

수정된 속도변환기법과 독립좌표를 사용한 효율적인 다물체 동역학 알고리즘

강신길* • 윤용산**

An Efficient Multibody Dynamic Algorithm Using Independent Coordinates Set and Modified Velocity Transformation Method

Sheen-Gil Kang*, Yong-San Yoon**

Key Words : Multibody(다물체), Dynamics(동역학), Velocity Transformation Method(속도 변환 방법), Coordinate Partitioning Method(좌표 분리 방법), Independent Coordinates Set(독립 좌표), Body Grouping(물체 그룹화)

Abstract

Many literatures, so far, have concentrated on approaches employing dependent coordinates set resulting in computational burden of constraint forces, which is needless in many cases. Some researchers developed methods to remove or calculate it efficiently. But systematic generation of the motion equation using independent coordinates set by Kane's equation is possible for any closed loop system.. Independent velocity transformation method builds the smallest size of motion equation, but needs practically more complicated code implementation. In this study, dependent velocity matrix is systematically transformed into independent one using dependent-independent transformation matrix of each body group, and then motion equation free of constraint force is constructed. This method is compared with the other approach by counting the number of multiplications for car model with 15 d.o.f..

1. 서 론

다물체 시스템의 해석은 최근 가상환경의 시각적 요소 편집, 만화 영화 또는 게임의 제작 등 과거 어느 때보다도 그 수요가 많아졌다. 이 분야의 특징은 인간을 중간에 두는 시스템(Man in the Loop System)이라는 점이다. 인간이 해석 결과를 실시간으로 피드백 받아 일련의 작업을 진행해야 하기 때문에 해석 시간은 무엇보다도 중요한 요소가 된다.

시스템을 유일하게 기술하기 위해서 좌표가 필요하다. ADAMS 나 DADS 와 같은 상용코드에서는 일반성을 위해 절대 좌표(Absolute Coordinates Set)를 사용한다. 반면 최근에는 실시간 해석을 위해 상대 좌표(Relative Coordinates Set)를 사용하고 있

다. 절대 좌표를 사용하면 조인트마다 좌표들간의 제한 조건이 생겨 방정식이 비대해지는 중대한 결점이 있지만 위상해석(Topology analysis)이 자동으로 해결되어 상용화 하기에 더 적합하다. 이에 반해 상대 좌표는 나무 구조형 개방 시스템인 경우 제한 조건이 자동으로 해결되지만 수동이건 자동이건 위상해석을 꼭 필요로 한다. 1990 년대 이전에는 주로 개방형 구조에 대한 연구가 활발히 이루어졌고 그 이후에는 폐쇄형 구조에 대한 연구가 활발히 진행되었다^(1,2,3).

상대 좌표를 사용하더라도 폐쇄형 고리(Closed Loop)가 존재한다면 제한 조건은 여전히 남게 된다. 이를 해석하기 위해 조인트 절단법, 물체 절단법이 소개 되어 있으나 실시간이라는 관점에서는 조인트 절단법이 관례이다.

과거 연구들에서는 폐쇄형 시스템의 해석을 위해 종속 좌표(Dependent Coordinates Set)를 도입하여 절단으로 인해 생기는 구속력을 운동 방정식에

* KAIST 기계공학과

** 정회원, KAIST 기계공학과

포함되도록 구성한 후 나중에 이를 제거하는 방법을 취하고 있다. 하지만 Kane의 방정식을 이용하면 절단에 의한 구속력이 제거된 운동방정식을 바로 구성할 수 있다. 손으로 계산할 때는 흔히 독립좌표만을 사용하여 편하고 이해하기 쉽지만 이를 실제로 코드로 구현하기는 복잡할 수 있다. KECSKEMÉTHY⁽³⁾는 폐쇄형 시스템에 대하여 독립좌표를 사용하여 해석적인 해를 얻음으로써 수치적인 결과와 비교하였다. 그러나 기존 연구에서는 종속 속도 변환 행렬과 독립 속도 변환 행렬을 사용한 방법에 대하여 구체적으로 성능을 비교한 사례가 없다. 따라서 본 연구에서는 독립 속도 변환 행렬을 이용하여 운동방정식을 구성할 때 얻어지는 장점에 대해 자세히 다루어 보고자 한다.

2 장에서는 속도 변환 방법을 이용하여 운동학 분석이 이루어지는 과정을 설명하였고, 3 장에서는 동역학 해석에 대하여 다루었다. 이 장에서는 물체 그룹을 정의하여 종속 속도 변환 행렬을 독립 속도 변환 행렬로 변환하고 이로부터 최소의 크기를 갖는 운동 방정식을 구성할 수 있는 체계적인 절차에 대하여 알아본다. 4 장에서는 두 방법에 대하여 연산량을 비교하여 해석 속도를 비교해보았다.

