대한기계학회 2001년도 추계학술대회논문집 B pp. 481~486 KSME 01F225

회전원판 유동의 제2형 불안정성 공간증폭에 관한 이론적 연구

이 윤 용* ,이 광 원** ,황 영 규***

A study of the spatial amplification of the Type II instability for the Rotating-disk flow

Yun-Yong Lee*,Kwang-Won Lee**,Young-Kyu Hwang***

Key Words: Kármán boundary-layer flow(Kármán 경계층유동), Hydrodynamic stability(수동력학적 안정성), Rotating disk(회전원판), Moving disturbance wave(이동교란파), Spatial amplification(공간증폭)

Abstract

The hydrodynamic instability of the three-dimensional boundary layer on a rotating disk introduces a periodic modulation of the mean flow in the form of stationary cross flow vortices. Detailed numerical values of the growth rates, neutral curves and other characteristics have been calculated for the Type II-instabilities. Presented are the neutral stability results concerning the two instability modes by solving new linear stability equations reformulated not only by considering whole convective terms but by correcting some errors in the previous stability equations. The present stability results are agree with the previously known ones within reasonable limit. The spatial amplification contours have been calculated for the moving disturbance wave, whose azimuth angle is between ε= -10° and -20° .The transition flow of the moving disturbance wave will be developed at ε= -15° and Re=352 corresponding at the growth rates n = 5.8 from the spatial amplification contours.

기호설명

C : $\cos\varepsilon$

Cp : 파속도, β_R/α_R

D : 특성경계층 두께, $\sqrt{\nu/\omega_D}$

D_1 : 경계층 두께, $(D\cdot r)^{1/2}$

J : 스켈링 인자, [$O(1)$]

r : 무차원반경, $\bar{r}/D$

Re : Reynolds 수, $\Delta\omega\bar{r}D/\nu$

Ro : Rossby 수, $\Delta\omega/\omega_D$=-1 (Kármán유동)

S : $\sin\varepsilon$

z : 무차원 축방향 길이, $\bar{z}/D$

α : $\hat{y}$ 방향 무차원 복소수 교란파수

β_R : $\hat{y}$ 방향 무차원 교란주파수

ξ : $\hat{x}$ 방향 섭동와도방정식

ω_D : 원판의 회전속도

1. 서 론

항공기 익형이나 잠수함, 어뢰등의 선단부 부근에 형성되는 교란유동이나 천이현상은 정체된 와도관의 줄무늬로 나타나고, 이어서 2차 불안정성(secondary instability)을 형성하여 더욱 발전됨

* 성균관대학교 유체역학 연구실
** 성균관대학교 대학원 기계설계학과
*** 성균관대학교 기계공학부

에 따라 난류로 천이되는데 선형안정성, bypass transition, Görtler 불안정성, 직교류 불안정성등과 같은 여러 가지 메카니즘으로 설명할 수 있다. 이러한 메카니즘을 규명하기 위하여 회전원판 주위 유동장을 취급함으로써 적절하게 모사될 수 있다.

정지된 유체속에 무한디스크의 회전으로 인한 정상 축대칭 비압축성유동의 Navier-Stokes 방정식은 1921년 von Kármán에 의해 경계층에서의 상사해가 구해진 이후, 회전유동의 불안정성에 관한 이론과 실험적인 연구가 여러 연구자들에 의해 폭발적으로 수행되어 왔으며, 현재까지도 회전원판을 이용한 안정성, 불안정성 및 천이에 관한 연구등이 활발하게 진행되고 있다.

이러한 연구의 목적은 측정하기에는 너무 작은 불안정성을 규명하고 교란유동에 의한 천이유동을 지연시켜 익형의 항력을 줄일 수 있으며, 그 결과 연료를 절감할 수 있어 저 연료소비의 수송수단을 가능케 한다. 실제로 25% 또는 그 이상의 연료절감을 실현한 연구도 발표된 바 있다.[1]

이동하는 교란파에 대한 설명은 기본유동에 미소한 교란성분을 가정하고 시간과 공간에 관한 증폭이론을 선택하여 선형 안정성 이론으로 해석하고자하는 것이 보편적이며, 선형 안정성 이론은 새로운 주제는 아니며, 다만 그 중요성이 더해 가고 있다.

