

형상 충전 기법을 이용한 자유표면의 비정상 점성 유동장의 유한 요소 해석

김기돈* · 정준호** · 양동열***

Finite Element Analysis of Transient Viscous Flow with Free Surface using Filling Pattern Technique

Ki-Don Kim, Jun-Ho Jeong and Dong-Yol Yang

Key Words : Free Surface(자유표면), Transient Viscous Flow(비정상 점성 유동), Finite Element Method(유한요소법), Triangular Control Volume(삼각형 검사 체적)

Abstract

The filling pattern technique based on the finite element method and Eulerian mesh advancement approach has been developed to analyze incompressible transient viscous flow with free surfaces. The governing equation for flow analysis is Navier-Stokes equation including inertia and gravity effects. The penalty and predictor-corrector methods are used effectively for finite element formulation. The flow front surface and the volume inflow rate are calculated using the filling pattern technique to select an adequate pattern among four filling patterns at each triangular control volume. Using the proposed numerical technique, the collapse of a dam has been analyzed to predict flow phenomenon of fluid and the predicted front positions versus time have been compared with the reported experimental result.

1. 서론

고체나 유체 유동의 물리적인 현상을 해석하기 위하여 비정상 유동장의 자유표면에 관한 연구는 과거에서부터 많이 이루어져 왔으며, 최근 들어 금속 재료를 사용한 주조, 단조, 압연, 고분자 재료를 이용한 사출성형, 압축성형 등의 재료 가공공정의 수치모사에 대한 관심이 높아지면서 이 분야에 대한 연구가 더욱 활발하게 진행되고 있다.

자유표면, 즉 유동선단이 존재하는 유동장을 해석하는 방법에는 초기 격자의 절점이 이동하면서 해석하는 라그랑지안(Lagrangian) 격자기법[1]과 움직이지 않는 오일러리안(Eulerian) 격자기법[2], 그리고 라그랑지안과 오일러리안 기법을 접목시킨 ALE 기법[4]으로 나눌 수 가 있는데, 일반적으로

널리 사용되고 있는 라그랑지안과 오일러리안 격자 기법에 대하여 보다 구체적으로 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 라그랑지안 격자기법에 의한 해석은 유동선단, 속도장, 압력장 등의 해석결과가 정확한 대신 격자의 변형이 많이 일어날 때마다 격자 재구성 과정을 반복해야 하기 때문에 복잡한 경향을 가진 다이(die)에서는 충전해석이 용이하지 못하다. 이에 반하여 오일러리안 격자기법은 초기 격자가 형상의 변형 없이 그대로 사용되거나 선택적으로 사용되기 때문에 기하학적으로 복잡한 다이 형상에서의 해석이 용이한 반면, 정확한 유동선단 예측과 자유 경계면에서의 경계조건 처리에 어려움이 따른다. 최근의 연구 경향을 보면 라그랑지안 격자기법보다 오일러리안 격자기법에 보다 더 활발한 연구 활동이 진행되고 있다. 오일러리안 격자 기법의 대표적인 방법은 Harlow 와 Welch 에 의한 MAC[2]법과 Hirt 와 Nichols 에 의한 VOF[3]법이 있다. 이 기법은 FDM 기법을 근간으로 발전되어져 지금까지도 자유 유동장 처리기법의 기본 개념을 제공하고 있다. Mac 은 단위체

* 한국과학기술원 대학원 기계공학과

** Dept. of Mech. Eng., UIUC

*** 한국과학기술원 기계공학과

(cell)들을 가로질러 이동하는 인자(maker)들을 따라가며 유동장을 해석하는 방법으로 유체의 유동 특성을 잘 표현하고 있으나 유동의 진전에 있어 비압축성 조건을 만족시키기 어렵다는 단점이 있다. VOF 법은 비압축성 연속방정식을 근간으로 한 VOF(Volume of Fluid)를 각 단위체 마다 계산하고 계산된 VOF 를 가지고 유동장을 정의하는 방법이다. 이 기법은 FEM 분야에서도 응용 발전되어 고분자 사출성형 공정에서는 Broyer[4] 등에 의하여 고분자의 충전해석기법이 개발되었고, 금속 주조 공정에 있어서는 Dhatt[5] 등에 의하여 용융금속의 충전해석을 위한 연구 결과가 발표된 사례가 있다.