2. 운동학(Kinematics)

2.1 나무 구조(Tree Structure)

모든 다물체 시스템은 조인트를 절단함으로써 항상 개방된 나무 구조 형태로 변환된다. 나무 구조를 구성하는 각각의 물체에 순차적으로 번호가 부여되고 상위 물체(Upper Body, Outboard Body) 아래에 하위 물체(Lower Body, Outboard Body)가 연결되었음을 나타내는 연결 배열(Connection Array)이 다음과 같이 정의된다.

$$\Gamma(j) = i \quad (1)$$

물체 j 아래에 물체 i가 연결되었음을 나타낸다. 만약 i가 0인 경우는 그라운드(Ground)를 의미한다.

각각의 물체에 대하여 식 (1)을 반복적으로 사용하여 하위 물체가 0이 될 때까지 개수를 세면 높이 배열(Height Array)이 구성된다.

$$H(j) = n \quad (2)$$

물체 j에는 그라운드까지 n개의 물체가 매달려 있음을 나타낸다. 이 배열은 그 값에 따라 오름차순으로 정렬하면 높이 순 배열(Height-Ordered Array)이 구성된다.

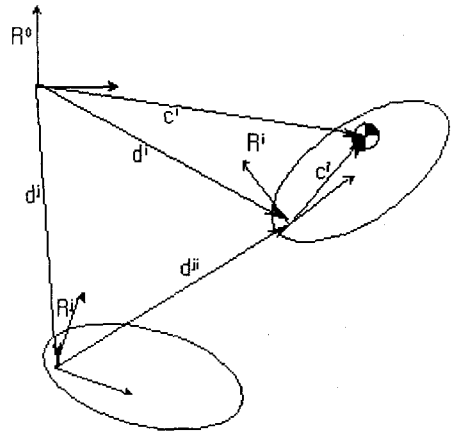


Fig. 1 Transformation between adjacent frames

$$\Pi(j) = k \quad (3)$$

물체 k는 j 번째로 낮은 높이를 갖고 있음을 나타낸다

인접한 물체로부터 반복적인 계산(Recursive Calculation)이 필요한 경우 높이 순 배열을 이용하여 순차적 또는 역순으로 이용할 수 있다.

2.2 위치, 속도, 가속도

Fig. 1은 상위 물체 i와 인접한 하위 물체 j의 좌표 변환 관계를 나타낸 것이다. 관성 좌표계, R^0 에 대한 물체 i의 회전 변환 행렬과 원점 벡터는 인접한 하위 물체의 회전 변환 행렬과 i, j간의 상대 회전 변환 행렬을 사용하여 식(4)과 같이 표현된다.

$$R^i = R^j R^{ji}(q^{ji}) \quad (4)$$

편의상 조인트 원점과 물체의 원점을 동일하게 잡을 때 물체 i의 원점 위치는 식 (5)와 같이 표현된다.

$$d^{ji} = d^j - d^i = R^j(d^{ji}) \quad (5)$$

물체 i의 각속도와 원점의 속도는 식 (6)와 같이 표현된다.

$$\omega^{ji} = \omega^i - \omega^j = W^{ji} \dot{q} \quad (6)$$

$$v_o^{ji} = v_o^i - v_o^j = U^{ji} \dot{q} + \omega^j \times d^{ji}$$

여기서

$$aX \equiv \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W^{ji} = R^j(W^{ji}) \quad (7)$$

$$U^{ji} = R^j(U^{ji})$$

식(4)-(7)에서 위 첨자 '는 하위 물체 j에서 기

술된 값을 의미하며 조인트 좌표와 조인트의 초기 상태를 통해서 직접 구할 수 있다.

식 (4)~(7)을 반복적으로(Recursively) 적용함으로써 위치 및 속도를 구할 수 있으며 식 (8), 식 (9)과 같이 보다 짧게 나타낼 수 있다.

$$\omega^i = W^i \dot{q} \quad (8)$$

$$v_o^i = V_o^i \dot{q}$$

여기서

$$W^i = W^j + W^i \quad (9)$$

$$V_o^i = V_o^j + U^j - d^j \times W^j$$

물체 i 의 각속도와 원점의 가속도는 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\alpha^i = W^i \ddot{q} + \gamma_o^i \quad (10)$$

$$\alpha_o^i = V_o^i \ddot{q} + \gamma_o^i$$

여기서 γ 는 속도, 각속도에 의존하는 가속도, 각가속도를 나타내며 식 (11)에 의해 반복적으로 계산된다.

