

축방향으로 움직이는 박막의 모델링 및 종진동해석

신창호* · 정진태**

Modeling and Longitudinal Vibration Analysis for an Axially Moving Membrane

Chang Ho Shin, Jintai Chung

Key Words : Dynamic Analysis (비선형 동적해석), Axially Moving Material (축방향 이송체), Longitudinal Vibration (종진동)

Abstract

The longitudinal vibration of an axially moving membrane is studied when the membrane has translating acceleration. The equation for the longitudinal vibration is linear and coupled, The equation for the longitudinal vibration are discretized by using the Galerkin approximation after they are transformed into the variational equations, i.e., the weak forms so that the admissible function can be used for the bases of the longitudinal deflection. With the discretized equations for the longitudinal vibration, the time responses are investigated by using newmark method .

1. 서론

축방향으로 움직이는 연속체의 진동은 자기테이프, 벨트, 웨이송 장치등과 관련하여 많은 연구의 대상이 되어왔다. 초기의 연구는 일정한 이송속도를 갖는 현의 횡진동에 대해 이송속도가 끼치는 영향을 분석하였고⁽¹⁻⁶⁾, 최근의 연구에서는 이동과를 이용하여 축방향으로 움직이는 재료의 횡방향 진동이 해석되었다⁽⁷⁻⁸⁾. 그러나 이들 연구가 경계에서 질량의 유입, 유출이 있음에도 검사역(control volume)의 개념이 도입된 Extended Hamilton⁽¹⁰⁾ 원리를 사용하지 않고 운동방정식을 전개하였다. 또한 실용적인 이유로 종진동보다 횡진동이 주요 관심 대상이었다.

따라서 본 논문은 Extended Hamilton 원리를 적용하여 이송가속도를 가진 축방향으로 움직이는 박막의 종방향 운동방정식을 유도하였다. Galerkin

방법을 통하여 Weak form 으로 이산화하였고 기저함수(basis function)로 허용함수(admissible function)를 사용하였다. 그리고 이산화된 방정식으로부터 이송속도 및 가속도가 고유진동수 및 시간응답에 미치는 영향을 분석하였다.

2. 이론적 모델과 운동 방정식

Fig. 1 에 도시된 박막의 구동 시스템은 구동 폴리와 피구동 폴리로 구성되어 있으며, 같은 반경 R 과 질량관성 모멘트 J 를 가지고 있다.

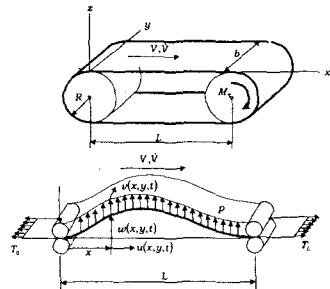


Fig. 1 Schematics of an axially moving membrane

* 한양대학교 대학원 정밀기계공학과 박사과정

** 한양대학교 공학대학 기계공학과

박막의 단위면적당 밀도는 ρ , Young 율은 E , 이송속도 $V(t)$, 그리고 이송가속도 $\dot{V}(t)$ 이다. Fig. 1 처럼 축방향으로 움직이는 박막에는 단위 면적당 수직하중 $p(x,t)$ 가 작용하고 있다. 두 폴리간의 길이가 L 이고, 종방향과 횡방향 변위를 각각 $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, 그리고 $w(x,y,t)$ 로 표현했다. 만약 폴리와 축간에 마찰이 없다고 가정하면, 가속도는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{V}(t) = \frac{R}{2(J + \rho LR^2)} M_T(t) \quad (1)$$

만약 $M_T = 0$ 일때 $x=0$ 에서 초기장력이 T_0 이고 $M_T \neq 0$ 일때 $x=L$ 에서 장력이 T_L 이라 하면, T_0 와 T_L 의 관계는 다음식과 같다.

$$T_L = T_0 + \rho L \dot{V} \quad (2)$$

운동방정식은 Extended Hamilton 원리를 사용하여 구하여야 한다. 왜냐하면 질량이 $x=0$ 와 $x=L$ 의 경계에서 유입, 유출되고 있기 때문이다. 이런 경우 Extended Hamilton 원리는 다음식으로 표현된다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W_{nc} - \delta M) dt = 0 \quad (3)$$

여기서 T 는 운동에너지, U 는 변형에너지, δW_{nc} 는 비보존력에 의한 가상일, δM 경계를 통과하는 가상운동량 수송(virtual momentum transport)이다.

