

## DNS에 의한 원주 후류에서의 3차원 천이

강신정\*, 타나하시 마모루\*\*, 미야우치 토시오\*\*, 모장오\*, 이영호\*\*\*

## Three-Dimensional Transition in the Wake of a Circular Cylinder By Direct Numerical Simulation

S. J. KNAG, M. TANAHASHI, T. MIYAUCHI, J. O. MO, Y. H. LEE

**Key Words:** Circular Cylinder(원주), Direct Numerical Simulation(직접수치계산), Finite Different Method(유한차분법), Karman Vortex(카르만 와)

## Abstract

Three-dimensional time-dependent flow past a circular cylinder is numerically investigated using direct numerical simulation for Reynolds number 280 and 300. The higher-order finite difference scheme is employed for the spatial distributions along with the second order Adams-Bashforth and the first order backward-Euler time integration. In x-y plane, the convection term is applied by the 5th order upwind scheme and the pressure and viscosity terms are applied by the 4th order central difference. And in spanwise, Navier-Stokes equation is distributed using of Spectral Method. At Reynolds number 259 the two-dimensional wake becomes linearly unstable to a second branch of modes with wavelength about 1.0 diameters at onset (B-mode). Present results of three-dimensional effects of in wake of a circular cylinder is represented with spanwise and streamwise vorticity contours as Reynolds numbers.

## 1. 서론

원주주위의 유동장은 오랫동안 실험적, 이론적 그리고 최근에는 수치적 연구의 대상으로서 많은 연구자들에 의하여 연구되어 왔다. 그러나, 그 유동의 메카니즘에 관한 이해는 아직 불완전한 상태이다. Re수가 대략 50부터 150의 범위에 있어서 원주 후류는 주기적인 와 방출을 동반하고,

안정한 카르만 와열을 형성한다. 그러나, Re수가 150부터 300 사이의 범위에서는 3차원 천이를 일으키며, Fig.1에 나타낸 것과 같이 스트라우할 수와 Re수의 관계가 2개의 부분에서 불연속점이 존재함을 알 수 있다. 이것은 원주 후류에 있어서 3차원적인 천이의 메카니즘과 밀접한 관계가 있고, 후류가 지배적인 스핀 방향의 파장을 갖고 있다는 것이 과거의 연구에 의하여 보고되었으며, 그 파장의 길이는 A-mode영역에 있어서는 원주직경의 약 4배, B-mode영역에서는 원주직경의 약 1배로 알려져 있다.

Karniadakis등<sup>(1)</sup>과 Tomboulides등<sup>(2)</sup>은 Re=200

\* 한국해양대 대학원

\*\* Tokyo Institute of Technology Mechano-Aerospace Engineering

\*\*\* 한국해양대 기계·정보공학부

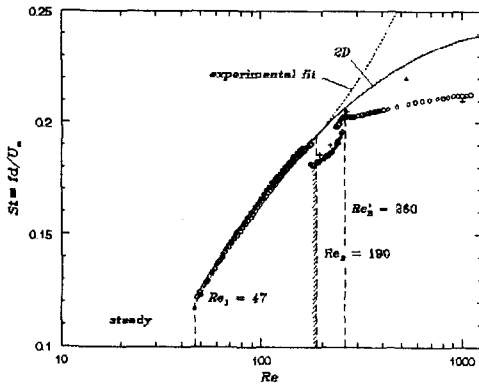


Fig 1. Variation of shedding frequency with Reynolds number from experiments and simulations : (filled circles) Hammache & Gharib (1991); (open circles), Williamson (1989); (open triangle) three-dimensional simulation from Mittal & Balachandar (1995); +, three-dimensional simulations from Henderson (1997); the solid line is a curve fit to two-dimensional simulation data up to  $Re = 1000$  from Barkley & Henderson (1996).

에서 2차원적 웨이크가 3차원적 교란으로 불안정하다는 사실을 밝히기 위하여 가장 먼저 3차원 원주 웨이크에 대하여 수치적 연구를 행하였다.

Dwight Barkley & Ronald D. Henderson<sup>(3)</sup>은  $Re$  수가 140에서 300의 천이점에 대하여 원주 후류의 Floquet 안정성 계산을 통하여 유한한 길이 방향의 실린더에 대한 안정 계산에 대한 연구를 하였다. 최근  $Re$  수가 150-300사이의 범위에 대한 수치적 및 실험적 연구들은 3차원적 유동특성에 대하여 많은 연구결과를 밝혀오고 있다.<sup>(4)-(7)</sup>

한편, 본 연구에서는 직접수치계산(Direct Numerical Simulation : DNS)를 이용하여 스펜방향 파장의 상세한 해명을 통하여, B-mode 영역의 3차원 천이기구의 메커니즘을 밝히는 것을 목적으로 한다.

