

# 박막이 부착된 채널내의 2차원 층류 유동장에 대한 연구

윤석현\*·정재택\*\*

## Study on Two-Dimensional Laminar Flow Through a Finned Channel

Seok-Hyun Yoon, Jae-Tack Jeong

**Key Words:** Stokes Flow(스토크스유동), Laminar Flow(층류유동), FDM(유한차분법), Separated Flow(박리유동), Channel Flow(채널유동)

### Abstract

A two-dimensional laminar flow through a channel, on which a couple of symmetric vertical fins are attached, is investigated. The stokes flow for this channel flow is investigated analytically and laminar flow numerically. For analytic solution, the method of eigen function expansion and collocation method are employed. For numerical solution, finite difference method(FDM) is used to obtain vorticity and stream function. From the results, streamline patterns are shown and the pressure drop due to the attached fins is calculated, which depends on the length of fins and Reynolds number. While  $Re < Re_c$ , streamline pattern is symmetric, a pair of additional asymmetric solutions appear for  $Re > Re_c$ , where the critical Reynolds number  $Re_c$  depends on the length of the fin.

기호설명

$\nu$  kinematic viscosity

$Re$  Reynolds number. [  $Re = \frac{U_m H}{\nu}$  ]

$U_m$  inlet average velocity.

$u$  dimensionless velocity component parallel to the x-axis

$v$  dimensionless velocity component parallel to the y-axis

$x, y$  cartesian coordinates

$t$  time

$p$  pressure

$\Omega$  vorticity

$\psi$  stream Function

$H$  channel half-width

$b$  height of fin

$Max$  maximum value

### 1. 서론

박막이 부착된 채널 내 유체 유동은 오리피스, 유량 조절 밸브, 미소 핀에 의한 열전달 분야 등에서 쉽게 찾아 볼 수 있으며, 생체 역학 분야에서는 혈관내의 관막주위 등의 혈류 유동에서 나타난다.

상하 대칭형 박막이 부착된 채널내의 2차원 유동은 원관내의 오리피스를 통과하는 유동에 대한 2차원 상사 유동으로 볼 수 있으며, 이러한 유동

\* 전남대학교 대학원 기계공학과  
 \*\* 전남대학교 자동차공학부

특성은 박막의 길이와 레이놀즈 수의 변화에 따라 파악해야 한다.

Wang<sup>1)</sup>은 이론해석으로 여러 개의 상하 대칭인 핀과 엇갈린 핀이 부착된 2차원 채널내의 Stokes 유동을 직접적인 수치적분보다 더욱 간단하게 계산할 수 있는 고유함수 전개와 Point match 방법을 이용하여 유선과 압력 등을 구하였다. 그 결과 핀의 전후 면에서 유선은 대칭으로 형성됨을 보였다.

Moon<sup>2)</sup> 등은 반원 및 타원 장애물을 갖는 덕트 내의 장애물을 레이놀즈 수  $100 < Re < 400$  범위에서 유한 요소법에 의한 수치해석으로 유선, 압력 분포 속도 등을 구하여 가시화 실험으로 검증하였다. 그 결과 동일한 형상의 장애물에서 레이놀즈 수가 증가함에 따라 박리점은 장애물 상부에 가깝게 나타나고 재부착점의 거리 길어졌으며 동일한 높이에서 장애물의 폭이 클수록 박리에서부터 재부착점의 거리도 짧고 박리점의 와류 크기 도 작아짐을 보였다.

본 연구에서는 Fig.1 같이 상하 대칭 박막이 수직으로 부착된 채널내의 2차원 층류 유동을 고찰하고자 한다. 주 해석 영역은 유동변화가 심한 박막 주위영역을 선택하였으며, 채널의 유동은 층류, 정상상태로 가정하여 유동함수, 압력 등을 계산함으로써 레이놀즈 수와 박막의 길이 변화에 따른 유동특성을 규명하고자 한다. 연구범위는 점성이 관성에 비해 매우 큰 스토크스(Stokes) 유동을 이론해석하고,  $Re < 500$  이하의 층류 영역내의 유동을 수치해석으로 고찰하였다.