$$\gamma_o^i = \gamma_o^j + R^j (\dot{W}^j)^T \dot{q} + \omega^j \times \omega^j \quad (11)$$

$$\gamma_o^i = \gamma_o^j + \omega^j \times [\omega^j \times d^j + 2U^j \dot{q}] + \gamma_o^j \times d^j$$

질량 중심 또는 물체 i 위의 특정 점 p 의 위치, 속도, 가속도는 식(12)~(16)와 같이 구한다.

$$s^i = R^i (s^i)^y \quad (12)$$

$$p^i = d^i + s^i$$

$$v^i = V^i \dot{q} \quad (13)$$

$$a^i = V^i \ddot{q} + \gamma_o^i \quad (14)$$

여기서

$$V^i = V_o^i - s^i \times W^i \quad (15)$$

$$\gamma_o^i = \gamma_o^j + \omega^i \times \omega^i \times s^i + \gamma_o^j \times s^i \quad (16)$$

Table 1 은 본 절의 식들을 구현할 때 필요한 실제 곱셈량을 정리한 것이다. Np 는 위치 계산이 필요한 점 개수이다. 구형 조인트에 해당하는 제한 조건은 각각 2 개 점을 포함한다. 위첨자 -는 그라운드를 물체로 간주하는지 안 하는지에 따라 계산과정에서 빠질 수도 있고 고려될 수도 있다는 의미로 사용하였다. Nb^- 는 최 하위 물체의 개수를 제외한 나머지 물체들의 개수를 Np^- 는 그라운드에 속한 점의 개수를 제외한 나머지 점의 수, n^- 는 최하위 물체들의 조인트 좌표 수를 뺀 나머지 좌표 수를 각각 의미한다. NLQ 와 NRQ 는 각각 하위 좌표 수와 그 중 회전 좌표 수를 의미한다

3. 동역학(Dynamics)

3.1 운동 방정식

Table 1. No. of multiplication in each kinematic step

Process	No. of multiplication*
R	$27Nb^-$
d, c, p	$9(Nb^- + Nb + Np^-)$
ω, v	$3n + 6Nb^-$
W, U	$9n^-$
V	$6[\sum_{k=1}^{Nb} (NRQ)_k^c + \sum_{k=1}^{Np} (NRQ)_k^p]$
γ_o, γ_d	$3NRQ + 15NRB^-$
γ_v, γ_p	$+12Nb^- + 18(Nb + Np)$
I	$45Nb$

n : No. of total coordinates

Nb : No. of bodies

Np : No. of constrained points

NRQ : No. of total rotational coordinates

NRQ_k : No. of lower rotational coordinates

*: No. of multiplication to calculate ' expression in Eq. (4)~ Eq. (7) is excluded

-Indicates no. of corresponding base body

Kane 의 방법에 의하면 운동 방정식은 다음과 같이 일반화 관성력과 일반화 외력의 형태로 구성된다⁽⁵⁾.

$$F + F^* = 0 \quad (17)$$

여기서 일반화 관성력은

$$F = -\sum_{k=1}^{Nb} (m^k V^{kT} V^k + W^{kT} I^k W^k) \ddot{q} \quad (18)$$

일반화 힘은

$$F^* = Q - \sum_{k=1}^{Nb} m^k V^{kT} \gamma_o^k - \sum_{k=1}^{Nb} W^{kT} [I^k \gamma_o^k + \omega^k \times I^k \omega^k] \quad (19)$$

여기서 Q 는 중력 및 스프링, 시스템에 가해지는 외부 힘과 토크에 대한 일반화된 힘이다. 속도 의존 가속도 항은 식 (19)에 포함시켰다.

Table 2 는 식 (17), 식 (18), 식(19)을 이용하여 운동방정식을 구성할 때 필요로 하는 곱셈량을 정리한 것이다.

Table 2. No. of multiplication to construct system eq.

Process	No. of multiplication
M	$\sum_{i=1}^{Nb} [3NLQ_i + 3(NLQ_i + 1)NLQ_i / 2 + 9NRQ_i + 3(NRQ_i + 1)NRQ_i / 2]$
f	$\sum_{i=1}^{Nb} [27 + 3(NLQ_i + NRQ_i)]$

NLQ_i : No. of lower coordinates of body i

NRQ_i : No. of lower rotational coordinates of body i

3.2 제한 조건

한편 시스템에는 페루프 또는 시간에 따라 기술되는 운동과 같은 구속조건이 존재할 수 있다. 구속조건은 홀로노믹(Holonomic) 시스템인 경우 다음과 같이 대수적으로(Algebraically) 표현된다.