## 2. 수치해석

### 2.1 지배방정식

본 연구에서는 3차원 원주주위의 유동장을 대상으로하여 직접수치계산을 행하였다. 유동은 비

압축성류로 가정하고, 기초방정식은 비정상 3차원 Navier-Stokes 방정식 및 연속의 식이다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

여기서,  $u$ ,  $p$ ,  $Re$ 는 각각 속도, 압력,  $Re$ 수이고, 각 변수는 원주의 반경  $R$ 과 주류속도  $U$ 를 이용하여 무차원화 하였다. 본 연구에서는 격자를 원주주위에 효율적으로 배치하기 위하여  $x$ - $y$ 면에 대하여 곡선좌표계를 사용하고 있으므로 식 (2.1), (2.2)은 식 (2.3), (2.4)에 의하여 일반곡선좌표에 관한 식으로 변환하여 적용하였다.

$$\xi = \xi[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (2.3)$$

$$\eta = \eta[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)] \quad (2.4)$$

### 2.2 고차정도 차분법<sup>(9)</sup>

이산화를 위한 계산격자는 등간폭의 Regular 격자계를 사용하였다. 유동방향과 수직방향에 대한 이산화는 대류항에 5차정도 풍상차분을, 대류항 이외의 항에 4차정도 중심차분을 이용하였다. 또한, 스펜 방향의 이산화에 관하여는 주기 경계조건을 채택하고, 속도  $u_i$  및 압력  $p$ 를  $\sin \cdot \cos$  급수전개, 스펜방향에 Fourier 급수전개한 후 스펙트럴법을 이용하여 계산을 행하였다. 대류항으로부터 발생하는 aliasing 오차는 유동방향 및 수직방향에 관하여는 5차정도 풍상차분법에 따라 어느 정도 제어 되어 있고, 스펜방향에 관하여는 3/2칙에 따라 완전히 소거하였다.<sup>(10)</sup>

유동방향 및 수직방향에 있어서 고차정도의 차분법을 적용할 수 없는 경계부분에 대하여는 식 (2.5), (2.6)과 같은 4차정도의 편측차분법을 적용하였다.

4차정도 편측차분: 1계 미분 (벽면경계점 :  $i=1$ )

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i=1} = \frac{48f_{i+1} - 25f_i - 36f_{i+2} + 16f_{i+3} - 3f_{i+4}}{12\Delta x} \quad (2.5)$$

4차정도 편측차분: 2계 미분 (벽면경계점 :  $i=1$ )

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{45f_i - 154f_{i+1} + 214f_{i+2} - 156f_{i+3} + 61f_{i+4} - 10f_{i+5}}{12\Delta x^2} \quad (2.6)$$

### 2.3 시간적분법

본 연구에서는 기초방정식을 시간 발전시키는 기법으로서 FSM (Fractional Step Method)에 의한 2 step 시간분할법을 이용하였다. 대류항 및 점성항에 대하여는 다음과 같은 2차정도를 갖는 Adams-Bashforth법을 이용하였다.

$$-\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(3S^n - S^{n-1}) \quad (2.7)$$

여기서 S는 식(2.8)과 같이 표현된다.

$$S^n = -(u^n \cdot \nabla)u^n + \frac{1}{Re} \nabla^2 u^n \quad (2.8)$$

그리고, 압력항에 관하여 다음과 같은 1차정도를 갖는 Backward-Euler법을 사용하여 차분화를 행하였다.

$$-\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} \quad (2.9)$$

식(2.9)의 양변에 발산(divergence)을 취하고 연속의 방정식을 이용하면 다음과 같은 압력 Poisson방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{\nabla u^*}{\Delta t} \quad (2.10)$$

식(2.10)의 Poisson 방정식은 행렬로 표현되며, 본 연구에서는 전처리에 따른 불완전 LU분해를 이용한 Bi-CGSTAB<sup>(11)(12)</sup>법에 의하여 해석하였다.

### 2.4 경계조건

경계조건은 원주의 전방과 상·하부는 균일유입, free-slip 조건을 각각 부여하고, 원주의 표면은 no-slip 조건을 부여하였다. 또한, 스펜방향에 대하여는 주기경계조건을 부여하였으며, 하

부는 충분히 물리적 상태와 같게 하기 위하여 Miyauchi 등<sup>(8)</sup>에 의하여 제안된 압력의 근사적인 수송방정식을 사용하였다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_c \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + U_c \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2Re} \omega^2 \quad (2.12)$$

여기서  $U_c$ 는 속도 및 압력장의 대류수송속도를 나타내며, 본 연구에서는  $U_c$ 를 0.85U로 한다.

