

# 기하학적 비선형과 이송 가속도를 갖는 전개하는 보의 동적해석

송덕기\* · 정진태\*\*

## Dynamic Analysis of a Deploying Beam with Geometric Non-Linearity and Translating Acceleration

Deokki Song, Jintai Chung

**Key Words :** Deploying Beam(전개하는 보), Dynamic Analysis(동적해석), Non-Linearity(비선형), Translating Acceleration(이송 가속도), Extended Hamilton's Principle(확장Hamilton의 원리), Time Response(시간응답), Galerkin Approximate Method(Galerkin 근사해법)

### Abstract

The dynamic response of an axially deploying beam is studied when the beam has geometric non-linearity and translating acceleration. Based upon the von Karman strain theory, the governing equations and the boundary conditions of a deploying beam are derived by using extended Hamilton's principle considering the longitudinal and transverse deflections. The equations of motion are discretized by using the Galerkin approximate method. From the discretized equations, the dynamic responses are computed by the Newmark time integration method.

### 1. 서론

전개하는 보와 같이 시간에 따라 길이가 변하는 기계구조 시스템은 산업용 로봇팔, 안테나 구조물등의 실용적인 분야에 응용된다. 축방향으로 이동하면서 길이가 변하는 보에 대한 초기 모델은 Tabarrok<sup>(1)</sup>등에 의해서 제안되었고, 이에 대한 연구가 최근 들어 많이 수행되어 왔다. Barakat<sup>(2)</sup>, Buffinton<sup>(3)</sup>등은 일정한 속도로 움직이는 보에 대한 횡방향 진동을 연구하였고 Matsuzaki<sup>(4)</sup>와 그의 동료들은 실험을 통해 가속도가 없는 경우의 길이가 변하는 보의 횡방향 동적거동을 연구하였다. 그러나 실제의 기계구조물에서는 많은 경우 보가 가속도를 갖고 빠른 속도로 전개하며, 이 경우 횡진동뿐만이 아니라 종진동의 영향도 무시할 수 없다. 따라서 본 논문에서는 기하학적 비선형성에 의한 횡방향 거동과 종방향 거동의 연성효과를 고

려하여, 가속도를 갖고 전개하는 외팔보의 동적특성에 대한 연구를 수행하였다. 확장된 Hamilton의 원리를 이용하여 전개하는 외팔보의 지배방정식과 경계조건을 유도하였으며, 지배방정식의 해를 정지된 상태의 외팔보의 허용함수를 이용하여 가정한 후 Galerkin 근사해법을 사용하여 이산화하였다. Newmark 시간적분법을 이용하여 구해진 시간 응답으로부터 전개속도, 가속도 그리고 가해지는 힘에 따른 동적거동을 해석하였다.

### 2. 지배방정식의 유도

#### 2.1 이론적 모델링과 기본 관계식

Fig. 1 에 고정된 벽에서  $V(t)$ 의 속도로 전개하여 나오고 있는 길이가  $L(t)$ 인 외팔보를 도시하였다. 외팔보는 Euler보로 가정하며 영의계수(Young's modulus)가  $E$ 이고 단위체적당 밀도가  $\rho$ 인 균일탄성체이다. 보의 단면은  $A$ 로 일정하고 횡방향 분포하중  $p(x,t)$ 가 작용하고 있다.  $p(x,t)$ 는 단위길이당 보의 하중을 나타내며,  $\rho Ag$ 로 표

\* 비회원, 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

\*\* 회원, 한양대학교 공학대학 기계공학과

현할 수 있다. 여기서  $g$  는 중력가속도를 나타낸다. 축방향으로는 비보존력  $F$  가 작용하고 있는 것으로 생각한다.

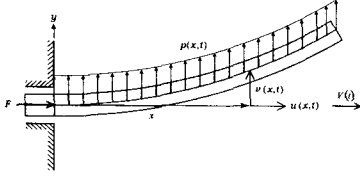


Fig. 1 Schematic of an axially deploying beam

길이  $L(t)$  와 전개속도  $V(t)$  는 각각 초기 길이  $L_0$  와 초기 전개속도  $V_0$  를 갖고 시간  $t$  에 따라 변한다. 도시된 외팔보는 전개속도가 변화함에 따라 가속도를 갖게 되며,  $\dot{V}(t)$  로 나타낼 수 있다. 가속도  $\dot{V}(t)$  가 일정할 때, 외팔보의 전개속도와 길이는 다음과 같이 표현된다.

$$V(t) = at + V_0, \quad L(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + L_0 \quad (1)$$

여기서  $a$  는 가속도  $\dot{V}(t)$  를 나타낸다.