앞에서도 언급한 바와 같이 오일러리안 격자기법은 많은 장점을 가지고 있는 반면, 유동선단과 검사체적(control volume)에서의 유체의 유출입량의 계산과 정확한 유동선단 형상의 예측, 부분충전 검사체적에서의 자유단 경계조건 처리에 많은 어려움이 따른다. 또한, 유동장을 계산하기 위한 격자와 검사체적과는 서로 직접적으로 연계되어 있기 때문에, 유동장의 수치해석 결과의 정확도를 높이기 위한 보다 미세한 크기의 격자사용은 격자 총 수의 증가와 더불어 검사체적의 증가를 가져와 해석에 소요되는 시간이 기하급수적으로 커지는 결과를 낳게 된다. 이러한 문제점을 해결하고자 일반적인 사각형 검사체적에 적용되는 형상 충전기법(filling pattern technique)을 Jeong 과 Yang[6]이 제안하여 보다 정확한 유동선단 및 유체 유동의 물리적 현상을 예측하였다.

본 연구에서는 이와 같은 형상 충전 기법을 삼각형의 검사체적에 적용하는 방법을 제안하여 유동 선단부를 포함한 유동장 전체에 있어서 삼각형 격자에서의 수치해석 결과의 신뢰도를 높이고자 한다.

2. 본 론

2.1 지배방정식

비정상 비압축성 점성 유동장 해석을 위한 지배방정식은 가속도와 중력장을 모두 고려한 Navier-Stokes 방정식과 연속 방정식을 사용하였다.

연속(continuity)방정식:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

Navier-Stokes 방정식:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}(u) + \rho f_i \text{ in } \Omega \quad (2)$$

여기서, $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij}$,

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2$$

그리고 $t, u_i, p, \rho, \mu, f_i$ 는 각각 시간(time), x_i 방향속도(velocity) 성분, 압력(pressure), 밀도(density), 점도(viscosity), 내력(internal force)이며 σ_{ij} 는 응력(stress), d_{ij} 는 변형을 텐서(strain tensor)이다.

자유표면 $\partial\Omega_s$ 에서는 다음과 같은 응력에 대한 평형방정식이 적용된다.

$$\begin{aligned} \sigma_n &= -p + 2\mu_{air} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 \text{ on } \partial\Omega_s \\ \tau &= \mu_{air} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_t} + \frac{\partial u_t}{\partial x_n} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서 $\sigma_n, \tau, \mu_{air}$ 는 각각 수직응력(normal stress), 전단응력(shear stress), 공기의 점도이다. 첨자 n, t 는 유동선단에서의 수직과 수평 단위 방향 벡터를 의미한다. 유동선단에서 표면장력(surface tension), 점성응력(viscous stress), 공기압은 고려하지 않는다. 금형 접촉면 $\partial\Omega_{wall}$ 에는 벽면의 전단응력을 고려한 미끄러짐 조건(slip condition)을 적용했으며, 전면 전단응력은 다음과 같이 계산된다.

$$f_t = \rho \frac{|\mu_t| u_t}{C^2} \quad (4)$$

여기서 $C = A \ln y^* E = A \ln y^* + B, A = 2.5,$

$y^* \geq 90$ 이고 u_t 는 벽면에 대한 전단속도성분이며 E 는 벽면주름상수(rugosity coefficient)이다. 본 연구에서는 $B=5.5$ 와 $y^*=100$ 을 사용했다.

벽면 경계면에 대한 수직 속도 성분 u_{nv} 은 다음과 같이 처리한다.

$$u_{nv} = 0 \text{ on } \partial\Omega_{wall} \quad (5)$$

게이트(gate) 경계면 $\partial\Omega_{inflow}$ 에는 다음과 같은 필수경계조건(essential boundary condition)이 적용된다.