$$\Phi(q, t) = 0 \quad (20)$$

식 (20)을 시간 미분하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Phi_q \dot{q} = b_c \quad (21)$$

여기서

$$b_c = -\dot{\Phi}_t$$

한번 더 미분하면 다음 식을 얻는다.

$$\Phi_q \ddot{q} = g_c \quad (22)$$

여기서

$$g_c = -(\ddot{\Phi}_q \dot{q} + \ddot{\Phi}_t)$$

식 (17)-(19)는 n 개의 좌표가 서로 독립인 경우 성립한다. 식 (20)과 같이 m 개의 제한 조건이 주어질 때 오직 n-m 개 성분만이 독립이므로 식 (17)을 변형하거나 또는 식 (18), 식 (19)를 변형해야 한다.

첫번째 방법은 미지 라그랑지 승수(Undetermined Lagrangian Multiplier)를 도입하여 식 (17)을 다음과 같은 형태로 수정하여 사용한다.[11]

$$F + F^* + F^c = 0 \quad (23)$$

여기서

$$F^c = \Phi_q^T \lambda$$

이 방법은 식 (17)과 식 (20)에 의해 총 m+n 개의 미분 대수 방정식을 이룬다. 지금까지 많은 문헌에서 이 방법을 사용하였으며 해결 방법은 m+n 개의 연립방정식을 직접 푸는 기존 라그랑지 승수법(Conventional Lagrangian Multiplier Method), m 개의 라그랑지 승수를 먼저 구한 후 n 개의 연립방정식으로부터 \dot{q} 을 구하는 축소된 라그랑지 승수법(Reduced Lagrangian Multiplier Method) 또는 의사역행렬법(Pseudo Inverse Method), n 개의 운동방정식을 투영시켜 n-m 개의 식으로 변환시키고 제한 조건식과 함께 푸는 다양한 직교 행렬법(Orthogonal Matrix Method), n-m 개의 독립된 좌표만으로 축소된 질량 행렬과 힘벡터를 구한 후 \dot{q} 를 구하는 다양한 독립 좌표법으로 분류된다.

한편 식 (17)대신 식 (18), 식 (19)을 수정하여 독립좌표만으로 식(17)을 구성하는 방법이 있다. Wang⁽⁶⁾은 이 방법에 대하여 "독립좌표만으로 표현하는 것이 항상 실제적이거나 편리하지만은 않고 라그랑지 승수를 구하지 않는 것이 오히려 단점이 될 수도 있다"고 하였다. 그러나 절단법에 의해 생기는 라그랑지 승수는 다른 조인트에서의 반력과 동등한 상황으로 파악하는 것이 타당하며 체계적 절차에 따라 독립좌표만으로 구성이 가능하다

는 점을 고려한다면 자세히 다루어 볼 필요가 있다. 다음 절에서 독립좌표로 일반화 질량 행렬과 일반화 힘을 구하는 체계적인 방법과 그 유용성에 대하여 전개해 나갈 것이다. 대표적으로 기존 라그랑지 승수법과의 계산량을 비교하기로 한다.

3.3 물체의 그룹화

제한 조건은 크게 두 가지가 있다. 물체간의 상대 운동을 구속하는 것과 좌표가 시간상으로 기술되는 것을 말한다. 전자에 대해서는 제한 조건 하나가 모든 물체를 모두 구속하는 것이 아니라 어느 부분만을 구속하는 경우가 많다. 절대 좌표를 사용할 때 두 물체만이 제한 조건에 나타나는 특징을 살려 연구한 사례가 있다[6]. 독립좌표만을 사용하여 폐쇄형 시스템을 모델링할 때 엄청난 계산상의 이득을 볼 수 있게 한다. 본 장에서는 제한 조건식에 따라 물체들을 그룹화하고 이를 이용하여 독립좌표만의 운동 방정식을 구성하는 방법에 대하여 알아보고자 한다.

Fig. 2 는 차체, 조향 및 현가 장치를 포함하는 16 자유도의 차량 모델이다. 전륜 쪽 현가 장치는 McPerson 형태이며 후륜 쪽은 5 점 시스템에 기초한다. 원문⁽⁷⁾에서는 조향 메커니즘이 포함되어 있으나 여기서는 조향 메커니즘을 구성하는 3 개의 물체를 제거하여 총 22 개의 물체로 구성하였으며 8 개의 구형 조인트에 해당하는 제한조건이 부여되어 총 39 개 좌표, 24 제한 조건식을 갖는다. 원안에 물체의 번호를 나타내었고 네모 안에는 구속 조인트의 번호를 나타내었다. 구형 조인트가 어떤 조인트보다도 절단하기에 이상적이므로 구형조인트를 절단 위치로 선정하였다.