### 2.5 격자생성

격자는 해가 크게 변화하는 영역에서는 집중시키고, 해의 변화가 적은 영역에서는 성기게 배치하기 위하여 본 연구에서는 타원형 편미분방정식에 따른 수치적인 격자생성법을 이용하였다. 타원형 생성계는 다음 식에서 표시된 Poisson 방정식을 이용한다.

$$\nabla^2 \xi = P \quad (2.13)$$

$$\nabla^2 \eta = Q \quad (2.14)$$

여기서, P, Q는 제어함수라고 하고, 좌표곡선의 간폭과 방향을 제어하기 위하여 사용된다. 본 계산에 사용된 격자는 다음과 같은 식에 의하여 간단하게 생성하였다.

$$g_{22}(r_{\xi\xi} + Pr_{\xi}) + g_{11}(r_{\eta\eta} + Qr_{\eta}) - 2g_{12}r_{\xi\eta} = 0 \quad (2.15)$$

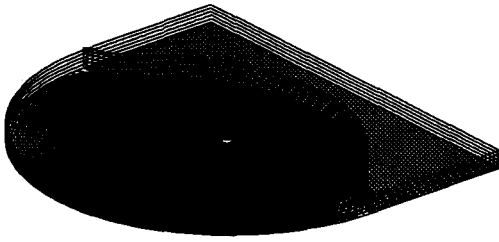
여기서, P, Q,  $g_{11}$ ,  $g_{22}$ ,  $g_{12}$ 는

$$g_{11} = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \quad (2.16)$$

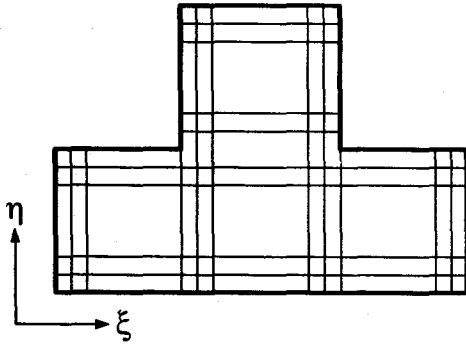
$$g_{12} = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \quad (2.17)$$

$$g_{22} = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (2.18)$$

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^N a_i \sin(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) - \sum_{j=1}^M b_j \sin(\eta - \eta_j) \exp[-d_j \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_j)^2}] \quad (2.19)$$



(a) Physics Space



(b) Calculation Space

Fig. 2 Grid Generation

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^N a_i \sin(\eta - \eta_i) \exp(-c_i |\eta - \eta_i|) - \sum_{i=1}^M b_i \sin(\eta - \eta_i) \exp[-d_i \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}] \quad (2.20)$$

이며,  $a_i, b_i, c_i, d_i$ 는 조밀과 성긴 정도를 조절하는 계수로 사용된다.

Fig.2(a)는 식(2-15)을 이용하여 생성된 물리 공간의 격자를 나타내며, Fig.2(b)는 계산공간의 격자를 나타내고 있다. 계산에 사용된 격자는  $278 \times 280 \times 64$ 로서 총 4,981,760개로 하였고, 최소격자의 크기는  $4\pi/280$ 으로 하였다. 계산기와 계산시간은 슈퍼컴퓨터 SR2201로서 64개의 CPU를 이용하여 1 case당 30일 정도 소요되었다.

### 3. 결과 및 고찰

원주주위의 초기 유동장은 충분히 발달한 2차원 원주주위의 유동을 이용하였다. 계산은 Re수가 280, 300인 경우(B-mode)에 대하여 행하였으

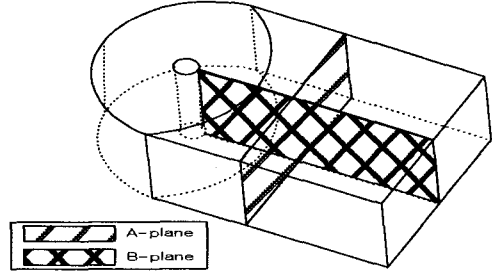


Fig.3 Configuration of the visualization planes

며 시간간격은 발산 및 시간오차를 충분히 고려한 0.004로 하여 계산하였다.