공간상 교란의 증폭이론은 초기에 분포된 교란으로부터 공간에 따라 성장할 것인가 아니면 감소할 것인가 하는 안정성을 판별하는 것이다. 즉, 교란주파수(β_R)는 실수로 취하고 교란파수(α)는 복소수로 취하여 고유치를 구한다.

2차원 축대칭 유동의 천이점을 예측하는데 가장 넓게 사용되는 도구로써 e^n 방법은 매우 유용하며 선형안정성에 근거하고 있다. 일반적으로 제 1형 불안정성에 대하여 지수값 n이 9를 가지며, Chin과 Litt[2] 의 실험에 의하면 $410 < Re < 590$ 에서 천이유동이 존재한다고 밝혔다.

본 연구에서 재유도된 선형안정성 방정식은 Coriolis 힘과 유선곡률효과를 고려한 회전원판 주위 유동의 안정성에 관한 연구로써 Faller 의 선형안정성 방정식에서 부호오류를 수정하고, (r, θ) 좌표계에서 (x, y) 좌표계로 변환시 교란 미분항을 모두 고려한 시도이다. 또한, 이동하는 교란파의 공간상 증폭곡선도 구하였다.

이동교란파의 공간상 증폭곡선으로부터 방위각 ε=-15° 에서 구한 $e^{5.8}$은 Re≃352에서 천이유동이 발생할 것으로 예측된다.

2. 지배방정식 및 수치해법

2.1 기본유동 방정식

유체는 비압축성이며 균질하고 회전원판의 한쪽면에 무한 영역으로 주어져 있다고 가정한다. Kármán 경계층 유동의 정상 층류 기본유동에 대한 상사방정식은 이미 잘 알려져 있다. 따라서 원판과의 상대 각속도는

$$\Delta\omega = -\omega_D . \tag{1}$$

비정상 상태의 운동량 방정식을 ω_D의 속도로 회전하고 있는 원통 좌표계로 표현하고 가속도항을 회전계와 관성계로 나누어 정리하면 기본유동 방정식이 유도된다. (Faller[3], Hwang과 Lee[4] 참조)
경계조건은

$$F(0) = G(0) = H(0) = 0,$$
$$F(\infty) = 0 \ , \ G(\infty) = 1. \tag{2}$$

경계치문제는 η_∞ = 20-240을 사용하여 구간 [0, η_∞]에서 풀어졌다. 정확한 두 점 경계치 문제를 해석하기 위하여 컴퓨터 코드 COLNEW[5] 가 사용되었다.

2.2 안정성방정식

선형 안정성 이론을 적용하여 기본유동의 속도분포에 각 성분의 미소한 교란항들을 중첩시킨 교란방정식을 유도하고, 이 방정식의 수를 줄이기 위하여 r, θ, z 성분을 ξ, η 로 표현하고, 원통 좌표계의 교란방정식을 직교 좌표계로 좌표변환을 한다. (즉, r 방향은 x 방향, θ 방향은 y 방향, 그리고 z 방향을 회전축으로 하는 와도전달 방정식을 유도하면, Faller[3]와 같이 x, y 방향의 와도 전달 방정식을 얻을 수 있다.) 만약 초기유동을 고려한 경우라면, 기본유동항은 비정

상 상태로 처리해야만 한다.

Fig. 1은 (r, θ)로 부터 (x, y)로 변환한 좌표계이며, $\hat{x}$ 축이 접선방향과 이루는 각은 동일한 평면상에서 방위각 ε 이고, 좌표계 (x, y)에서 δ 만큼 회전한 좌표계($\hat{x}, \hat{y}$)로 변환하면 교란속도 방정식과 안정성방정식이 유도된다. (Faller[3], Hwang과 Lee[4] 참조) 여기서, 새로운 좌표계로 변환하게 되는 이유는 교란의 형태는 불안정이 발생하기 시작하는 위치에서 나선형 교란의 접선방향에 거의 평행하고 원주의 접선방향과 이루는 각을 가지게 된다. 따라서, 교란을 규명하기 위하여 이의 접선방향으로 좌표계를 회전시킨다면 회전원판 평면상의 2 차원적인 접근이 가능하다.