변형된 후의 임의의 점 x 에 대한 위치벡터는 종방향 변위만을 고려하면 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{r} = (x+u)\mathbf{i} + (y+v)\mathbf{j} \quad (4)$$

여기서 \mathbf{i}, \mathbf{j} ,는 각각 x, y 축의 단위 벡터이다. 속도벡터는 위치벡터를 시간에 대해 물질미분을 취하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{j} \quad (5)$$

또한, 박막의 변위-변형율 관계식과 응력-변형율의 관계식은 아래의 식을 사용하였다.

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y), & \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_x + \epsilon_y), \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{xy}, & \sigma_z &= \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

중력의 영향을 무시하고, 박막의 운동에너지와 변형에너지는 아래의 식으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int_0^L \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} dx, \\ U &= \frac{1}{2} h \int_A (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + 2\sigma_{xy} \epsilon_{xy}) dA \end{aligned} \quad (8)$$

그리고, 비보존력에 의한 가상일과 가상운동량 수송(virtual momentum transport)은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} &= \int_0^L T_L \delta u \Big|_{x=L} dy - \int_0^L T_0 \delta u \Big|_{x=0} dy + \int_A p(x,t) \delta w dA, \\ \delta M &= \int_B \rho (\mathbf{V} \cdot \delta \mathbf{r}) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dB \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 \mathbf{n} 은 경계에서 바깥쪽으로 향하는 수직 벡터이다. 운동방정식은 식(8)과 식(9)을 식(3)에 대입하여 유도할 수 있다.

박막에 대한 종방향 운동 지배방정식은 아래와 같이 유도되었다.

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_{xy}}{\partial y} = \rho \dot{V} \quad (10)$$

$$\rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

여기서

$$\begin{aligned} q_x &= Q_x^{in} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ q_y &= Q_y^{in} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ q_{xy} &= Q_{xy}^{in} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

그리고 박막의 경계조건은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} q_x &= T_L \text{ at } x=L, & q_x &= T_0 \text{ at } x=0, \\ q_{xy} &= 0 \text{ at } x=0, L, & q_{xy} &= 0 \text{ at } y=0, L, \\ q_y &= 0 \text{ at } y=0, L \end{aligned} \quad (13)$$

3. 운동방정식의 이산화

운동방정식의 이산화를 위해 유도된 운동방정식 식(10), (11)과 경계조건 식(13)으로부터 weak form 을 만든 후 Galerkin 방법을 적용하였다. 이렇게 하는 이유는 경계조건이 복잡하기 때문이다. 함수(trial function) u 와 v , 가중함수(weighting function) \bar{u} 와 \bar{v} 를 사용하여 식(10), (11)은 다음과 같은 weak form 으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^L \left[\rho \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho V \left(\bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \right) + (D - \rho V^2) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\rho \dot{V}}{2} \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} u \right) + Dv \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + D' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + D' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dx dy \\ = & \rho \dot{V} \int_0^L \int_0^L \bar{u} dx dy - \rho V \int_0^L \left[\bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right]_0^L dy - \rho V^2 \int_0^L \left[\bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^L dy \\ & - \frac{\rho \dot{V}}{2} \int_0^L \left[\bar{u} u \right]_0^L dy + D \int_0^L \left[\bar{u} q_x \right]_0^L dy + D' \int_0^L \left[\bar{u} q_{xy} \right]_0^L dx \quad (14) \\ & \int_0^L \int_0^L \left[\rho \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho V \left(\bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} \right) + (D' - \rho V^2) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\rho \dot{V}}{2} \left(\bar{v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} v \right) + Dv \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + D' \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + D' \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy \\ = & -\rho V \int_0^L \left[\bar{v} \frac{\partial v}{\partial t} \right]_0^L dy - \rho V^2 \int_0^L \left[\bar{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right]_0^L dy - \frac{\rho \dot{V}}{2} \int_0^L \left[\bar{v} v \right]_0^L dy \\ & + D \int_0^L \left[\bar{v} q_y \right]_0^L dx + D' \int_0^L \left[\bar{v} q_{xy} \right]_0^L dy \quad (15) \end{aligned}$$

여기서

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D' = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \quad (16)$$