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } \partial\Omega_{inflow} \quad (6)$$

여기서 \bar{u}_i 는 게이트 경계면에 설정된 속도 성분이다. 해석 초기($t=0$)에는 설정된 속도 값 u_i^* 을 전체 영역에 대해 정의되며, 본 연구에서는 $u_i^* = 0$ 이 사용된다.

$$u_i = u_i^* \text{ on } \Omega \text{ at } t = 0 \quad (7)$$

2.2 유한요소수식화

유동장에 대한 지배방정식 (1)과 (2)을 Galerkin 방법과 penalty 방법을 사용해서 약형(weak form)을 만들면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} (\rho \bar{u}_i \bar{u}_i + \rho \mu_{i,j} \bar{u}_i \bar{u}_j + \lambda \mu_{i,j} \bar{u}_{i,j} + 2\mu_{i,j} \bar{u}_{i,j}) d\Omega = \int_{\Omega} \rho f_i \bar{u}_i d\Omega \quad (8)$$

여기서 u_i , \bar{u}_i , λ 는 각각 속도함수, 가중함수, 벌칙(penalty)상수이고 λ 를 포함한 항은 reduced integration 기법에 의해 적분된다. 식(8)의 유한요소 수식화를 위해서 속도함수, 가중함수는 각 요소영역에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$u_k = U_{k\beta} N_{\beta}, \quad \bar{u}_i = \bar{U}_{i\alpha} N_{\alpha} \quad (9)$$

on Ω_e ($\beta = 1, 2, \dots, 8$, $\alpha = 1, 2, \dots, 8$)

여기서 $U_{k\beta}$ 과 $\bar{U}_{i\alpha}$ 는 속도함수와 가중함수 (weighting function)에 대한 절점(node)값, N_{β} 와 N_{α} 는 속도성분과 가중함수에 대한 형상함수 (shape function)이다. 식 (9)을 식 (8)에 대입하면 다음과 같은 유한요소방정식을 얻게 된다.

$$M_{i\alpha j\beta} \dot{U}_{j\beta} + C_{i\alpha j\beta} U_{j\beta} + N(u_i)_{i\alpha} = F_{i\alpha} \quad (10)$$

여기서,

$$M_{i\alpha j\beta} = \int \rho N_{\alpha} N_{\beta} \delta_{ij} d\Omega,$$

$$C_{i\alpha j\beta} = \int (\lambda N_{\alpha,i} N_{\beta,j} + \mu N_{\alpha,j} N_{\beta,i} + \mu \delta_{ij} N_{\alpha,k} N_{\beta,k}) d\Omega,$$

$$N(u_i)_{i\alpha} = \int \rho N_{\alpha} u_i k_{i,k} d\Omega$$

그리고 $F_{i\alpha} = \int N_{\alpha} f_i d\Omega$ 이다

비선형 방정식인 식 (10)를 계산하기 위해 본 연구에서는 다음과 같은 Predictor-Corrector 방법을 채택했다.

Predictor

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{n+1} &= u_n + (1-\gamma)\Delta t a_n, \\ u_{n+1}^0 &= \tilde{u}_{n+1} \end{aligned} \quad (11)$$

Corrector

$$\begin{aligned} \text{from } l=0 \text{ to } l=L \{ \\ (M_{i\alpha j\beta} + \gamma \Delta t C_{i\alpha j\beta}) U_{j\beta(n+1)}^{(l+1)} &= M_{i\alpha j\beta} \tilde{U}_{j\beta(n+1)} \\ &+ \gamma \Delta t (F_{i\alpha} - N(u_{i(n+1)}^{(l)}))_{i\alpha} \} \\ a_{n+1} &= \frac{(u_{n+1}^{(L+1)} - \tilde{u}_{n+1})}{\gamma \Delta t}, \quad u_{n+1} = u_{n+1}^{(L+1)} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서, u_n , a_n , Δt , γ 는 각각 속도, 가속도, 속도 증분, 해석의 안정성을 높이기 위한 설정 값이며 L 은 반복수정작업(corrector iteration)의 수이다. 본 연구에서는 γ 와 L 값을 각각 1 로 사용했다.