Reynolds 수 Re는 $\bar{r}$ 를 무차원화 하면 $Re=\Delta\omega r/\Omega$가 되어 Kármán 유동의 경우 $Re=-r$이 된다. 그러나 편의상 양(+)의 Re를 사용하여 계산하였다.

교란속도방정식과 마찬가지로 방위각 ε 만큼 회전한 새로운 좌표계 ($\hat{x}$, $\hat{y}$)로 변환하면 안정성방정식을 구할 수 있다. (Faller[3], Hwang과 Lee[4] 참조)

Faller[3]의 방정식에 대해 추가된 항은 방위각이 커짐에 따라 무시할 수 없는 항 '(F_zC+G_zS) x $(uS+vC)$'과 누락항 '$(FS-GC)w_yS$ '이며, 부호 오류항은 '$GC-FS$ ' 이다. 연속 방정식을 교란 유동함수 ϕ 를 사용하여 다음의 식 (3)으로 나타낼 수 있다.

$$w=\frac{\partial\phi}{\partial y}\ ,\quad v=-\frac{\partial\phi}{\partial z}\ ,\quad \xi=\nabla^2\phi\ . \tag{3}$$

교란속도 u 와 유동함수 ϕ 를 식 (4)와 같이 가정하면

$$u(y,z,t)=U(z)\exp i[(\overline{\alpha_R}+i\overline{\alpha_I})y-(\overline{\beta_R}+i\overline{\beta_I})t]\ ,$$
$$\phi(y,z,t)=\Phi(z)\exp i[(\overline{\alpha_R}+i\overline{\alpha_I})y-(\overline{\beta_R}+i\overline{\beta_I})t]\ . \tag{4}$$

x 방향의 교란속도 방정식과 안정성방정식을 구할 수 있다. (Faller[3], Hwang과 Lee[4] 참조)
경계조건은 다음과 같다.

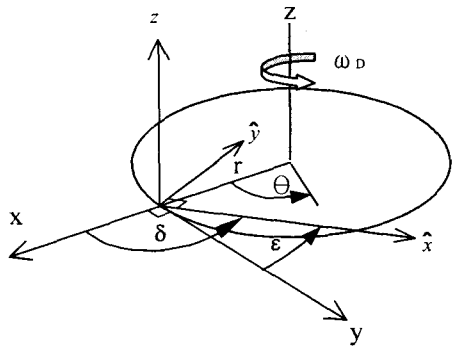

Fig.1 Rotation system

$$U(0)=\Phi(0)=\Phi'(0)=0\ ,$$
$$U'(\infty)=\Phi(\infty)=\Phi''(\infty)=0\ . \tag{5}$$

2.3 수치해석방법

안정성 해석시 단순사격법은 η_∞가 증가하게 되면 적분시 오차누적 및 파급에 의해 계산이 불가능하게 되므로, 두 점 경계치 문제를 정확하게 만족하는 수치해를 구하기 위해 orthogonal collocation 방법[6]을 이용하였으며, 이 기법을 사용한 컴퓨터 코드 COLNEW를 이용하였다.[5]

안정성 방정식과 경계 조건을 실수부와 허수부로 분리하여 12차 1계(order) 방정식으로써 계산한다.

교란의 공간상 증폭곡선을 구하기 위한 고유값 계산시 Re , 방위각 ε과 복소수 주파수 β_R 을 고정하고 복소수 파수 α_R 과 α_I 를 아주 조금씩 변화시키면서 두 점 경계치 문제로 푼다.