실제 혈관의 판막이나 복잡한 형상을 가진 박막 모양의 장애물에서는 동일한 조건을 부여하여 유동장을 해석하기가 복잡하므로 Fig.1과 같이 형상을 단순화 한 모델에 대하여 유동해석을 수행한다.

## 2. 연구모델 및 경계조건

본 연구에서 유체의 모든 물성치는 일정하고 채널에 부착된 박막의 두께는 매우 얇다고 가정하였으며 대칭형 박막이 부착된 채널내의 비압축성 2차원 층류 유동장을 Fig.1과 같이 2차원 직교 좌표계로 나타내었다.

입구와 출구에서의 유동은 완전 발달된 2차원 포아제(Poiseuille) 유동으로 평균속도는  $U_m$ 이다.

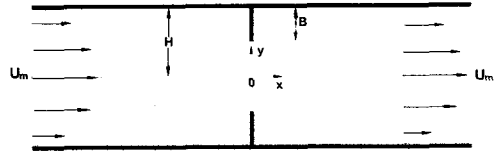


Fig. 1 Definition sketch of flow field

해석의 일반성을 부여하고, 시스템을 지배하는 변수의 영향을 정량적으로 고찰하기 위하여 무차원 변수를 다음과 같이 정의한다.

$$x = \frac{x^*}{H}, \quad y = \frac{y^*}{H}, \quad u = \frac{u^*}{U_m}, \quad v = \frac{v^*}{U_m},$$

$$p = \frac{p^*}{\rho U_m^2}, \quad \Psi = \frac{\Psi^*}{U_m H},$$

여기서  $H$ 은 원점에서 평판까지 거리를 나타내고  $U_m$ 는 입구의 평균유속으로서 각각 무차원 기준 값으로 사용하였다.  $u, v$ 는 각각  $x, y$ 방향의 무차원 속도성분이고,  $p$ 는 유동장내의 무차원 압력을 나타낸다.

본 유동에 대한 레이놀즈 수는 입구 유동의 평균 유속  $U_m$ 과 채널의 반폭  $H$ 을 사용하여  $Re \equiv U_m H / \nu$ 로 정의하였다.

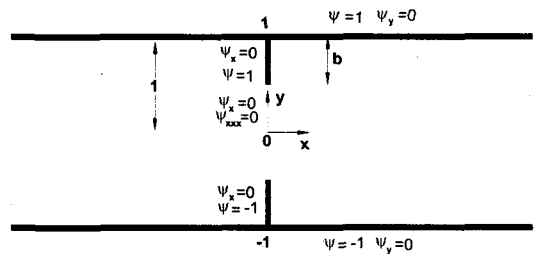


Fig. 2 Non-dimensionalized flow field and boundary conditions

유동함수에 대한 경계조건은 무차원 영역에서 벽면의 착벽(no-slip)조건을 적용하여 Fig.2와 같이 표현하였다.

박막의 길이 변화에 따라 Stokes 유동을 이론해

석하고 박막의 길이와 레이놀즈 수의 변화에 따라 수치해석을 수행하였다.

### 3. Stokes 유동에 대한 이론 해석

#### 3.1 지배 방정식

레이놀즈 수가  $Re \ll 1$ 이면 Stokes의 근사에 의하여 유동의 지배 방정식은 다음과 같이 biharmonic equation<sup>9)</sup>이 된다.

$$\nabla^4 \psi = 0 \quad (1)$$

경계조건으로는 착벽(no-slip)조건에 의해 상하 평판은  $\psi = \pm 1$ ,  $\psi_y = 0$  이며, 상하 박막은  $\psi = \pm 1$ ,  $\psi_x = 0$ 이고, 입구와 출구는 포아제(Poiseuille) 유동이다.

또 Stokes 유동에 의해 유동함수가 유동단면에 연속이고 좌우 대칭인 부분의 경계조건은  $\psi_x = 0$ ,  $\psi_{xxx} = 0$  이다.