2.3 형상충전기법

오일러리안 격자기법 중 각 검사체적에 0 에서 1 까지의 수치 값인 충전율을 계산하면서 유동 선단을 진전시키는 방법은 유동장 형성기법 관점에서 두 가지로 크게 나눌 수 있는데, 첫째 계산되는 유동장이 초기 유동장과 항상 동일한 기법[7]과 둘째, 시간에 따라 계속적으로 새로운 유동장을 생성하는 기법[2]이 있다. 전자는 정의된 유동선단으로 전체 유동장을 두 영역을 나누고 구분된 영역의 물질 상수 값만 변화시켜면 되므로 유동장을 재구성할 필요가 없어 편리하나, 초기의 유동장을 반복적으로 계산하기 때문에 계산에 소요되는 시간이 길고, 수치적으로 체적 손실이 생길 수 있다는 단점이 있다. 후자는 매시간 간격마다 유동장을 재구성하여 필요한 부분만을 선택적으로 계산하기 때문에 해석기법이 상대적으로 복잡하나, 계산시간이 짧고, 기법의 특성상 체적 손실이 없으며, 보다 안정적인 유동진전 형상을 예측할 수 있다. 그러나 두 기법 모두 유동선단 부분에 존재하는 검사체적의 유출입량을 물리적으로 정확하게 계산한다는 것은 용이하지 못하다. 그 이유는 오일러리안 격자기법의 특성상 실제 유동장과 계산상에 사용되는 유동장과는 차이가 있어 부분적으로 충전된 검사체적에서의 속도장을 정확하게 구할 수 없기 때문이다.

본 논문에서는 부분 충전 검사체적 사이에서의 보다 정확한 유출입량 계산을 위한 삼각형 검사체적에서의 형상 충전 기법을 제안하고 실제의 물리적인 유동형상에 보다 근접한 계산 결과를 얻고자 한다. 여기서, 형상 충전 기법은 삼각형 검사체적의 충전 형상을 4 가지 형상으로 정의하고 각 검사체적 단위로 정의된 형상 중 최적의 한 형상을 선정하여 이에 따라 유동선단과 각 검사 체적간의 유출입량을 계산하는 기법이다. 실제적으로, 각 부분 충전 검사 체적 사이에서의 정확한 유출입량을 계산하기 위해서는 인접하는 부분충전 검사체적 사이의 인접면내에 있어 유체가 점유하는 영역과 그 영역에서의 속도장을 알아야 한다. 본 기법에서는 일반적인 삼각형 검사체적의 충전율로부터 인접면에 있어 유체가 점유하는 영역을 계산함과 동시에 그 영역에서의 속도장을 구하여 보다 정확한 유출입량을 계산하고자 하는 것이다. 그러나, 이 두 가지 모두 스칼라 양인 충전율 만으로는 수학적으로 정확한 계산이 불가능하다. 그렇기 때문에 본 연구에서 제안한 형상충전기법에서는 다음과 같은 가정을 하였다. 먼저, 인접면 내에 있어 유체가 점유하는 영역을 예측하기 위하여 각 검사