비보존력  $F$  는 선형운동량의 시간에 대한 변화율이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = \frac{d(mV)}{dt} = \frac{dm}{dt}V + m \frac{dV}{dt} \quad (2)$$

여기서 보의 질량  $m$  은 시간에 대한 함수이며  $\rho AL(t)$  으로 표현된다. 따라서 식 (2)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F = \rho A \dot{L}(t)^2 + \rho AL(t) \ddot{L}(t) \quad (3)$$

여기서  $\dot{L}(t)$  은  $V(t)$  를 나타내며,  $\ddot{L}(t)$  은  $\dot{V}(t)$  을 나타낸다.

임의의 시간  $t$  에서 보의 중심축 상의 한 점의 위치좌표를  $x$  라고 하고 탄성변형에 의한 종방향 변위와 횡방향 변위를  $u$  와  $v$  라 하면 변형 후의 위치벡터는

$$\mathbf{r} = (x+u)\mathbf{i} + v\mathbf{j} \quad (4)$$

이다. 여기서, 변위  $u$  와  $v$  는 위치좌표  $x$  와 시간  $t$  의 함수로  $u = u(x,t)$  와  $v = v(x,t)$  로 나타낼 수 있다.

변형 후의 속도벡터를 구하기 위해 변위  $u$  와  $v$  에 물질미분(material derivative)을 수행하면

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

이다.  $\frac{dx}{dt} = V$  로 놓으면 식 (5)에 의해 속도벡터는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{v} = \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{j} \quad (6)$$

속도벡터 식 (6)을 이용하여 시간  $t$ 에서의 보의

운동에너지를 구하면 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{L(t)} \int_A \rho V \cdot V dA dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^{L(t)} \int_A \left[ \left( V + \frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} + V \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \rho dA dx \quad (7)$$

기하학적 비선형성을 고려하여 보의 변형에너지를 구하기 위해 잘 알려진 von Karman 변형률 이론을 도입하였다. von Karman 변형률 이론에 의한 변위와 변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 \\ \epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (8)$$

여기서,  $u_x$  와  $v_y$  는 보의 임의의 위치에서의 변위이며  $u_x = u_x(x,t)$  와  $v_x = v_x(x,t)$  가 된다. 이것을 임의의 시간  $t$ 에서 보의 중심축 상의 한 점의 위치좌표  $x$ 로부터의 변위  $u$  와  $v$  로 표현하면, 다음과 같다.

$$u_x(x,y,t) = u(x,t) - y \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}, \quad v_y(x,t) = v(x,t) \quad (9)$$

식 (8)의 변형률에 식 (9)를 대입하면 변형률은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2, \\ \epsilon_{xy} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

응력과 변형률의 관계는 Hook의 법칙에 따른 일축응력상태로 생각하면 다음과 같다.

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E} \quad (11)$$

여기서  $\nu$  는 프와송비(Poisson's ratio)이다. 따라서, 보의 변형에너지는

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \epsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_0^{L(t)} \int_A \epsilon_x \sigma_x dA dx \quad (12)$$

로 쓸 수 있다. 여기서  $V$  는 체적을 나타낸다.

## 2.2 Extended Hamilton의 원리 및 지배방정식과 경계조건의 도출

전개하는 보와 같은 경우의 문제에서는 검사체적(control volume)을 통해 질량이 지속적으로 유입되므로 개방계(open system)에 적용되는 확장된 Hamilton의 원리를 도입하였다. 비보존력을 고려한 확장된 Hamilton의 원리는 다음과 같다.

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T - \delta U + \delta \bar{W}_{nc}] - \delta H dt = 0 \quad (13)$$

여기서  $\bar{W}_{nc}$  은 비보존력에 의한 일을 나타내며,  $H$  는 질량의 유출입을 고려한 항을 나타낸다.  $T$

는 운동에너지,  $U$ 는 변형에너지이다.

$H$ 로 표현되는 항은 검사체적의 표면을 통한 입자의 유출입시의 상대속도와 입자의 위치와의 관계로 나타나며 이것은 다음과 같다.

$$H = \left[ \int_A \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})(-\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}) dA \right]_0^{L(t)} \quad (14)$$

또한, 비보존일  $\bar{W}_{nc}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{W}_{nc} &= \left\{ F \mathbf{i} + \left[ \int_0^{L(t)} p(x,t) dx \right] \mathbf{j} \right\} \cdot (\mathbf{u} \mathbf{i} + \mathbf{v} \mathbf{j}) \\ &= F \mathbf{u} + \left( \int_0^{L(t)} p(x,t) dx \right) v \end{aligned} \quad (15)$$

식 (7), (12), (14), (15)로 표현되는 운동에너지, 변형에너지,  $H$ 와  $\bar{W}_{nc}$ 에 변분을 취하고  $\sigma_x$ 를 다음과 같이 선형화한다.

$$\sigma_x = E \varepsilon_x^{Lin} = E \left( \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \quad (16)$$

여기서  $\varepsilon_x^{Lin}$ 는 선형화된 변형률이다.