#### 3.2 유동장 계산

Fig.1과 같은 형상의 대칭성을 고려하여 유동함수  $\psi(x, y)$ 는 다음과 같이 놓을 수 있다.

$$\psi(x, y) = \frac{3y - y^3}{2} + \int_0^\infty A(\xi) \cos \xi x S(\xi, y) d\xi + \sum_{n=1}^\infty B_n \sin n \pi y T_n(x) \quad (2)$$

여기에서 오른쪽 첫째 항은 2차원 채널 내의 포아제(Poiseuille) 유동이다.

식(2)은 식(1)에 대입하면  $S(\xi, y)$ 와  $T_n(x)$ 는 각각 식(3), (4)을 만족해야 한다.

$$\frac{d^4 S}{dy^4} - 2\xi^2 \frac{d^2 S}{dy^2} + \xi^4 S = 0 \quad (3)$$

$$\frac{d^4 T}{dx^4} - 2n^2 \pi^2 \frac{d^2 T}{dx^2} + n^4 \pi^4 T = 0 \quad (4)$$

경계조건  $\psi(x, \pm 1) = \pm 1$ 과  $\psi_x(0, y) = 0$ 를 적용하면  $S(\xi, 1) = 0$ ,  $T_n(0) = 0$  이므로  $S(\xi, y)$ 와  $T_n(x)$ 는 각각 식(5), (6)으로 된다.

$$S(\xi, y) = \cosh \xi \sinh \xi y - y \sinh \xi \cosh \xi y \quad (5)$$

$$T_n(x) = e^{-n\pi x} (n\pi x + 1) \quad (6)$$

여기서 식(6)의 경우에서  $x \rightarrow \infty$ 일 때  $T_n(x)$ 가

발산하지 않는 조건을 부가하였다.

그러면 식(2)은 일부 경계조건  $\psi(x, \pm 1) = \pm 1$ ,  $\psi_x(0, y) = 0$ 을 만족하게 된다.

다음 경계조건  $\psi_y(x, 1) = 0$ 을 적용하면

$$\int_0^\infty A(\xi) S_y(\xi, 1) \cos \xi x d\xi + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n n\pi B_n T_n(x) = 0 \quad (x \geq 0) \quad (7)$$

위 식에서 Residue 정리를 이용하여 적분 항을 소거 정리하면

$$A(\xi) S_y(\xi, 1) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} 2n B_n J_{mn} \quad (8)$$

여기에서  $J_{mn}$ 은

$$J_{mn} = \int_0^\infty e^{-n\pi x} (n\pi x + 1) \cos \xi x dx = \frac{2n^3 \pi^3}{(n^2 \pi^2 + \xi^2)^2} \text{ 이다.}$$

식(5), (6), (8)을 식(2)에 대입하면 유동함수

$\psi(x, y)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\psi(x, y) = \frac{3y - y^3}{2} - \sum_{n=1}^\infty (-1)^n 4n^4 \pi^4 B_n \times \text{Im} \sum_{m=1}^\infty \frac{\cosh \xi_m \sinh \xi_m y - y \sinh \xi_m \cosh \xi_m y}{(\xi_m^2 + n^2 \pi^2)^2 \sinh^2 \xi_m} \times e^{i\xi_m x} \quad (9)$$

여기서  $\xi_m$ 은  $\xi - \sinh \xi \cosh \xi = 0$ 의 1상한 근중  $m$ 번째 근이다.

식(9) 내의 미지수  $B_n$ 은 아래 경계 조건을 만족하도록 결정되어야 한다.

$$\psi(0, y) = 1, \quad 1 - b \leq y \leq 1 \quad (10)$$

$$\psi_{xxx}(0, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq 1 - b \quad (11)$$

이때  $B_n$  ( $n=1, 2, \dots, M$ )은  $0 < y < 1$  사이에 N개의 유한한 점에서 경계조건(10), (11)을 식(9)에 대입하여 유도한 두 개의 식으로 N개의 미지수  $B_n$  ( $n=1, 2, \dots, M$ )을 구할 수 있다.

따라서, 유동함수를 나타내는 식(9) 내의  $B_n$ 을 구하였으므로 유동함수  $\psi(x, y)$ 을 모두 영역에서 계산할 수 있다.