또한, 경계 조건이 모두 '0'일 경우 무용해를 얻을 수 있으므로 다음과 같은 수정된 경계 조건식 (6.a, b)를 사용하여 원래의 경계조건 $|\Phi_R'(0)|$ $=|\Phi_I'(0)|=0$을 만족시키기 위해 $|\Phi_R'(0)|+|\Phi_I'(0)|$ $\le 10^{-5}$ 인 조건을 사용하고, $10^{-3}\le J\le 10^{1}$의 범위의 '0'이 아닌 값으로 취한다

$$U_R(0)=U_I(0)=\Phi_R(0)=\Phi_I(0)=0,$$
$$\Phi_R'''(0)=\Phi_I'''(0)=J\ . \tag{6.a}$$
$$U_R'(\infty)=U_I'(\infty)=\Phi_R(\infty)=\Phi_I(\infty)=0,$$
$$\Phi_R''(\infty)=\Phi_I''(\infty)=0\ . \tag{6.b}$$

3. 결과 및 고찰

교란유동의 증폭과정을 규명하기 위하여는 중립안정곡선상에서 충분히 유동의 안정성을 해석할 수 있어야 한다. Kármán 경계층(Ro=-1)의 선형 안정성 방정식유도시 Faller의 안정성 방정식에서 부호 오류를 수정하고, (r,θ) 좌표계에서 (x,y) 좌표계로 변환시 r 에 의한 교란 미분항을 대개 무시하는데 반해 모두 고려함으로써 새로운 안정성방정식을 제시하였으며, 안정성계산을 재시도 하였고 충분한 설명이 있어왔다[4,7].

제 1형 및 제 2형 불안정성에 해당하는 고유값들은 기존연구자의 안정성방정식에서 부호 오류항을 수정하고 2점 경계치 문제로 정확히 계산하였다. 여기서, 주목할 점은 Faller[3]가 얻은 형태의 선형 안정성 방정식을 계산해본 결과 대류항을 무시한 결과의 차이도 나타나며, 수치계산의 방법에서도 차이가 나타난다는 것이었다[7].

안정성 평면의 내부는 교란유동이 불안정하게 되는 조건을 나타내며, 본 연구자들의 해석결과 Re=1200 부근에서 파수 α_R =0.747의 값으로 한정된다.

제 1형과 제 2형 불안정성에 해당하는 중립안정곡선은 Hwang과 Lee[4] 에 의해 논의되었으며, ε =13.2° 이하의 작은 각도에서 정체된 교란을 예측하였다.

중립안정평면에서 해석된 결과는 (Re,B)-평면으로 표현하면

$$B = \beta_R Re^{1/2} = \frac{2\pi f}{\omega_D} \qquad (7)$$

여기서, B는 r 과 무관하며, 오직 실제적인 주파수 f 에 비례하는 등 주파수선이다.

이동하는 교란파의 공간상 증폭에 관한 성장률을 계산한 결과로써 ε =-10° , -15° , -20° 에서 교란유동의 증폭곡선은 Fig. 2 와 Fig. 3 에 도시하고 있다. 여기서, 등 주파수선(Re,B)-평면은 Fig. 2 이고,파수(Re, α_R)-평면은 Fig. 3 이다.