또한  $\int_A dA = A$ ,  $\int_A y dA = 0$ ,  $\int_A y^2 dA = I$ 로 놓는다. 여기서  $I$ 는 면적관성모멘트가 된다.

식 (7), (12), (14), (15)와 식 (16)을 이용하여 식 (13)에 대입하여 정리한 후  $\delta u$ 와  $\delta v$ 의 계수로 부터 다음의 운동방정식과 경계조건들을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \rho A \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ = -\rho A \dot{V} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \rho A \left( \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left( EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = p(x,t) \end{aligned} \quad (18)$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} = -F, \quad v=0, \quad EI \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x=0 \quad (19)$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \quad \text{at } x=L(t) \quad (20)$$

전개속도  $V$ 가 0인 경우 식 (17)과 식 (18)은 이미 잘 알려져 있는 정지된 외팔보의 운동방정식과 경계조건들이 된다.

### 3. 지배방정식의 이산화

앞 절에서 구한 전개하는 보의 지배방정식과 경계조건으로부터 보의 동적거동을 해석하기 위해, 근사해법을 사용하였다. 변분형태의 이산화된 운

동방정식을 얻기 위해, 본 연구에서는 Galerkin 근사해법을 사용하였다. 지배방정식의 변분형은 식 (17)과 식 (18)의 지배방정식과 식 (19)와 식 (20)의 경계조건으로 부터 유도된다. 시도함수를  $u$ 와  $v$ 로 표현했을 때, 이에 상응하는 가중함수를  $\bar{u}$ 와  $\bar{v}$ 로 표현하면, 식 (17)과 식 (18)의 변분형은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \int_0^{L(t)} \left[ \rho A \left( \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) + (EA - \rho A V^2) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right. \\ \left. + \rho A \dot{V} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx = \left( 1 - \frac{\rho V^2}{E} \right) F \bar{u}(0) - \rho A \dot{V} \int_0^{L(t)} \bar{u} dx \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{L(t)} \left[ \rho A \left( \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{V} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + EI \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - EA \bar{v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx = \int_0^{L(t)} \bar{v} p(x,t) dx \end{aligned} \quad (22)$$

식 (21)과 (22)으로 주어진 변분형태는 이미 자연 경계조건이 방정식에 고려되었으므로, 종방향 및 횡방향 변위의 시도함수를 허용함수로 근사화 할 수 있다. 여기서 시도함수는 다음과 같이 표현한다.

$$u = \sum_{j=1}^J \alpha_j(t) \phi_j(x,t), \quad v = \sum_{n=1}^N \beta_n(t) \psi_n(x,t) \quad (23)$$

또한, 같은 방법으로 시도함수에 상응하는 가중함수는 다음과 같이 표현한다.

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^J \bar{\alpha}_j(t) \phi_j(x,t), \quad \bar{v} = \sum_{n=1}^N \bar{\beta}_n(t) \psi_n(x,t) \quad (24)$$

여기서,  $J$ 와  $N$ 은 종방향과 횡방향의 변위에 대한 기저함수의 총갯수이다.  $\alpha_j(t)$ 와  $\beta_n(t)$ 는 결정되어야 할 시간에 대한 미지함수이며,  $\bar{\alpha}_i(t)$ 와  $\bar{\beta}_m(t)$ 는 시간에 대한 임의의 함수이다.