### 3.3 압력강하

이 경우, 압력은  $\mu U/H$ 에 의해 무차원화되며

$$p_x = \nabla^2 \psi_y, \quad p_y = -\nabla^2 \psi_x \quad (12)$$

방정식(9)을 사용하여 식(12)을 적분하면 다음과 같은 압력 분포  $p(x, y)$ 을 구할 수 있다.

$$p(x, y) = -3x - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 8n^4 \pi^4 B_n \times \\ Re \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi_m \cosh \xi_m y}{(\xi_m^2 + n^2 \pi^2)^2 \sinh \xi_m} e^{i\xi_m x} - c \quad (13)$$

여기서  $c$ 는 원점에서의 압력이 0으로 되도록 취한다.

식(13)의 우변 첫항은 편이 없는 경우의 포아제 유동에서의 선형적인 압력강하를 나타내고 있다.

## 4. 층류 유동에 대한 수치해석

### 4.1 기본 방정식 및 경계조건

지배방정식 Navier - Stokes 방정식을 Vorticity - Stream Function 방정식<sup>4)</sup>으로 변환하여 무차원화한 최종적인 지배 방정식은 다음과 같다.

● 와도 수송(Vorticity transport) 방정식

• Stokes 유동( $Re \ll 1$ )의 경우:

$$\Omega_{xx} + \Omega_{yy} = 0 \quad (14)$$

• 층류(Laminar) 유동의 경우:

$$\Omega_t + u\Omega_x + v\Omega_y = \frac{1}{Re} (\Omega_{xx} + \Omega_{yy}) \quad (15)$$

● 유동함수(Stream function) 방정식

$$\Psi_{xx} + \Psi_{yy} = -\Omega \quad (16)$$

● 속도와 유동함수 관계식

$$u = \Psi_y, \quad v = -\Psi_x \quad (17)$$

그리고 무차원 경계조건은 다음과 같다.

$$u=0, v=0, \Psi=1 \quad (\text{위쪽 평판, 박막})$$

$$u=0, v=0, \Psi=-1 \quad (\text{아래쪽 평판, 박막})$$

$$\Psi = \frac{3y-y^3}{2}, u = \Psi_y, \Omega = 3y, v=0 \quad (\text{입구})$$

$$\Psi_x = 0, \Omega_x = 0 \quad (\text{출구})$$

지배방정식 와도 수송 방정식을 이용하여 수치해석 하기 위해서는 와도 경계조건이 필요하다. 그러므로 와도 경계조건은 유동함수와와의 관계식

(16)을 이용하여 유동함수로 된 식을 Taylor-series 전개하여 차분화된다. 이때 상하평판에서  $(\partial^2 \Psi / \partial^2 x) = 0$ , 상하박막에서  $(\partial^2 \Psi / \partial^2 y) = 0$  임을 이용하였다.

### 4.2 수치계산 방법

수치계산은 유동함수-와도법을 적용하여 유한 차분화 (FDM) 하였다.

스토크스 유동에서는 식(14)을 이용하여 계산하였으며 층류유동에서는 식(15)으로 비정상항이 포함된 와도 수송 방정식을 FTCS 방법으로 계산하여 그 결과가 정상상태로 도달할 때까지 반복계산(iteration)을 하였다. 해석영역의 격자 수는 x방향으로 1000개, y방향으로 100개로 하였는데, 이는 여러 가지 격자 수에 대한 수치계산의 결과 결정한 것이다. 본 해석모델에서 격자간의 간격 0.02로 하고 해의 수렴판정은 상대적인 차이의 최대치가 주어진 값보다 작을 때 해를 정상상태로 수렴했다고 간주한다.

$$\text{Max} |(\Psi_{i,j}^{n+1} - \Psi_{i,j}^n) / \Psi_{i,j}^{n+1}| < \epsilon \quad (18)$$

계산에 있어서는 대개  $\epsilon = 10^{-6}$  을 수렴 조건으로 하였다.

## 5. 결과 및 고찰

박막이 부착된 채널내의 2차원 유동장에 관하여 Stokes 유동을 이론해석하고 레이놀즈 수의 변화에 따라 수치해석으로 고찰하였다.