위에서 종방향 변위는 허용함수가 선형결합된 아래와 같은 시도함수(trial function)로 근사화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J C_{ij}(t) \cos \frac{inx}{L} \cos \frac{jy}{b} \\ v(x, y, t) &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_{mn}(t) \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (17) \end{aligned}$$

마찬가지로 각각의 시도함수(trial function)에 대응하는 아래의 식과 같은 가중함수(weighting function)에 의해 근사화 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, y, t) &= \sum_{d=0}^I \sum_{e=0}^J \bar{C}_{de}(t) \cos \frac{d\pi x}{L} \cos \frac{e\pi y}{b} \\ \bar{v}(x, y, t) &= \sum_{f=0}^M \sum_{g=0}^N \bar{P}_{fg}(t) \cos \frac{f\pi x}{L} \cos \frac{g\pi y}{b} \quad (18) \end{aligned}$$

식(17)과 식(18)을 식(14)과 식(15)에 대입하여 정리하여 다음과 같은 이산화된 방정식을 구할 수

있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[m_{deij}^c \ddot{C}_{ij} + 2Vg_{deij}^c \dot{C}_{ij} + (D - \rho V^2) K_{deij}^{c1} C_{ij} + \dot{V} g_{deij}^c C_{ij} \right. \\ & \left. D' K_{deij}^{c2} C_{ij} \right] + \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left[(Dv K_{demn}^{p1} + D' K_{demn}^{p2}) P_{mn} \right] = f_{de}^c \\ & d = 0, 1, \dots, I, \quad e = 0, 1, \dots, J \quad (19) \\ & \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \left[m_{fgmn}^p \ddot{P}_{mn} + 2Vg_{fgmn}^p \dot{P}_{mn} + (D' - \rho V^2) K_{fgmn}^{p1} P_{mn} \right. \\ & \left. + \dot{V} g_{fgmn}^p P_{mn} + DK_{fgmn}^{p2} P_{mn} \right] + \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \left[(Dv K_{fgij}^{c1} \right. \\ & \left. + D' K_{fgij}^{c2}) C_{ij} \right] = 0 \quad f = 0, 1, \dots, M, \quad g = 0, 1, \dots, N \quad (20) \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned} m_{deij}^c &= \frac{bL}{4} \delta_{di} \delta_{ej}, \quad m_{fgmn}^p = \frac{bL}{4} \delta_{fm} \delta_{gn}, \\ g_{deij}^c &= \begin{cases} 0 & \text{for } d=i \\ \frac{b}{2} [1 - (-1)^{d+i}] \frac{d^2 + i^2}{d^2 - i^2} \delta_{ej} & \text{for } d \neq i \end{cases} \\ g_{fgmn}^p &= \begin{cases} 0 & \text{for } f=m \\ \frac{b}{2} [1 - (-1)^{f+m}] \frac{f^2 + m^2}{f^2 - m^2} \delta_{gn} & \text{for } f \neq m \end{cases} \\ K_{deij}^{c1} &= \frac{i^2 \pi^2 b}{4L} \delta_{di} \delta_{ej}, \quad K_{deij}^{c2} = \frac{j^2 \pi^2 L}{4b} \delta_{di} \delta_{ej}, \\ K_{demn}^{p1} &= \begin{cases} 0 & \text{for } e=n \text{ or } d=m \\ \frac{[1 - (-1)^{n+e}] n^2 \cdot [1 - (-1)^{d+m}] d^2}{n^2 - e^2 \cdot d^2 - m^2} & \text{for } e \neq n \text{ and } d \neq m \end{cases} \\ K_{demn}^{p2} &= \begin{cases} 0 & \text{for } e=n \text{ or } d=m \\ \frac{[1 - (-1)^{n+e}] e^2 \cdot [1 - (-1)^{d+m}] m^2}{n^2 - e^2 \cdot d^2 - m^2} & \text{for } e \neq n \text{ and } d \neq m \end{cases} \\ K_{fgmn}^{p1} &= \frac{m^2 \pi^2}{4L} \delta_{fm} \delta_{gn}, \quad K_{fgmn}^{p2} = \frac{n^2 \pi^2}{4b} \delta_{fm} \delta_{gn}, \\ K_{fgij}^{c1} &= \begin{cases} 0 & \text{for } j=g \text{ or } f=i \\ \frac{[1 - (-1)^{n+e}] g^2 \cdot [1 - (-1)^{d+m}] d^2}{j^2 - g^2 \cdot f^2 - i^2} & \text{for } j \neq g \text{ and } f \neq i \end{cases} \\ K_{fgij}^{c2} &= \begin{cases} 0 & \text{for } j=g \text{ or } f=i \\ \frac{[1 - (-1)^{n+e}] j^2 \cdot [1 - (-1)^{d+m}] f^2}{j^2 - g^2 \cdot f^2 - i^2} & \text{for } j \neq g \text{ and } f \neq i \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

