서의 모드형상을 구한 후 이들을 다시 조합하여 전체 모드형상을 구하는 방법이 있는데, 여기서는 전체 데이터를 한번에 처리하여 모드형상을 구하였다. 구한 모드형상은 Fig. 5와 같다.

Fig. 5에서 스캔이 시작되는 부분과 끝나는 부

분에서의 큰 오차가 존재하는데 이는 Hilbert 변환이 가지고 있는 Non-causal 필터특성에서 기인한다. Fig. 2의 실제 모드형상과 비교 양 끝 부분을 제외하고는 평판의 진동모드와 거의 일치하는 모드형상을 얻었다.

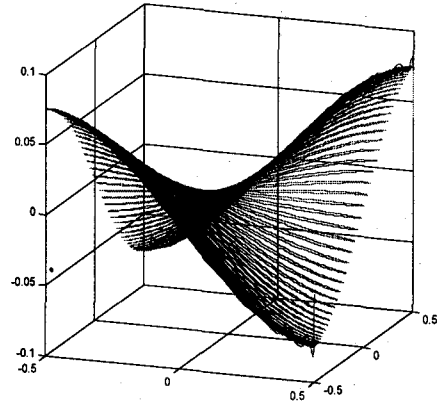


Fig. 4 Measured mode shape of the plate

4. 결론

CSLDV를 이용하여 실험적 모드형상을 얻는 방법 중 Hilbert 변환 방법은 Fourier 변환방법에 비해 Fourier 변환 방법이 갖고있는 근사화에 의한 오차, 주파수 적합조건 만족성 등의 문제를 해결 할 수 있는 방법으로 알려져 있다. 본 연구에서는 Hilbert 변환방법을 이용한 1차원 모드해석 방법을 확장하여 2차원 평면 모드형상을 추출하는데 확장 적용하였다. 2차원 평면의 모드형상 추출에서도 Hilbert 변환은 정밀하고 간편하게 적용될 수 있음을 확인하였다. 단 모드 해석에 이용되는 데이터의 시작 부분과 끝 부분에서 발생하는 Hilbert 변환방법의 오차는 Hilbert 변환이 갖는 고유의 오차이나 이를 줄일 수 있는 방법의 모색이 필요하다.

후 기

본 연구는 1999년도 한국과학재단의 특정기초 연구(1999-2-302-015-3)에 의하여 수행되었습니다. 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Sriram, P., 1992, "Mode Shape Measurement Using a Scanning Laser Doppler Vibrometer," *The International J. of Analytical and Experimental Modal Analysis*, Vol. 7, No. 3, pp. 169~178.
- (2) Stanbridge, A. B. and Ewins, D. J., 1999, "Modal Testing Using a Scanning Laser Doppler Vibrometer," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 13, No. 2, pp. 255~270.
- (3) Stanbridge, A. B., Martarelli, M., and Ewins, D. J., 1999, "Measuring Area Mode Shapes with a Scanning Laser Doppler Vibrometer," *Proc. of IMAC XVII*, pp. 980~984.
- (4) Stanbridge, A. B., and Ewins, D. J., 1996, "Measurement of Translational and Angular Vibration Using a Scanning Laser Doppler Vibrometer," *Shock and Vibration*, Vol. 3, No. 2, pp. 141~152.
- (5) Stanbridge, A. B., Martarelli, M., and Ewins, D. J., 1999, "The Scanning Laser Doppler Vibrometer Applied to Impact Modal Testing," *Proc. of IMAC XVII*, pp. 986~991.
- (6) 강민식, 2000, "스캐닝 도플러 진동계를 이용한 모드해석," 대한기계학회 논문집 A, 제24권, 제10호, pp. 2560~2567.
- (7) Kang, M. S., Chang, T. G., and Kim, H. S., 2000, "Measuring Mode Shape with a Scanning Laser Doppler Vibrometer-Hilbert Transform Approach," *Mechanical Systems and Signal Processing*, Submitted.
- (8) Bendat, J. S. and Piersol, A. G., 1986, *Random Data Analysis and Measurement Procedures, Second Edition*, John Wiley & Sons.
- (9) Feldman, M., 1997, "Non-linear Free Vibration Identification via the Hilbert Transform," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 208, No. 3, pp. 475~489.
- (10) Meirovitch, L., 1971, *Analytical Methods in Vibrations*, Macmillan.
- (11) Leissa, A. W., 1970, *Vibration of Plates*, NASA SP-160, N70-18461.