본 연구에서는 시도함수 식 (23)을 다음과 같은 허용함수를 택하였다.

$$u = \sum_{j=1}^J \alpha_j(t) \cos\left(\frac{j\pi x}{L(t)}\right), \quad v = \sum_{n=1}^N \beta_n(t) x \sin\left(\frac{n\pi x}{L(t)}\right) \quad (25)$$

시도함수 식 (23)에 상응하는 가중함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^J \bar{\alpha}_i(t) \cos\left(\frac{i\pi x}{L(t)}\right), \quad \bar{v} = \sum_{m=1}^N \bar{\beta}_m(t) x \sin\left(\frac{m\pi x}{L(t)}\right) \quad (26)$$

변분형태의 지배방정식을 얻기 위하여 본 연구에서는 Galerkin 방법을 사용하였다. 식 (23)과 (24)를 변분형 지배방정식 (21)과 (22)에 대입하면 각 항들은 다음과 같이 표현된다.

$$\rho A \int_0^{L(t)} \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \left[ \phi^* m_{ij} \ddot{\alpha}_j + 2 \phi^* g_{ij}^* \dot{\alpha}_j + \phi^* h_{ij}^* \alpha_j \right] \bar{\alpha}_i \quad (27)$$

$$\rho A V \int_0^{L(t)} \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} dx = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \left[ V \phi^* g_{ij}^* \dot{\alpha}_j + V \phi^* \gamma_{ij}^{*x} \alpha_j \right] \bar{\alpha}_i \quad (28)$$

$$(EA - \rho A V^2) \int_0^{L(t)} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \left[ k_{ij}^* \alpha_j \right] \bar{\alpha}_i \quad (29)$$

$$\rho A \dot{V} \int_0^{L(t)} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \left[ \dot{V} \phi^* g_{ij}^* \alpha_j \right] \bar{\alpha}_i \quad (30)$$

$$\rho A \dot{V} \int_0^{L(t)} \bar{u} dx = \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \left[ \rho A \dot{V} \bar{\phi}^* f_{ij} \right] \bar{\alpha}_i \quad (31)$$

$$\rho A \int_0^{L(t)} \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left\{ \psi^* m_{mn} \ddot{\beta}_n \right. \\ \left. + 2 \psi^* g_{mn}^t \dot{\beta}_n + \psi^* h_{mn}^t \beta_n \right\} \bar{\beta}_m \quad (32)$$

$$\rho A V \int_0^{L(t)} \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} dx = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left[ V \psi^* g_{mn}^x \dot{\beta}_n \right. \\ \left. + V \psi^* \gamma_{mn}^{*x} \beta_n \right] \bar{\beta}_m \quad (33)$$

$$\rho A V^2 \int_0^{L(t)} \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left[ V^2 \psi^* h_{mn}^x \beta_n \right] \bar{\beta}_m \quad (34)$$

$$\rho A \dot{V} \int_0^{L(t)} \bar{v} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left[ \dot{V} \psi^* g_{mn}^x \beta_n \right] \bar{\beta}_m \quad (35)$$

$$EI \int_0^{L(t)} \bar{v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left[ k_{mn}^* \beta_n \right] \bar{\beta}_m \quad (36)$$

$$EA \int_0^{L(t)} \bar{v} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left\{ \left[ \sum_{i=1}^J \tau_{imn} \alpha_i \right] \beta_n \right\} \bar{\beta}_m \quad (37)$$

$$\int_0^{L(t)} \bar{v} p(x, t) dx = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \left[ \bar{\psi}^* f_m p(x, t) \right] \bar{\beta}_m \quad (38)$$

여기서,

$$\phi^* m_{ij} = \rho A \int_0^{L(t)} \bar{\phi}_i \bar{\phi}_j dx, \quad \phi^* g_{ij}^* = \rho A \int_0^{L(t)} \bar{\phi}_i \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial a} dx,$$

$$\phi^* h_{ij}^* = \rho A \int_0^{L(t)} \bar{\phi}_i \frac{\partial^2 \bar{\phi}_j}{\partial a^2} dx, \quad \phi^* \gamma_{ij}^{*x} = \rho A \int_0^{L(t)} \bar{\phi}_i \frac{\partial^2 \bar{\phi}_j}{\partial a \partial b} dx,$$

$$k_{ij}^* = (EA - \rho A V^2) \int_0^{L(t)} \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}_j}{\partial x} dx,$$

$$k_{mn}^* = EI \int_0^{L(t)} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_n}{\partial x^2} dx, \quad \bar{\phi}^* f_i = \int_0^{L(t)} \bar{\phi}_i dx,$$

$$\tau_{imn} = EA \int_0^{L(t)} \bar{\psi}_m \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}_n}{\partial x} \right) dx \quad (39)$$

이다.