나무 구조를 사용한 물체들의 연결 관계는 Fig. 3 에 나타내었다. 실선은 인접한 물체를 나타내며 점선은 나무 구조를 사용하기 위하여 인위적으로 잘라낸 제한 조건에 해당한다.

Fig. 4 는 제한 조건과 물체들의 상관 관계에 따라 물체를 그룹화하는 과정을 나타낸 것이다. 세로에는 제한 조건의 번호가 가로에는 물체의 번호가 표시되어 있다. 상대좌표를 사용할 때는 절대 좌표만큼 성긴 정도(Sparsity)가 심하지는 않지만 다음과 같은 특징이 있다. 두 가지(Branch)가 페루프를 구성할 때 각각의 가지에 속하는 모든 물체들 중 공통 하위 물체 이하는 제한 조건에서 제외되며 결국 루프 안에 존재하는 물체들로만 나타난다. 두 가지에서의 운동학적인 성질은 하위 물체에서부터 거슬러 올라가 구해야 하기 때문에 서로 상쇄되어 나타나는 현상이다. Fig. 4 에서도 모든 제한 조건의 공통 하위 물체인 차체는 어떠한 제한 조건에도 포함되어 있지 않다. 우선 이러한 물체들을 가려 내어 각각 독립적인 그룹으로 분류하는 단계가 필요하다. 그 다음 단계는 나머지 물체들을 Fig. 4 (b)에서와 같이 독립적인 두개

의 그룹으로 나누는 작업을 수행한다. 이 작업은 2 개의 그룹으로 가능한 모든 가지 수에 대해 성공할 때 까지 순차적으로 수행해 나감으로써 가능하다. 만약 현재 그룹 안에 N_b 개의 물체가 있다면 $2^{N_b-1} - 1$ 번의 시행 회수가 가능하다. 만약 성공했다면 나누어진 두개의 그룹 각각에 대하여 서브루틴 재귀호출(Recursive Subroutine Call)을 사용하여 재호출함으로써 다시 분해과정으로 들어간다. 이 과정을 모두 거치면 가장 작은 단위의 제한 조건과 물체들로 이루어진 그룹이 결정된다. 만약 2 개의 그룹으로 더 이상 분리가 안 되는 경우 다시 가능한 모든 방법에 대하여 물체를 제외시켜 가면서 두 개의 그룹으로 나누기를 시도한다. 현재 그룹을 구성하는 물체 수가 N_b 일 때 $2^{N_b} - 2$ 가지수가 존재한다. 그룹은 양의 자유도를 가져야 하므로 물체를 제외했을 때도 그 그룹의 좌표 수가 제한 조건의 조건식 수보다 큰 경우에 대해서만 수행하면 된다 만약 이 과정이 성공하면 빼낸 물체들은 모아서 단계 1 에서의 독립 그룹처럼 독립적인 그룹으로 구성한다. Fig. 3 (b)에서 물체 10 번은 제한 조건 1,2,3,4 번에 공통으로 속해 있는 10 번 물체를 빼버림으로써 물체 2,3,4,11 이 제한 조건 1 과 2 와 함께 하나의 그룹을 이루고 물체 6,7,8,12 가 제한 조건 3 과 4 와 함께 다른 그룹을 이루게 된다. Fig. 4 (c)는 이 과정을 모두 거치고 난 후, 10 개의 그룹으로 나누어진 최종 결과를 보여 준다. Fig. 5 는 최종적으로 물체들을 그룹화하여 나무구조를 다시 생성한 것이다. 제한 조건이 내포되는 물체 그룹에서는 사용된 좌표 수에서 독립적인 제한 조건식 수를 뺀 만큼의 독립좌표를 갖게 되며 제한 조건이 없는 그룹에서는 좌표 수 그대로 독립좌표를 사용하게 된다. 각각의 그룹은 다음 장에서 설명될 의존좌표 독립좌표 변환 행렬 B_{di} 를 갖게 된다. 이 행렬은 그룹 안에서 독립인 제한 조건 수만큼 행의 크기를 독립좌표의 수만큼 열의 크기로 하는 행렬이다. 그림에서는 독립인 제한 조건들이 들어 있음을 나타내기 위해 회색으로 표시하였다.

물체를 그룹화하는 절차를 요약하면 다음과 같다.

Step 1. 제한 조건과 관련이 없는 물체들을 각각 그룹화 한다.

Step 2. 가능한 모든 경우에 대하여 두개의 그룹으로 나누는 작업을 수행하면서 성공하면 Step 4 로 간다.

Step 3. 가능한 모든 경우에 대하여 물체를 빼면서 Step 2 를 수행한다.