체적내의 유동선단 형태는 직선이며, 삼각형의 검사체적 내의 유체 충전시 유동선단과 동시에 만나는 검사체적의 측면들에 있어서 충전상수(α)는 일정하다고 가정하였다. 여기서, 충전상수는 충전형상에 따라 2 차원 격자의 각면에 있어 전체 길이에 대한 유체의 점유 길이 또는 비점유 길이의 비로 정의한다. 위와 같은 가정을 사용하여 부분충전 검사체적에서 유체의 존재영역의 속도장은 다음과 같이 구할 수 있다. 먼저, 부분 충전 검사체적을 완전 충전 검사체적으로 가정하여 속도장을 구하고, 형상충전기법을 사용하여 부분충전 검사체적 내부를 유체가 존재하는 영역과 존재하지 않는 영역으로 구분과 동시에 검사체적의 각 측면에서 측면 충전율(side filling ratio)을 계산한다. 측면 충전율은 2 차원 유동장에 있어서 삼각형 검사체적의 각 측면과 유체가 접하는 길이를 각 측면의 전체길이로 나누어 구한 값으로 정의 한다. 이 값으로 유체가 각 측면과 접하는 영역을 정의할 수 있을 뿐만 아니라, 보간법에 의하여 유체의 존재 영역(A_f)과 비존재 영역(A_e)의 경계선인 유동 선단과 측면이 만나는 점의 속도를 구할 수 있다. (Fig.1)

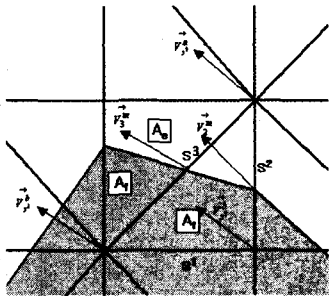


Fig. 1 Schematic diagram of volume inflow rate of fluid at fluid filled region

여기서, s^i 는 i 측면, f_i 는 측면 충전율, $V_{s^i}^a, V_{s^i}^b$ 는 측면 s^i 에서의 양쪽 절점 속도이다.

$$\vec{V}_i^m = f_i \vec{V}_{s^i}^a + (1-f_i) \vec{V}_{s^i}^b, \text{ at } 0 < f_i < 1 \& a < A_f \quad (13)$$

$$(1-f_i) \vec{V}_{s^i}^a + f_i \vec{V}_{s^i}^b, \text{ at } 0 < f_i < 1 \& b < A_f$$

이와 같이 구한 속도장은 유체가 존재하는 영역에서의 비압축성 조건을 만족하는 것으로 부분 충전 검사체적에서의 유출입량 계산을 가능하게 한다. 앞에서도 언급한 바와 같이 위의 식에서 유도된 속도장은 측면 충전율의 계산과 유동선단의 예측이 이루어져야만 하기 때문에 이에 대하여 설명하면 다음과 같다. 먼저, 계산하고자 하는 검사체적의 충전율과 주위 검사체적들의 충전율을 사

용하여 본 연구에서 제시한 4 가지의 충전 형상 중 해당되는 충전 형상을 선택한다(Fig. 2(a)). 그리고, 각각의 충전 형상에 따른 측면 충전율을 구하고 계산된 측면 충전율로부터 각각의 측면과 유동선단의 교점을 계산하여 유동선단을 구하게 된다. 이와 같이 속도장과 유동선단을 구하는데 사용되는 측면 충전율을 계산하기 위해서는 먼저 충전상수를 구해야 하는데 앞에서 언급한 가정을 전제로 하고 Fig. 2(b)를 참조하여 기하학적으로 수식을 유도하면 각 충전 형상에 대하여 다음과 같이 충전상수를 구할 수 있다.

Case 1		<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content;"> A: $f = 0.0$ B: $0.0 < f < 1.0$ C: $f = 1.0$ D: wall </div>	
Case 2			
Case 3			
Case 4			
Case 5			
Case 6			

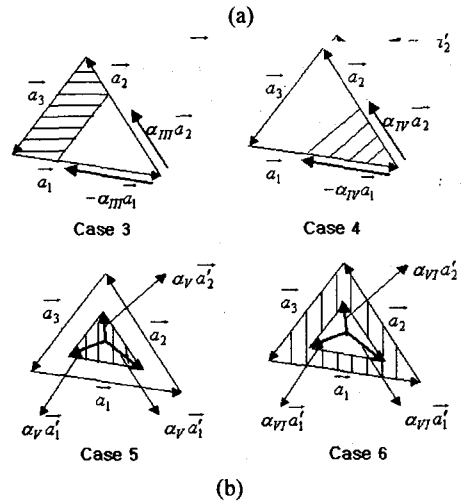


Fig. 2 Rule table of pattern types for filling pattern technique (a) and detail description of pattern types (b)