임의의 값을 갖는  $\bar{\alpha}_i(t)$  와  $\bar{\beta}_m(t)$ 에 대해서 모든 항들을 정리하면,  $\bar{\alpha}_i(t)$  와  $\bar{\beta}_m(t)$ 의 계수로부터 다음과 같은 이산화된 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^J \left\{ \phi^* m_{ij} \ddot{\alpha}_j + (2 \phi^* g_{ij}^* + V \phi^* g_{ij}^*) \dot{\alpha}_j \right. \\ \left. + \phi^* h_{ij}^* + V \phi^* \gamma_{ij}^{*x} + k_{ij}^* + \dot{V} \phi^* g_{ij}^* \right\} \alpha_j \\ = \left( 1 - \frac{\rho V^2}{E} \right) F \bar{u}(0) - \rho A \dot{V} \bar{\phi}^* f_i, \quad i=1,2,\dots,J \quad (40)$$

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \psi^* m_{mn} \ddot{\beta}_n + (2 \psi^* g_{mn}^t + V \psi^* g_{mn}^x) \dot{\beta}_n \right. \\ \left. + (\psi^* h_{mn}^t + V \psi^* \gamma_{mn}^{*x} + V^2 \psi^* h_{mn}^x + \dot{V} \psi^* g_{mn}^x) \beta_n + k_{mn}^* \beta_n \right. \\ \left. - \left[ \sum_{i=1}^J \tau_{imn} \alpha_i \right] \beta_n \right\} = \bar{\psi}^* f_m p(x, t), \quad m=1,2,\dots,N \quad (41)$$

여기서,

$$\phi^* m_{ij} = \frac{L}{2} \delta_{ij}, \quad \phi^* g_{ij}^* = \begin{cases} -\frac{\rho A L}{4}, & \text{for } i=j, \\ \rho A L \frac{(-1)^{m+n} n^2}{(m-n)(m+n)}, & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

$$\phi^* g_{ij}^* = \begin{cases} 0, & \text{for } i=j, \\ \rho A n^2 \frac{[-1+(-1)^{m+n}]}{(-m+n)(m+n)}, & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

$$\phi^* h_{ij}^* = \begin{cases} \rho A \frac{L^2(3-2n^2\pi^2) - 3LL}{12L}, & \text{for } i=j, \\ \rho A \frac{(-1)^{m+n} n^2}{L(m-n)^2(m+n)^2} [-4L^2m^2 + LL(m-n)(m+n)], & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

$$\phi^* \gamma_{ij}^{*x} = \begin{cases} \rho A \frac{Ln^2\pi^2}{4L}, & \text{for } i=j, \\ \rho A \frac{2Lm^2n^2}{L(m-n)^2(m+n)^2} [-1+(-1)^{m+n}], & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

$$k_{ij}^* = \begin{cases} (EA - \rho A V^2) \frac{n^2\pi^2}{2L}, & \text{for } i=j, \\ 0, & \text{for } i \neq j, \end{cases}$$

$$\psi^* m_{mn} = \begin{cases} \rho A \frac{L^3}{12} \left( 2 - \frac{3(-1)^{2n}}{n^2\pi^2} \right), & \text{for } m=n, \\ \rho A \frac{(-1)^{m-n} L^3}{\pi^2} \left( \frac{1}{(m-n)^2} - \frac{(-1)^{2n}}{(m+n)^2} \right), & \text{for } m \neq n, \end{cases}$$

$$\psi^* g_{mn}^t = \begin{cases} \rho A \frac{L^2 L (-1)^{2n} (-3 + 2n^2\pi^2)}{8n^2\pi^2}, & \text{for } m=n, \\ \rho A \frac{L^2 L n (-1)^{m-n}}{2(m-n)^2(m+n)^2\pi^2} \\ \left\{ (m+n)^2 [-6 + (m-n)^2\pi^2] + (m-n)^2 [-6 + (m+n)^2\pi^2] \right\}, & \text{for } m \neq n, \end{cases}$$

$$\psi^* g_{mn}^x = \begin{cases} 0, & \text{for } m=n, \\ \rho A \frac{L^2 mn}{(m-n)^2(m+n)^2\pi^2} \left\{ -4(m^2+n^2) - (-1)^{m+n} \right. \\ \left. [-4(m^2+n^2) + (m^2-n^2)^2\pi^2] \right\}, & \text{for } m \neq n, \end{cases}$$

$${}^v h_{mn}^t = \begin{cases} \rho A \frac{L[-4\tilde{L}^2 n^4 \pi^4 + 5\tilde{L}L(-1)^{2n}(-3+2n^2\pi^2)]}{40n^2\pi^2}, & \text{for } m=n, \\ \rho A \frac{Lmn(-1)^{m-n}}{(m-n)^4(m+n)^4\pi^2} \\ \left\{ L\tilde{L}[-6(m^4+2m^2n^2-3n^4)+(m^2-n^2)^3\pi^2] \right. \\ \left. + 2\tilde{L}^2[6(m^4+10m^2n^2+5n^4)-(m^2-n^2)^2(m^2+3n^2)\pi^2] \right\}, & \text{for } m \neq n, \end{cases}$$