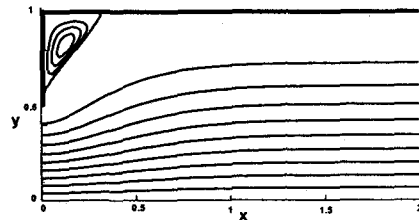


Fig.3 Streamline for Stokes flow( $Re=0, b=0.5$ )

Fig.3에 박막의 길이가 0.5인 경우의 Stokes 유동에 대한 이론해로부터 유선(Streamline)을 도시하였다. 유동 모양은 상하 대칭일 뿐만 아

니라 좌우 대칭이며 박막 전후에 같은 크기의 에디(eddy)가 부착됨을 알 수 있다. 실제로  $Re=0$ 으로 놓고 수치해석 한 결과와 일치함을 확인 할 수 있었다.

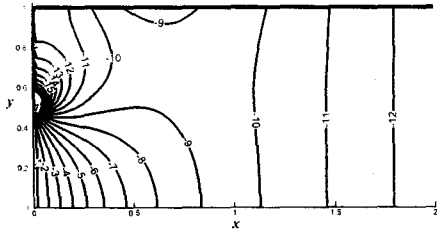


Fig. 4 Pressure distribution( $Re=0$ ,  $b=0.5$ )

Fig.4는 박막이 0.5일 때의 Stokes 유동의 압력 분포를 나타낸다. 박막 끝에서 압력 강하가 매우 크게 나타나는데 이는 박막 끝의 점점 부근에서의 큰 속도 구배에 기인한다.

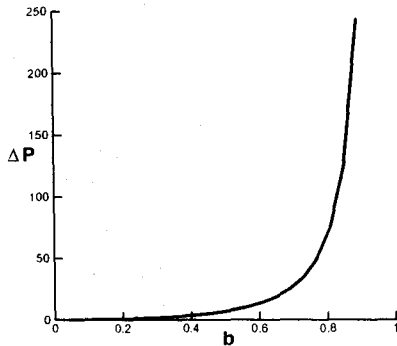


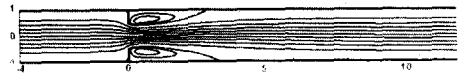
Fig. 5 Pressure drop due to the fins

스토크스 유동에서 박막에 의한 추가적인 압력 강하는 식(13)의  $c$  값의 2배이며 Fig.5에 압력강하를 박막의 길이에 따라 나타내었다. 박막의 길이가 0.5이상에서 압력강하가 크게 발생되며  $b \rightarrow 1$ 에 접근함에 따라  $\Delta p = \infty$ 가 됨을 알 수 있다.

a)  $Re=30$



(b)  $Re=40$



(c)  $Re=50$



(d)  $Re=60$



Fig. 6 Streamlines various Reynolds numbers for  $b=0.5$

Fig. 6에 레이놀즈 수가 점차로 증가할 때 유선의 변화를 나타내었다. 그림에서 보듯이 레이놀즈 수가 어떤 임계값 이상에서 비대칭 에디(eddy)가 존재함을 알 수 있다. 이는 비정상 해에서 흔히 발견되는 비대칭 bifurcation (symmetry-breaking bifurcation, "Conanda 효과")과 대응되는 2차원 유동의 현상이라고 할 수 있다.

이와 같은 비대칭성 비선형인 해는 복수해 (multiple solution)를 갖는 하나의 예라 할수 있다.

(a) symmetric solution



(b) asymmetric solution



(c) asymmetric solution



Fig. 7 Streamline patterns for  $Re=100$ ,  $b=0.5$

Fig.7에  $Re=100$ ,  $b=0.5$ 인 경우의 여러 가지 형태들의 유선을 나타내었다. 이 경우 유동 장에서의 해가 3개 존재한다는 것을 수치해석으로 확인하였으며 그 결과를 도시화하였다. 수치해석 결과 (a)는 대칭의 해이고 (b),(c)는 서

로 상하가 바뀐 비대칭의 해이다. 수치해석결과 위의 3개의 해는 초기값(initial guess)을 어떻게 주느냐에 따라 결정됨을 알 수 있었다.