$$\text{경우 3) } \alpha_{III} = \sqrt{\frac{2(1-f_{vol}) \cdot V}{a_1 \times a_2}}$$

$$\text{경우 4) } \alpha_{IV} = \sqrt{\frac{2f_{vol} \cdot V}{a_1 \times a_2}} \quad (14)$$

$$\text{경우 5) } \alpha_V = \sqrt{\frac{2f_{vol} \cdot V}{(a_3 \times a_1 + a_1 \times a_2 + a_2 \times a_3)}}$$

$$\text{경우 6) } \alpha_{VI} = \sqrt{\frac{2(1-f_{vol}) \cdot V}{(a_3^2 \times a_1^2 + a_1^2 \times a_2^2 + a_2^2 \times a_3^2)}}$$

여기서, f_{vol} 은 검사체적의 충전율, V 는 검사체적의 체적이다. 이와 같이 계산된 충전상수 α_{III} , α_{IV} , α_V , α_{VI} 를 사용하고 Fig.2 (b)를 참조하여 각 충전형상에서의 측면 충전율을 구하면 다음과 같이 구하게 된다.

$$\text{경우 3) } f_1 = 1 - \alpha_{III}, f_2 = 1 - \alpha_{III}, f_3 = 1$$

$$\text{경우 4) } f_1 = \alpha_{IV}, f_2 = \alpha_{IV}, f_3 = 0$$

$$\text{경우 5) } f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$$

$$\text{경우 6) } f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 1$$

종합적으로, 측면 충전율은 $f_{vol} = 0$ 인 검사체적에서 0, 0, 0, $f_{vol} = 1$ 인 검사체적에서 1, 1, 1이 되며, 나머지의 경우는 앞에서 유도된 바와 같이 4 가지 형상에 따라 계산된다.

2.4 유동선단의 유연화

측면 충전율은 각각의 검사체적에서 독립적으로 계산되어 지기 때문에 두 검사체적에 의하여 공유되어지는 측면에서의 측면 충전율은 불연속성을 나타내게 된다. 이러한 불연속성은 물리적인 현상과 맞지 않기 때문에 불연속 부분에 대한 유연화 과정을 수행하였다. 그리고, 이 과정은 형상 충전기법에 의하여 예측된 각 검사체적의 충전형상이 인접하는 검사체적의 충전형상에 의하여 보다 안정적인 형태로 재조정되도록 하는 역할을 수행한다. 유연화 과정을 설명하면 다음과 같다. 한 측면을 검사체적 a와 b가 공유할 경우 각각의 검사체적 a와 b에서 계산된 충전율을 f_a 와 f_b 라고 하면 유연화된 새로운 충전율은 다음과 같이 된다.

$$\text{1) } f_s = (f_a + f_b) / 2 \text{ at } 0 < f_a < 1 \ \& \ 0 < f_b < 1$$

$$\text{2) } f_s = 1 \text{ at } f_a = 1 \ \text{or} \ f_b = 1$$

여기서, f_a 나 f_b 중 어느것이라도 값이 1 이라면 f_s 를 1로 정의한 이유는 평균값을 취함으로써 이미 완충 검사체적이 부분충전 검사체적으로 전환되는 현상을 막기 위함이다. 그리고, 이러한 유연화 과정은 f_a 와 f_b 중 어느 것이라도 0 값을 갖는 경우에는 유연화의 의미가 없기 때문에 제외된다.