$${}^v \gamma_{mn}^{\alpha} = \begin{cases} \rho A \frac{L\tilde{L}}{16n^2\pi^2} [1+2n^4\pi^4+(-1)^{2n}(-1+2n^2\pi^2)], & \text{for } m=n, \\ \rho A \frac{2(-1)^m L\tilde{L}m}{(m-n)^4(m+n)^4\pi^2} \{2(-1)^n n(m^4+8m^2n^2+3n^4) \\ + (-1)^m n[-2(m^4+8m^2n^2+3n^4)+(m^6+3m^2n^4+2n^6)\pi^2]\}, & \text{for } m \neq n, \end{cases}$$

$${}^v h_{mn}^x = \begin{cases} \rho A \frac{L}{12} (-3-2n^2\pi^2), & \text{for } m=n, \\ \rho A \frac{2(-1)^{m+n+1} Lmn}{(m-n)^2(m+n)^2} (m^2+n^2), & \text{for } m \neq n, \end{cases}$$

$$\tau_{imn} = \begin{cases} EA \frac{mni^2(m^2+n^2-i^2)\pi^2}{(m-n-i)(m+n-i)(m-n+i)(m+n+i)}, & \text{if } i+m+n \text{ is even,} \\ EA \frac{mni^2}{(m-n-i)^3(m+n-i)^3(m-n+i)^3(m+n+i)^3} \\ \{16[m^8+2m^6(n-i)(n+i)-6m^4n^2(n-i)(n+i) \\ + (n-i)^3(n+i)^3(n^2+i^2)+2m^2(n^6+3n^4i^2-5n^2i^4+i^6)] \\ - (m+n-i)^3(m-n+i)^3(-m+n+i)^3(m+n+i)^3(m+n-i)^3\pi^2\}, & \text{if } i+m+n \text{ is odd,} \end{cases}$$

$$k_{mn}^v = \begin{cases} EI \frac{n^2\pi^2}{12L} (33+2n^2\pi^2), & \text{for } m=n, \\ EI \frac{2(-1)^{m+n} mn\pi^2}{L(m-n)^2(m+n)^2} (m^4+n^4), & \text{for } m \neq n, \end{cases}$$

$$\bar{v} f_m = -\frac{(-1)^m L^2}{m\pi}, \quad \bar{v} f_i = 0 \quad (42)$$

여기서,  $\delta_{ij}$  은 Kroneker delta 함수이고,  $L$ ,  $\tilde{L}$ ,  $\bar{L}$  는 각각  $L=L(t)$ ,  $\tilde{L}=\tilde{L}(t)$ ,  $\bar{L}=\bar{L}(t)$  즉, 시간의 함수들이다.

식(40)과 (41)을 행렬-벡터 방정식으로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^u \ddot{\alpha}^u + \mathbf{C}^u \dot{\alpha}^u + \mathbf{K}^u \alpha^u = \mathbf{F}^u \quad (43)$$

$$\mathbf{M}^v \ddot{\alpha}^v + \mathbf{C}^v \dot{\alpha}^v + \mathbf{K}^v \alpha^v = \mathbf{F}^v \quad (44)$$

여기서,

$$\mathbf{M}^u = {}^\theta \mathbf{M}_{ij}^t, \quad \mathbf{M}^v = {}^v \mathbf{M}_{mn}, \quad \mathbf{C}^u = 2({}^\theta \mathbf{G}_{ij}^t + V {}^\theta \mathbf{G}_{ij}^x),$$

$$\mathbf{C}^v = 2({}^v \mathbf{G}_{mn}^t + V {}^v \mathbf{G}_{mn}^x), \quad \mathbf{K}^u = {}^\theta \mathbf{H}_{ij}^t + V {}^\theta \mathbf{\Gamma}_{ij}^t + \mathbf{K}_{ij}^t + \dot{V} {}^\theta \mathbf{G}_{ij}^x,$$

$$\mathbf{K}^v = {}^v \mathbf{H}_{mn}^t + V {}^v \mathbf{\Gamma}_{mn}^t + V^2 {}^v \mathbf{H}_{mn}^x + \dot{V} {}^v \mathbf{G}_{mn}^x + \mathbf{K}_{mn}^x - \mathbf{T}_{imn}$$

$$\mathbf{F}^u = \left(1 - \frac{\rho V^2}{E}\right) F \bar{u}(0) - \rho A \dot{V} {}^\theta \mathbf{F}_i, \quad \mathbf{F}^v = \bar{v} \mathbf{F}_m p(x,t),$$

$$\alpha^u = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_J\}^T, \quad \alpha^v = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N\}^T,$$

$$\mathbf{T}_{imn} = \left[ \sum_{i=1}^J \tau_{imn} \alpha_i \right] \quad (45)$$

이다.