Step 4. 두 개의 그룹에 대하여 재귀호출을 수행한다.

위 과정이 끝나면 각각의 물체들은 독립적이거나 아니면 제한 조건들을 내부에 포함하는 그룹을

구성한다. 해당 그룹에 속한 물체의 운동은 해당 구속 조건들만을 만족하면 모두 가능하다. 이 사실을 이용하면 독립좌표를 이용하여 운동을 해석할 때 계산량을 크게 줄일 수 있다는 것이 다음 장에서 설명된다

3.4 종속-독립 변환 행렬

제한 조건식을 포함하는 물체 그룹에 대하여 식 (21), 식 (22)를 다음과 같이 종속좌표와 독립좌표 두 부분으로 나눌 수 있다.

$$\Phi_d \dot{q}_d + \Phi_i \dot{q}_i = b_c \quad (24)$$

$$\Phi_d \ddot{q}_d + \Phi_i \ddot{q}_i = g_c \quad (25)$$

m 개의 Φ 가 서로 독립이면 Φ_d^{-1} 는 항상 존재하고 따라서 다음과 같이 의존 좌표에 대한 성분을 항상 독립좌표로 나타낼 수 있다.

$$\dot{q}_d = B_{di} \dot{q}_i + b_{di} \quad (26)$$

$$\ddot{q}_d = B_{di} \ddot{q}_i + g_{di} \quad (27)$$

여기서

$$B_{di} = -\Phi_d^{-1} \Phi_i \quad (28)$$

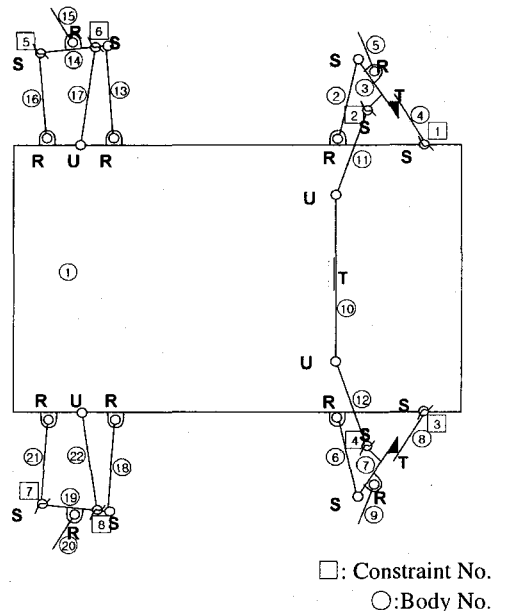


Fig. 2 Full car model of 22 body, 15 d.o.f

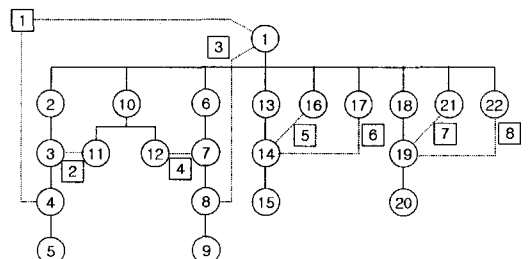


Fig. 3 Tree structure of bodies for full car model

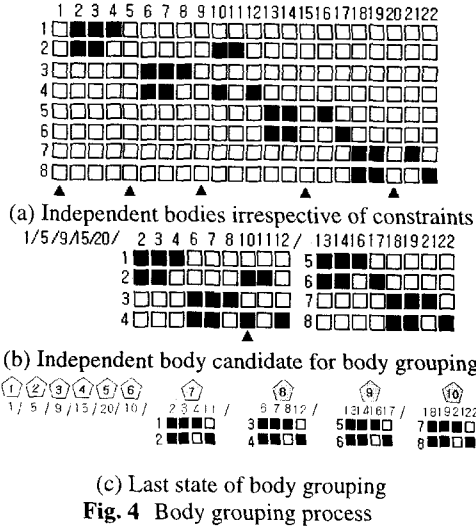


Fig. 4 Body grouping process

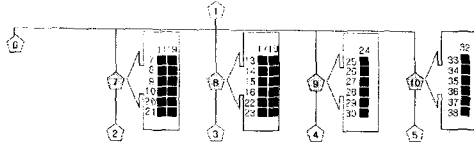


Fig. 5 Tree structure of body groups for full car model

$$b_{di} = \Phi_d^{-1} b_c \quad (29)$$

$$g_{di} = \Phi_d^{-1} g_c \quad (30)$$

식 (20)과 같이 위치 수준에서는 비선형 관계인 반면 식 (24)과 식 (25)과 같이 속도 와 가속도 수준에서는 선형 관계이므로 조건식이 독립이라면 식 (24), 식 (25)은 항상 가능하다.