이와 같이 동일한 경계조건에 여러 해가 있을 수 있는 것은 유체유동을 지배하는 Navier-Stokes 방정식이 비선형성(nonlinear)에 기인한다고 생각된다.

여러 해가 실제 유동에서 일어날 수 있는가를 알기 위해서는 각각의 해에 대한 안정성을 검토하여야 할 것이다. 이러한 유사한 유동에 대하여 Fig.7 (a)과 같은 상하 대칭 유동이 불안정하다고 보고된바 있다.<sup>5,7)</sup> 본 문제의 유동에 대한 수치해석 결과와 같이 나타난 비대칭의 해, 즉 Coanda 효과가 발생하는 현상을 실험적으로 규명하는 것은 흥미로운 과제로 남아 있다.

## 6. 결론

본 논문에서는 상하대칭 박막이 수직으로 부착된 채널내의 Stokes 유동을 이론적으로, 층류유동을 수치적으로 고찰하였으며 다음과 같은 몇 가지 결론을 얻었다.

Stokes 유동의 경우에는 biharmonic equation의 해를 고유함수 전개와 Point match 방법을 사용하여 모든 영역에서의 유동장을 계산할 수 있는 유동함수를 찾을 수 있으며 유선과 압력을 도시화할 수 있다. 또  $Re=0$  일 때의 수치해석 결과와 비교적 잘 일치하였다. 박막에 의한 부가적인 압력강하를 박막의 길이에 따라 고찰하였다.

층류유동의 경우에서 수치해석으로 속도장을 계산한 결과 임계 Reynolds 수 이상에서 3개의 유동 형태가 존재한다는 것을 알 수 있었다. 즉 상하 대칭과 상하 비대칭이 존재하였다. 유동의 박리는 날카로운 박막의 끝에서 발생하고 낮은 레이놀즈 수에서는 상하 대칭인 유일해가 존재하는 반면, 높은 레이놀즈 수에서는 상하 대칭성이 깨어지는 비대칭 해 즉, 코안다(Coanda) 효과가 확인되었다<sup>7)</sup>. 또 박막의 전면에서 발생한 에디(eddy)는 Stokes 유동에서 전후면 대칭으로 나타나다가 레이놀즈 수가 증가함에 따라 그 크기가

급격히 감소함을 알 수 있었다.

박막이 부착된 채널의 형상은 오리피스, 열 교환기, 난류증폭기(turbulence enhancer), 와류발생기(eddy generator), 혈관 내 판막주위의 혈류 유동장에 적용할 수 있으며 이런 형상을 난류 영역까지 확대 할 경우 그에 관한 기초자료로서 많은 도움이 되리라 생각한다.

## 후기

이 논문은 2001년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

## 참고문헌

- (1) C. Y. Wang, 1997, Stokes Flow Through a Transversely Finned Channel, ASME. Eng. J., Vol. 14, pp. N. 119-128.
- (2) 문찬, 박진철, 김철, 1994, 장애물을 갖는 덕트 내의 유동가시화 및 수치해석에 관한 해석, 공기 조화 냉동공학 논문집 제 6권 제 3호, pp.218-226
- (3) J. Happel, H. Brenner, 1965, Low Reynolds Number Hydrodynamics with Special Applications to Particulate Media, Prentice-Hall, Inc., pp.59-61.
- (4) K. A Hoffmann, S. T Chiang, 1993, Computational Fluid Dynamics For Engineers Vol I, Engineering Education System, pp. 289-336
- (5) E. Schreck, M. Schafer, 2000, Numerical study of bifurcation in three-dimensional sudden channel expansions, Computer & Fluids 29, pp.583-593.
- (6) N. Alleborn, K. Nandakumar, 1997, Further Contributions on the two-dimensional Flow in a sudden expansion, J. Fluid mech., Vol 330, pp.169-188.
- (7) T. Hawa, Z. Rusak, 2001, Two Dynamics of a Laminar Flow in a Symmetric Channel with a sudden expansion J. Fluid mech., Vol 436, pp.283-320.