2.5 검사체적에서의 유출입량 계산

본 연구에서의 유한요소해석을 위한 격자는 3 절점의 삼각형을 사용하였으며 각 격자는 검사체적과 일치시켰다. 그리고, 검사체적은 충전율과 비압축성 유동 조건에 따라 다음과 같이 3 가지로 구분된다.

$$\text{내부검사체적}(f_{vol} = 1 \ \& \ Q_{in} = 0)$$

$$\text{- 선단검사체적}(0 \leq f_{vol} \leq 1 \ \& \ Q_{in} \neq 0)$$

$$\text{- 외부검사체적}(f_{vol} = 0 \ \& \ Q_{in} = 0)$$

앞에서 언급한 검사체적들 중 유출입량의 계산이 필요한 것은 선단 검사체적이며, 이곳에서 형상 충전 기법에 의한 유출입량은 다음과 같이 계산한다(Fig. 1). 검사체적 A의 측면을 s^i , s^j 를 포함하는 격자를 $m_{s^k}^k$, 격자의 총수를 lm_{s^k} , s^i 의 양

쪽 절점 a, b의 속도를 $\vec{V}_{s^i}^a, \vec{V}_{s^i}^b$, s^i 의 절대길이를 r_{s^i} , s^i 에서 검사체적 중심방향으로의 수직 벡터

를 \vec{n}_i 라 하면 식 (13)을 사용하고 검사체적의 외각 궤적을 따라 적분하는 방법으로 총 유출입량을 다음과 같이 구할 수 있다. 특별히, 검사체적 A의 측면 충전율을 f_i , 각 측면을 공유하는 검사체적은 A_i^a, A_i^b 로 부터 계산된 공유 측면의 측면 충전율을 f_i^a 라 할 때, 측면 충전율인 f_i 가 0 이고 f_i^a 가 0 이 아닌 경우에는 f_i 를 f_i^a 로 치환하고 Q_{s^k} 를 계산하되 그 값이 0 보다 작은 경우에 Q_{s^k} 를 0 으로 정의 한다. 또한 f_i 가 0 이 아니고 f_i^a 가 0 인 경우에는 Q_{s^k} 가 양인 경우에 0 으로 정의한다.

$$Q_{in}^A = \sum_{i=1}^3 Q_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^{lm_i} Q_{s^k} W_{s^k}^k \quad (15)$$

최종적으로 계산된 유출입량을 사용하여 충전율을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$f_{vol}^t = f_{vol}^{t-1} + \frac{dQ_{in}^A}{V_{total}^A} \quad (16)$$

여기서, V_{total}^t 는 검사체적 A의 총부피이다.

3. 해석결과

3.1 형상충전 기법에 의한 댐 붕괴시 유동해석

본 연구에서 제시한 삼각형 검사체적에서의 형상충전기법의 타당성 검토를 위하여 댐 붕괴 문제를 해석하였다. 먼저 해석에 사용된 물기둥의 크기는 Fig. 3 에 나타난 것과 같이 5.715cm×5.715cm이며 경계 조건은 벽면에서의 마찰력을 무시한 미끄럼 조건을 사용했다. 물의 밀도는 1000kg/m³, 중력가속도는 9.8m/s²을 사용했으며 시간 간격은 속도장과 유동의 진전의 안정성을 위하여 1.0×10⁻³sec 를 사용하였다. 해석은 Fig. 4 와 같은 삼각형

검사체적을 갖는 격자를 사용하였다. Fig. 4 는 초기 격자 조건에서 0.02, 0.05, 0.09sec 일 때의 유동 선단, 격자의 형상과 속도장을 나타내고 있다. 해석 결과들에서 볼 수 있듯이 유동 선단의 형상이 유체의 부드러운 흐름현상을 잘 예측해 주고 있으며 속도장 또한 경계 조건에 합당한 안정적인 해석 결과를 보여 주고 있다.

Fig. 5 는 Martin 과 Moyce[8]에 의한 실험 결과와 수치해석 결과를 비교한 것으로 해석 결과가 실험 결과와 상당히 일치함을 알 수 있다.