증폭선도에서 주목할 점은 Re 수가 증가할수

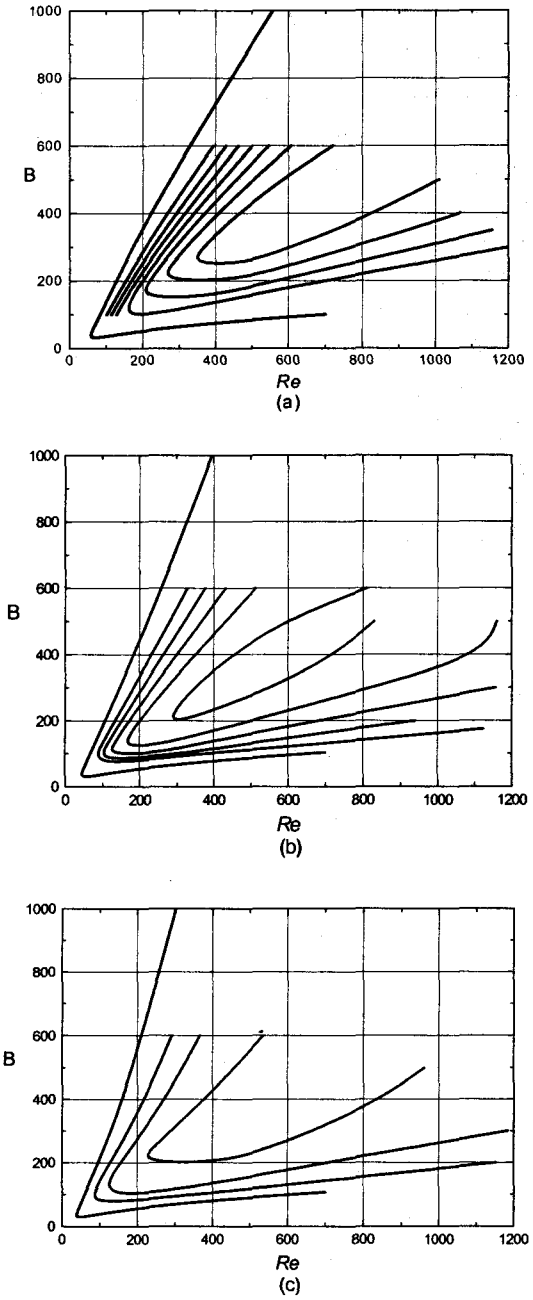

Fig.2 Spatial amplification contours for (a) ε =-10° (b) ε =-15° (c) ε = -20° in the (Re,B)-planes

록 주어진 방위각 ε 에서 가장 증폭이 잘 될 것으로 예측되는 임계 주파수(B^*)선은 양의 기울기를 가지며, 방위각의 변화에 따른 기울기의 차이가 뚜렷하지 않다. 즉,이동하는 교란파에서 Re수가 증가함에 따라 B^*의 값은 증가해 간다.즉,중심으로부터 멀어질수록 파의 크기가 증가할 수 있다.

공간상의 교란 증폭 문제인 경우 교란증폭을 의미하는 α_I 가 일정한 교란의 주파수 B(즉, $\beta_R Re^{1/2}$)에 대해 원판의 중심으로부터 반경방향으로의 거리 r(즉, Re수)에 따라 변한다고 보고 그 증폭 계수 A는 다음과 같이 적분하여 A의 값이 일정한 교란의 증폭 곡선들을 구하였다.

$$A = -\int_{Re_0}^{Re} \frac{\alpha_I}{D_1} dRe \qquad (8)$$

여기서, Re_0는 중립안정곡선상의 B에 대응하는 지점의 값이고 $D_1 = (D \cdot r)^{1/2}$이며 실제 전체 증폭률은 e^A 이다.

4. 결론

본 연구에서는 Kármán 경계층에 대해 새롭게 유도된 유동 안정성방정식들을, 고유값 두 점 경계조건들을 정확히 만족시키는 수치해법으로 부터 선행연구자의 방법과 비교하여 좀 더 넓은 범위에서 수행하였다. 또한, 중립안정성 해석결과를 바탕으로 이동하는 교란파의 공간상 증폭곡선들을 구하고 정체된 교란파의 특성을 규명하였으며, 다음과 같은 중요한 사항들을 얻을 수 있었다.

(1) 중립안정성 해석 결과 교란의 증폭이 시작되는 임계 Re 수의 값이 기존의 결과보다 더 작은 임계 Re 수에서 일어날 수 있고, 파수 α_R 과 교란 방위각 ε 은 정성적으로 기존하는 여러 연구자들의 실험결과와 잘 일치한다고 볼 수 있으며, 이동하는 교란파의 방위각은 Faller[3]의 수조 실험에서 관찰된 제 2형 유동불안정성과 비교할 때 ε =-15° 부근에서 정량적으로 일치하는 유동조건을 얻게 되었다.