4. 고유 진동수 및 시간응답

먼저, 고유진동수의 수렴성을 조사하기 위해 길이 $L = 0.4m$, 폭 $b = 0.3m$ 단위 면적당 질량 $\rho = 250kg/m^2$, $\nu = 0.25$, $E = 19 \times 10^9 pa$, $V = 20m/s$ 일 때 허용함수의 수를 10 개 까지 증가시키면서 저

차 3 개의 고유진동수를 계산하였다. Table 1 은 n 이 증가함에 따라 고유진동수가 수렴함을 보여준다.

다음으로, 이송속도 V 가 고유진동수에 끼치는 영향을 분석하기 위해, V 를 0 에서 160m/s 까지 변화시켰다. 이송속도가 증가함에 따라 모든 고유진동수가 단조 감소하고, curve veering 이 발생됨을 확인할 수 있다. 그러나 유연 현⁽⁹⁾ 의 경우와는 다르게 임계속도가 존재하지 않음을 알 수 있다.

중방향 변위의 시간응답은 Newmark method 를 사용하였으며 기본 알고리즘은 다음과 같다.

$$M\mathbf{a}_{n+1} + C\mathbf{v}_{n+1} + K\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \quad (22)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_{n+1} + \frac{1}{2} \Delta t^2 [(1-2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}] \quad (23)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t [(1-\gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}] \quad (24)$$

Fig. 3(a)는 이송가속도가 10m/s^2 의 증감과 이송가속도가 0 일 때의 이송속도를 나타내며, Fig. 3(b)는 박막의 중앙 (0.5L, 0.5b)에서 u 방향의 시간 응답이다. $0 \leq t \leq 2$ 일 때, 중방향 변위는 가속도에 저항하는 음의 평형위치에서 진동함을 볼 수 있다. 이것은 관성력 때문에 발생하게 된다. 반면 가속도가 0 일 때 즉 $2 \leq t \leq 4$ 일 때 진동의 중심이 0 인 것은 관성력이 존재하지 않기 때문이다. Fig. 3(c)의 경우는 v 방향의 시간 응답이다. 진동하는 중심이 0 임을 볼 수 있다. u 방향과 다르게 가속 구간에서 진동의 중심이 이동이 없는 것은 박막의 중앙에서 (0.5L, 0.5b) 가속되는 방향과는 수직인 방향에서 진동하기 때문이다. 이런 현상은 유연 현⁽⁹⁾ 의 횡방향 진동의 중심이 0 인 경우와 비슷함을 알 수 있다.

Table 1
Convergence characteristics of the longitudinal Vibration when $V = 20\text{m/s}$

No. I, J	λ_1	λ_2	λ_3
1	340.2987	346.4708	459.8387
2	312.6269	335.9551	345.7403
3	294.2673	334.3906	335.2581
4	288.0157	332.7349	334.2808
5	282.1371	329.3107	334.0563
6	279.1642	328.5611	333.5190
7	275.9894	326.7516	333.4078
8	274.2404	326.3326	333.0500
9	272.2211	325.1981	332.9837
10	271.0659	324.9338	332.7236