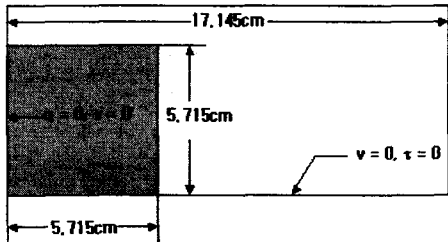


Fig. 3 Schematic diagram of collapse of a water dam and wall boundary condition

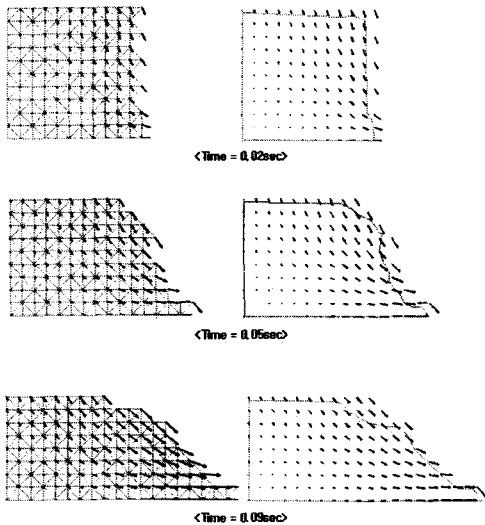


Fig. 4 Predicted mesh configurations, velocity fields and free surfaces

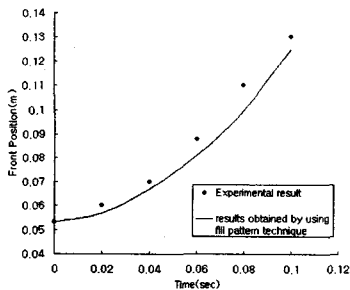


Fig. 5 Predicted front position

4. 결론

삼각형의 검사체적을 갖는 요소에 대한 형상 충전 기법을 제안하고 기법의 타당성 검토를 위하여 댐의 붕괴시 유체의 흐름을 예측하는 예제에 대하여 적용한 바 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 삼각형 검사 체적 요소에 적용된 형상 충전 기법은 부분 충전 검사체적에서의 유출입량 계산에 있어 유체 충전부의 비압축성 유동 조건을 만족시키는 효율적인 방법으로 유체의 유동 진전 현상 모사에 있어 좋은 결과를 보였다.
- (2) 일반적인 삼각형 검사 체적을 4 가지 충전 형상으로 정의 하고 측면 충전율을 계산함으로써 단순 수치 값인 충전율로부터 실제 물리적 유동 형태에 보다 근접한 유동 선단을 예측할 수 있었다.

참고문헌

- (1) Balasubramaniam Ramaswamy and Mutsuto Kawahara, 1987, "Lagrangian Finite Element Analysis Applied to Viscous Free Surface Fluid Flow," Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 7, pp. 953-984
- (2) Harlow, F.H. and Welch, J. E, 1995, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface," Phys. Fluids, Vol. 8, pp. 2182-2189
- (3) Hirt, C. W. and Nichols, B. D., 1981, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries," J. Comput. Phys., Vol. 39, pp. 201-225
- (4) Broyer, E., Gutfinger, C. and Tadmor, Z., 1975, "A Theoretical Model for the Cavity Filling Process in Injection Molding," Trans. Soc. Rheol., Vol. 19, pp. 423-444
- (5) Dhatt, G., Gao, D.M. and Ben, Cheikh A., 1990, "A Finite Element Simulation of Metal Flow in Moulds," Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 30, pp. 823-831
- (6) J. H. Jeong and D. Y. Yang, 1998, "Finite Element Analysis of transient Fluid Flow with Free Surface using VOF Method and Adaptive Grid," Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol.26, pp. 1127-1154
- (7) Erik Thompson, 1986, "Use of Pseudo - Concentration to Follow Creeping Viscous Flows During Transient Analysis," Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 6, pp. 749-761
- (8) martin, J.C. and Moyce, W. J., 1952, "Ann Experimental Study of the Collapse of Liquid Columns on Rigid Horizontal Plane," Philos. Trans. Ser. A, Math. Phys. Sci., Vol. 244, pp. 312-324