식 (43)은 종방향에 대한 선형 상미분방정식이며, 식 (44)는  $\mathbf{K}^v$  에 의해서 횡방향의 변위와 종방향의 변위가 서로 연성되어 있는 비선형 상미분방정식이다.

#### 4. 동적 시간 응답의 계산 및 해석

Newmark 시간적분법을 사용하기 위하여, 행렬과 벡터로 표현된 식 (43)과 식 (44)를 다음과 같이 나타내는 것이 편리하다

$$\mathbf{M}_{n+1}^u \mathbf{a}_{n+1}^u + \mathbf{C}_{n+1}^u \mathbf{v}_{n+1}^u + \mathbf{K}_{n+1}^u \mathbf{d}_{n+1}^u = \mathbf{f}_{n+1}^u \quad (46)$$

$$\mathbf{M}_{n+1}^v \mathbf{a}_{n+1}^v + \mathbf{C}_{n+1}^v \mathbf{v}_{n+1}^v + \mathbf{K}_{n+1}^v \mathbf{d}_{n+1}^v = \mathbf{f}_{n+1}^v \quad (47)$$

여기서

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 [(1-2\beta) \mathbf{a}_n + 2\beta \mathbf{a}_{n+1}] \quad (48)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + [(1-\gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1}] \quad (49)$$

이며,  $\beta = \frac{1}{4}$  와  $\gamma = \frac{1}{2}$  의 값을 사용하였다.  $\Delta t$  는 시간간격의 크기이다.  $\mathbf{M}_{n+1}^u$ ,  $\mathbf{C}_{n+1}^u$ ,  $\mathbf{K}_{n+1}^u$  및  $\mathbf{M}_{n+1}^v$ ,  $\mathbf{C}_{n+1}^v$ ,  $\mathbf{K}_{n+1}^v$  는 시간의 함수인  $L(t)$ ,  $V(t)$ ,  $\dot{V}(t)$  를 포함하고 있으므로, 시간에 따라 변하는 행렬이다. 여기서,  $\mathbf{a}_{n+1}^u$ ,  $\mathbf{v}_{n+1}^u$ ,  $\mathbf{d}_{n+1}^u$  는  $\ddot{\alpha}^u(t_n)$ ,  $\dot{\alpha}^u(t_n)$ ,  $\alpha^u(t_n)$  으로 근사화되며,  $\mathbf{a}_{n+1}^v$ ,  $\mathbf{v}_{n+1}^v$ ,  $\mathbf{d}_{n+1}^v$  는  $\ddot{\alpha}^v(t_n)$ ,  $\dot{\alpha}^v(t_n)$ ,  $\alpha^v(t_n)$  으로 근사화된다.

식 (48)과 식(49)를 식 (46)과 식 (47)에 각각 적용하여 Newmark 시간적분법에 따라 동적거동의 계산을 수행하였다.

Fig. 2 는 초기 길이를 1m 로 하는 보가 초기속도 0m/s 와 가속도 0.5m/s<sup>2</sup> 를 가지고 전개할 때, 10sec 까지의 가속도, 힘, 속도 그리고 길이를 나타낸다. 고정된 관찰점의 위치는 보의 초기 길이의 위치와 같다. 여기서 기저함수의 개수  $N$  과  $J$  는 5 로 하였으며, 시간 간격은 0.01sec 로 하였다. 사용된 보의 물성치와 제원은 Table.1에 나타나 있다.

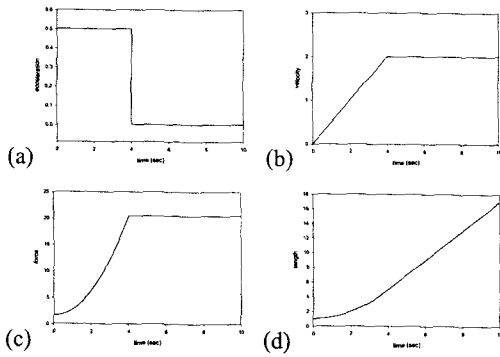


Fig. 2 Profiles of acceleration, velocity, force and length at  $x=L_0$ : (a) acceleration (b) velocity (c) force (d) length

Table 1. Material and geometric properties of a beam

$\rho$ (density)	$7850 \text{ kg/m}^3$
$E$ (young's modulus)	$210 \times 10^{13} \text{ Pa}$
$A$ (cross sectional area)	$4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
$I$ (area moment of inertia)	$1.3333 \times 10^{-8} \text{ m}^4$

Fig. 2 에서 보는 바와 같이 가속도가 일정하지만 구간별로 다르게 주어졌다. 가속도가 0이 되는 지점에서 속도와 힘은 일정하게 주어진다. 이 때의 시간에 따른 종방향 및 횡방향의 변위는 Fig. 3 과 Fig. 4 에 나타나 있다.