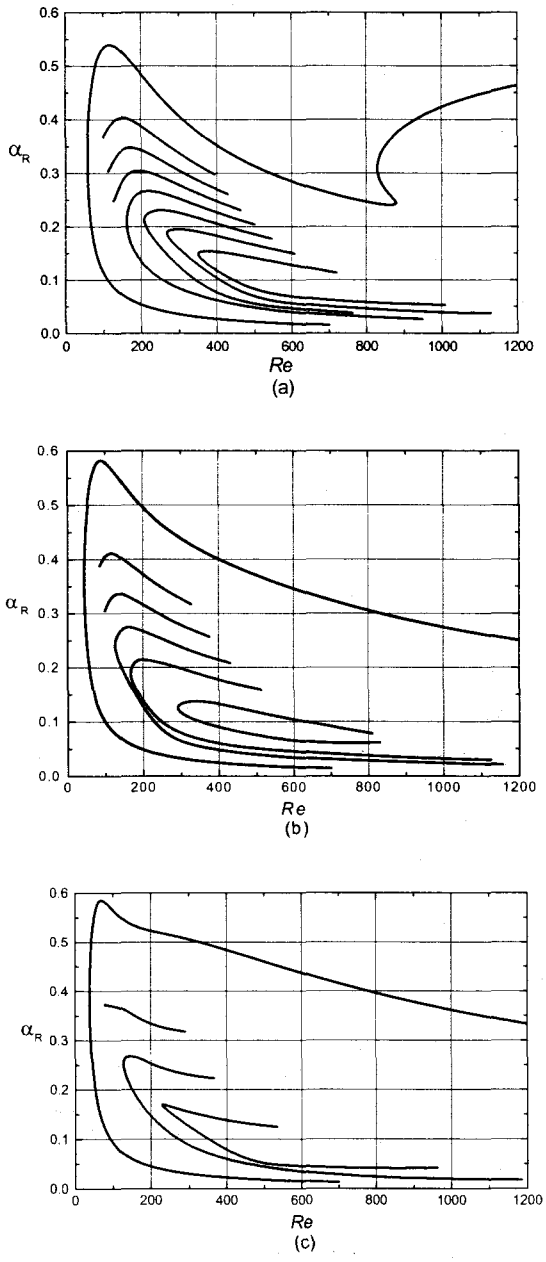

Fig.3 Spatial amplification contours for (a) ε =-10° (b) ε =-15° (c) ε = -20° in the (Re, α_R)-planes

(2) 교란의 공간상 증폭곡선에 따르면 방위각 ε=-15° 일때 형성된 줄무늬 와도관의 경우 e^n이 5.8이 되는 위치인 Re≃352에서 천이유동을 관측할 수 있을 것으로 예측된다.
(3) 교란의 공간상 증폭곡선에서 가장 증폭이 잘 될 수 있는 임계 주파수(B^*)선은 양의 기울기를 가지며, 방위각이 감소해 감에 따라 주파수의 크기는 작아지는 경향이 있다.

후기

이 논문은 2001년도 두뇌한국21사업 핵심분야 사업비에 의하여 지원되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

(1) Saric, W. S., 1994, "Physical Description of Boundary-Layer Transition : Experimental Evidence," AGARP Rep. No. 793.
(2) Chin, D. T. and Litt, M., 1972, "An Electro-chemical Study of Flow Instability on a Rotating Disk," J. Fluid Mech., Vol.54, pp. 613-625
(3) Faller, A. J., 1991, "Instability and Transition of Disturbed Flow over a Rotating Disk," J. Fluid Mech., Vol. 230, pp. 245-269.
(4) Hwang, Y.-K. and Lee, Y.-Y., 2000, "Theoretical Flow Instability of the Kármán Boundary Layer," KSME International J., Vol. 14, No. 3, pp. 358-368.
(5) Bader, G. and Ascher, U., 1985, "A New Basis Implementation for a Mixed Order Boundary O.D.E. Solver," Tech. Rep. 85-11, Dept. of Computer Science, U. of British Columbia, Vancouver, Canada.
(6) Hwang, Y.-K., 1996, "Stability of Buoyancy-Induced Flows Adjacent to a Vertical Isothermal Surface in Cold Pure Water," KSME Journal, Vol. 10, No. 4, pp. 498-508.
(7) 황영규, 이윤용, 2000, "Kármán 경계층 유동의 안정성에 관한 연구," 설비공학 논문집 제 12권 제8호, pp. 771-781.
(8) Wilkinson, S. P. and Malik, M. R., 1983, "Stability Experiments in the Flow over a Rotating Disk," J. AIAA, 23, pp. 588-595.