3.5 독립 속도 변환 행렬

식 (26)를 식 (13)에 대입해 물체 k 의 속도를 독립좌표만으로 표현하면

$$v^k = (V_i^k + V_d^k B_{di}) \dot{q}_i + V_d^k b_{di} \quad (31)$$

$$\omega^k = (W_i^k + W_d^k B_{di}) \dot{q}_i + W_d^k b_{di} \quad (32)$$

식 (31), 식(32)과 Kane 의 방정식을 이용하면 식 (17)과 똑 같은 식이 유도된다. 대신 속도 변환 행렬과 속도 의존 항은 식 (33)~(36)과 같이 독립 속도 변환 행렬로 대체되어야 한다.

$$V_{di}^k = V_i^k + V_d^k B_{di} \quad (33)$$

$$W_{di}^k = W_i^k + W_d^k B_{di} \quad (34)$$

$$\gamma_{v,di}^k = \gamma_v^k + V_d^k g_{di} \quad (35)$$

$$\gamma_{\omega,di}^k = \gamma_{\omega}^k + W_d^k g_{di} \quad (36)$$

식 (33)~식 (36)은 기존 속도 변환 방법을 사용하여 종속 속도 변환 행렬을 구성한 후 식 (28)에 정의된 종속-독립 변환 행렬을 이용하여 독립 속도 변환 행렬로 변환할 수 있게 한다. 따라서 운동 방정식은 처음부터 가장 작은 규모로 구성되어

제한 조건에 따른 구속력을 처리할 필요가 없다.

운동 방정식을 구성하기 위해서는 물체 k 가 속한 물체 그룹을 찾고 그 그룹에 포함되어 있는 종속-독립 변환 행렬을 이용하여 약간의 추가 연산만으로 독립 속도 변환 행렬로 바꿀 수 있다. Table 3 은 독립 속도 변환 방법을 사용할 때 부가적으로 계산해야 하는 연산량을 정리한 것이다.

Fig. 6 은 독립 속도 변환 방법과 최종 운동 방정식의 형태가 똑같은 좌표 분할 방법(Coordinate Partitioning Method)을 사용하여 해석하는 절차를 비교 설명한 것이다.

Choi⁽⁸⁾는 현가 복합 조인트(Suspension Composite Joint)를 사용하는 차량 해석에 대하여 언급하였다. 독립 속도 변환 방법으로 운동 방정식을 유도할 때 특정 물체의 질량과 질량 관성모멘트를 무시한다면 해석적인지 수치적인지의 차이를 제외하고는 복합 조인트를 사용한 Choi 의 결과와 같은 효과가 예상된다.

Table 3. No. of multiplication in the fully independent coordinate Method

Process	Multiplication
V_{di}, W_{di}	$3 \sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{NG_i} (NDLQ_j^i + NDRQ_j^i) f_j$
$\gamma_{v,di}, \gamma_{\omega,di}$	$3 \sum_{i=1}^{N_b} (NDLQ_j^i + NDRQ_j^i)$

$NDLQ_j^i (NDRQ_j^i)$: No. of lower coordinates which belongs to (j)th group and related with (angular) velocity of (i)th body.

NG_i : No. of lower groups of (i)th body, that is, the column size of B_{di}^j

f_j : No. of independent coordinates of group j

4. 결과

기존 라그랑지 승수법과 독립 속도 변환 행렬을 사용한 방법을 서로 비교해 보았다. 기존 라그랑지 승수법은 제한 조건을 동시에 풀어야 하므로 LU 분해법을 사용하였으며 독립 속도 변환 방법에서는 DBBDM(Doubly Bordered Block Diagonal Matrix)에 대한 Cholesky 분해를 사용하였다.

Fig. 7 은 완전한 차량 모델에 대하여 두 가지 방법에 따른 총 곱셈량을 단계별로 비교한 것이다. 독립 속도 변환 방법은 속도 변환 행렬을 구하는 과정이 좀 길어졌으나 질량 행렬 구성이 빨라지고 축약과정이 없어져 결과적으로는 우수한 결과를 보이고 있다.