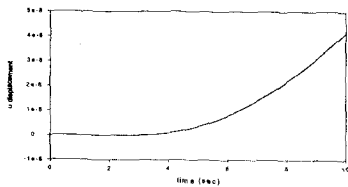


Fig. 3 Longitudinal displacement at  $x=L_0$

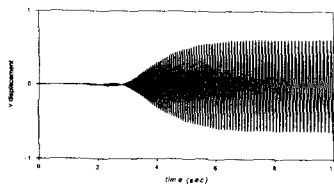


Fig. 4 Transverse displacement at  $x=L_0$

Fig. 3 에서 종방향의 변위는 증가하나 그 값은 횡방향의 변위에 비해 매우 작음을 알 수 있다. 횡방향의 변위는 Fig. 4 에서 보는 바와 같이 4sec 부근까지는 가속도의 영향으로 지속적으로 커지나, 가속도가 0가 되는 4sec 이후의 구간에서는 더 이상 커지지 않고 그 진폭이 일정함을 알 수 있다. 이로부터, 가해지는 힘으로 인해 발생하는 가속도

의 조절을 통해 횡방향 및 종방향 진동을 감소 혹은 일정하게 할 수 있음을 알 수 있다.

## 5. 결론

확장된 Hamilton의 원리를 적용하여 속도와 가속도를 갖고 전개하는 외팔보에 대한 횡방향 및 종방향의 편미분 방정식을 유도하였다.

횡방향 편미분 방정식은 종방향의 변위와 횡방향의 변위가 서로 연성되어 있지만 종방향 편미분 방정식에서는 연성되어 있지 않다. 두 가지의 편미분 방정식에 대한 모든 경계조건을 만족하는 비교함수의 선정이 어려우므로, 정지된 상태의 외팔보의 허용함수를 편미분방정식의 해로 가정 한 후 편미분 방정식과 경계조건으로부터 두 방향에 대한 weak form이 유도되었다. Galerkin 근사해법을 사용한 이산화를 통해 행렬-벡터 방정식을 얻었으며, 행렬-벡터 방정식을 이용한 시간응답으로부터 종방향 진동과 횡방향 진동의 발산현상을 볼 수 있었다. 특히 가속도가 0이 되는 지점에서는 속도가 일정하게 되며, 이때는 횡방향 진동의 발산이 둔화되는 현상을 보였다. 가속도가 0이 되는 지점은 축방향으로 가해지는 힘이 일정하게 유지되는 지점이다. 이로부터 가속도가 발생하지 않도록 힘을 가하면 횡방향 진동을 억제할 수 있음을 알 수 있다.

## 참고문헌

- (1) Tabarrok, B., Leech, C. M. and Kim, Y. I., 1974, "On the Dynamics of an Axially Moving Beam," Journal of Franklin Institute, Vol. 297, No. 3, pp. 201~220.
- (2) Barakat, R., 1967, "Transverse Vibrations of a Moving Thin Rod," Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 43, No. 3, pp. 533~539.
- (3) Buffinton, K. W. and Thomas, R. K., 1985, "Dynamics of a Beam Moving over Supports," International Journal of Solids and Structures, Vol. 21, No. 7, pp. 617~643
- (4) Matsuzaki, Y., Taki, Y. and Toyama, M., 1995, "Vibration of a Cantilevered Beam during Deployment and Retrieval : Analysis and Experiment," Smart Material Structure, Vol. 4, pp. 334~339
- (5) Fung, R. F., Lu, P. Y., Tseng, C. C., 1998, "Non-Linearly Dynamic Modelling of an Axially Moving Beam with a Tip Mass," Journal of Sound and Vibration, Vol. 218, No. 4, pp. 559~571
- (6) Stylianou, M., Tabarrok, B., 1994, "Finite Element Analysis Of An Axially Moving Beam, Part I: Time Integration," Journal of Sound and Vibration, Vol. 178, No. 4, pp. 433~453