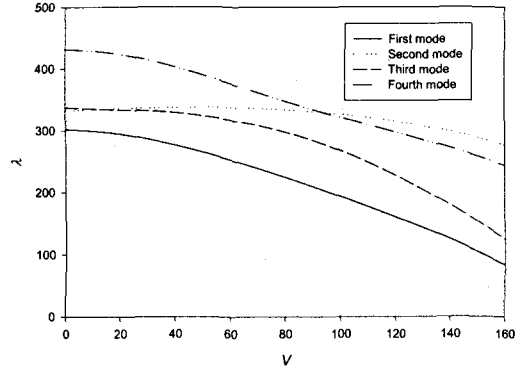


Fig. 2 Natural frequencies λ versus the translating speed V

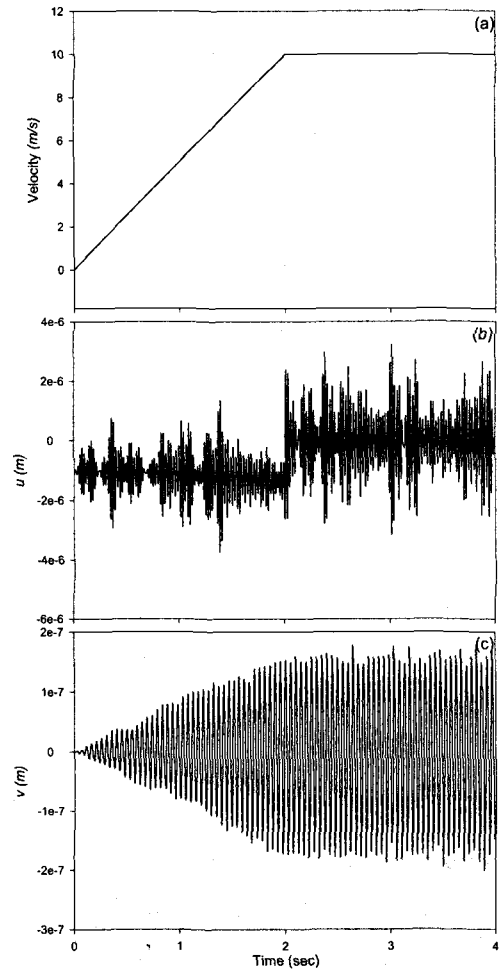


Fig. 3 Time histories of the deflection at for the given velocity profile : (a) the translating speed; (b) the u direction deflection; and (c) the v direction deflection

5. 결 론

본 논문에서 이송가속도를 고려하여 이송되는 박막의 종방향 변위의 운동방정식을 유도하였다. 질량의 유입과 유출을 고려하여 Extended Hamilton 원리를 도입하였다. 유도된 운동 지배방정식은 종방향 변위에 대해 선형이며 서로 연성되어 있다. Galerkin 방법을 적용하여 이산화된 운동방정식을 얻었으며, 이를 바탕으로 고유진동수 및 Newmark method 를 이용하여 시간응답을 계산하였다. 그리고 이송속도와 이송가속도가 고유진동수 및 시간응답에 미치는 영향을 고찰하였다.

참고문헌

- (1) Mote C. D. Jr., 1972, "Dynamic stability of axially moving materials." Shock and Vibration Digest , Vol. 4, pp. 2-11.
- (2) J. A. WICKERT and Mote C. D. Jr., 1988, "Current research on the vibration and stability of axially moving materials." Shock and Vibration Digest, Vol. 20, pp. 3-13.
- (3) Mote C. D. Jr., 1966, "On the nonlinear oscillation of an axially moving string" Journal of Applied Mechanics , Vol. 33, pp. 463-464..
- (4) A. L. THURMAN and Mote C. D. Jr., 1969, "Free, periodic, non-linear oscillation of an axially moving string." Journal of Applied Mechanics , Vol. 36, pp. 83-91.
- (5) Mote C. D. Jr., 1975, "Stability of systems transporting accelerating axially moving materials." ASME Journal of Dynamic Systems, Measurements and Control, Vol. 97, pp. 96-98.
- (6) M. PAKDEMIRLI and A. G. ULSOY., 1997, "Stability of an axially accelerating string." Journal of Sound and Vibration, Vol. 203, pp. 815-832.
- (7) Lee, S.-Y and Mote C. D. Jr., 1997, "A Generalized Treatment of the Energetics of Translating Continua, Part I : strings and Tensioned Pipes." Journal of Sound and Vibration, Vol. 204, pp. 735-753.
- (8) Lee. S.-Y and Mote C. D. Jr., 1998, "Traveling Wave Dynamics in a Translating String Coupled to Stationary Constraints : Energy Transfer and Mode Localization." Journal of Sound and Vibration, Vol. 212, pp. 1-22.
- (9) J. Chung, Han C. S. and Yi K., 2001 "Vibration of an Axially Moving String with Geometric Non-Linearity and Translating Acceleration," Journal of Sound and Vibration, Vol. 240, No. 4, pp. 733-746
- (10) MCLIVER D. B., 1972, "Hamilton's principle for systems of changing mass." Journal of Engineering Mathematics, Vol. 7, pp. 249-261.