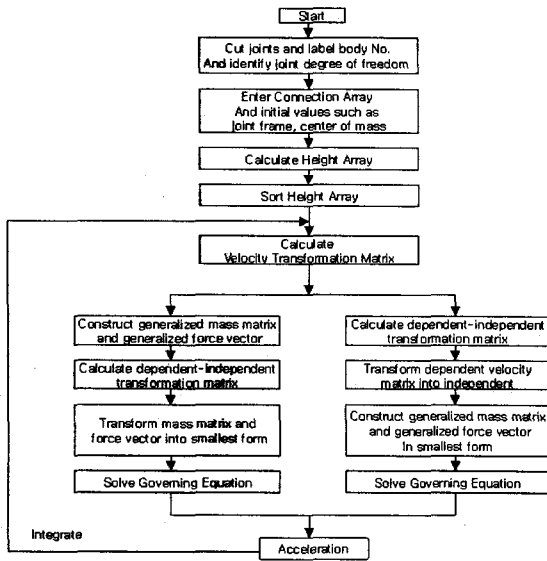


Fig. 6 Flowchart for dependent and independent velocity transformation method

차량 모델처럼 충분히 그룹화할 수 있는 경우 독립 속도 변환 방법은 선형 방정식을 푸는 과정이 오히려 질량 행렬을 구성하는 과정보다 더 짧게 나타났다. 독립 속도 변환 방법은 기존 라그랑지 승수법에 비하여 약 12.0%의 계산량을 필요로 하였다. 본 연구에서는 기존 라그랑지 승수법과의 비교만을 자세히 다루었으나 DBBDM 성질을 이용할 수 있도록 좌표 분할 방법(Coordinate Partitioning Method, Embedding Method)과 축소 라그랑지 승수법과의 비교도 별도로 수행해보았다. 기존 라그랑지 승수법에 비해 각각 62.3%, 80.6%의 결과를 얻었다.

5. 결론

본 연구에서는 기존 라그랑지 승수법과 독립 속도 변환 방법에 대하여 22 물체 16 자유도 차량 모델을 사용하여 계산량을 비교해 보았으며 총 연산량을 비교한 결과 약 12%의 계산량을 필요로 하였다.

독립 속도 변환 방법은 기존 속도 변환 방법에 기초하여 유도되며 운동 방정식을 구성하기 전에 미리 독립 속도 변환 행렬로 변환한다. 개방형 시스템에 대해서는 기존 방법과 완전히 동일하며 폐쇄형 시스템에 대해서는 추가된 전처리 연산에 비하여 미리 최소의 크기를 갖는 운동 방정식을 구성하는 데서 크게 연산량이 줄어들었다.

차량 모델과 같이 물체 그룹화가 충분히 이루어지고 페루프가 많은 시스템에 대하여 독립 속도 변환 방법은 계산량을 크게 줄여주고 있다.

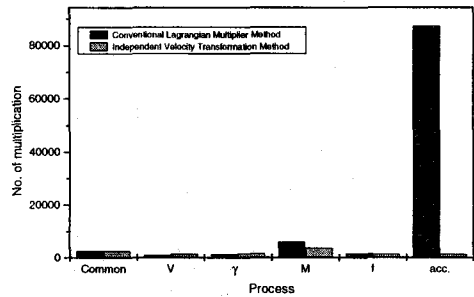


Fig. 7 No. of multiplication in each method for full car model

참고문헌

- (1) Ronald L. Huston, Methods of Analysis of Constrained Multibody Systems, Mechanics of Structure and Machine, vol. 17, No. 2, p. 135-143, 1989
- (2) W. Blajer, D. Bestle, W. Schiehlen, An Orthogonal Complement Matrix Formulation for Constrained Multibody Systems, Journal of Mechanical Design, Vol. 116, 1994
- (3) A. KECSKEMÉTHY, T. KRUPP and M. HILLER, Symbolic Processing of Multiloop Mechanism Dynamics Using Closed-Form Kinematics Solutions, Multibody System Dynamics, No. 1, p. 23-45, 1997
- (4) Amirouche, F.M.L., Computational Methods of Multibody Dynamics, Prentice-Hall, 1992
- (5) J. T. Wang, R. L. Huston, Kane's Equations With Undetermined Multipliers-Application to Constrained Multibody Systems, Journal of Applied Mechanics Transactions of the ASME, vol. 54, p. 424-429, 1987
- (6) Radu Serban,, Dan Negrut, and Edward J. Haug, A Topology-Based Approach for Exploiting Sparsity in Multibody Dynamics in Cartesian Formulation, Mechanics of Structure and Machine, Vol 25, No. 3, p. 379-396, 1997
- (7) Garcia de Jalón, J. and Bayo, E., Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems, Springer-Verlag, Berlin, 1994
- (8) G. J. Choi, Y.M. Yoo, K. P. Lee, Y. S. Yoon, Vehicle Modeling Methods for Real-time Dynamic Simulation Using Suspension Composite Joints, Mechanics of Structure and Machine, Vol. 28, No. 4, p. 303-321, 2000