#### 3.1 카르만와열의 방출과 3차원 천이기구

Fig.4과 Fig.5는 레이놀즈 수가 280과 300인 경우의 스펠방향을 사동분한 단면에 관한 스펠방향의 와도 등고선을 나타내고 있다. 이들의 그림으로부터, 카르만 와열이 원주후방에 형성되어 있는 것을 알 수 있다. 여기서, 스펠방향의 각 x-y단면에 관한 스펠방향 와도의 차이는 거의 관찰되지 않으며, 이 레이놀즈 수에 관한 카르만 와열은 3차원성의 영향을 크게 받고 있지 않을 것을 알 수 있다. Fig.6와 fig.7는 fig.4,5와 동일한 단면에 관한 유동방향 와도의 등고선을 나타내고 있다. 스펠방향의 와도성분에 3차원성이 크게 나타나지 않는 것에 비하여, 유동방향의 와도성분에는 스펠방향의 각 x-y단면에 있어서 크게 다른 것을 알 수 있다. 특히, 카르만 와간의 브레이드 영역에서는 유동방향에 당겨 늘어나는 유동방향 와도의 큰 영역이 존재하고 있다. 이와 같은 유동방향 와도의 구조는 원주후방의 카르만 와간에서만 나타나지 않고, 원주 근방의 박리전 단층 부근에서도 관찰며, Re수가 280과 300일 때의 구조적인 차이는 크게 나타나지 않음을 알 수 있다. Fig.8는 Re수가 300인 경우에 대하여 유동방향 와도의 등고면(Solid)과 스펠방향 와도의 등고선(line)을 나타내고 있다. 카르만 와간의 브레이드 영역에서 잡아 당기는 유동방향 와도의 세기가 크게 존재함을 분명하게 관찰할 수 있다. Fig.9는 Re수가 300인 경우의 스펠방향 와도의 등고면을 나타내고 있다. 여기서, 흰색부분에 가까운 쪽은 정(+), 검은색 부분에 가까운 쪽은 부(-)를 의미한다.

1/4



3/4



2/4



4/4



Fig.4 Vorticity Contours in Re=280

(Contours are evenly spaced over the range  $-15 < \xi_z < 15$  ; Spanwise vorticity-Karman vortex street)

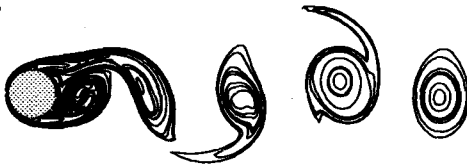
1/4



3/4



2/4



4/4



Fig.5 Vorticity Contours in Re=300

(Contours are evenly spaced over the range  $-15 < \xi_z < 15$  ; Spanwise vorticity-Karman vortex street)

1/4



3/4



2/4



4/4



Fig.6 Vorticity Contours in Re=280

(Contours are evenly spaced over the range  $-0.35 < \xi_x < 0.35$  ; Streamwise vorticity)

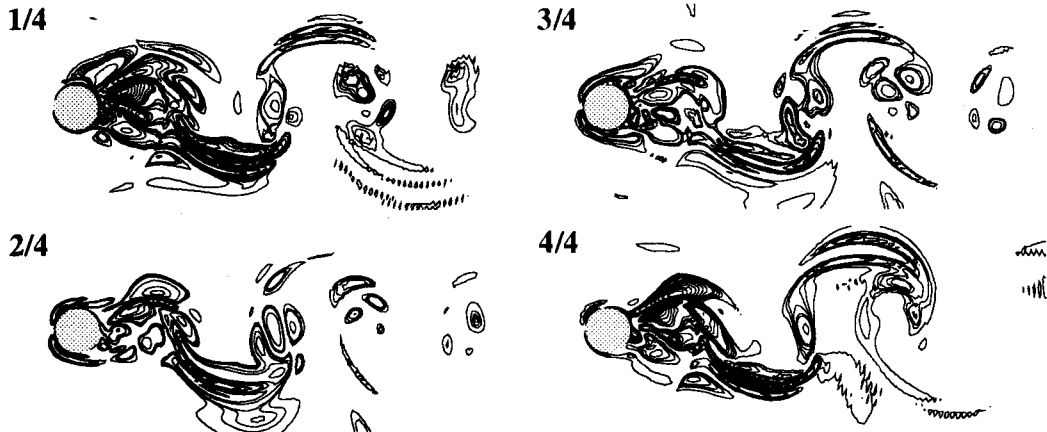


Fig.7 Vorticity Contours in Re=300

(Contours are evenly spaced over the range  $-0.35 < \xi_x < 0.35$  ; Streamwise vorticity)

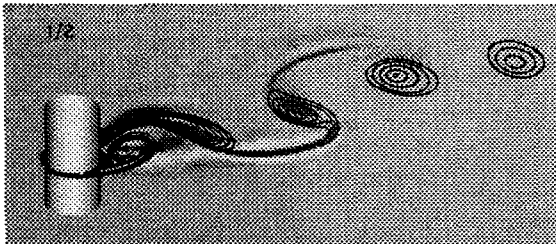
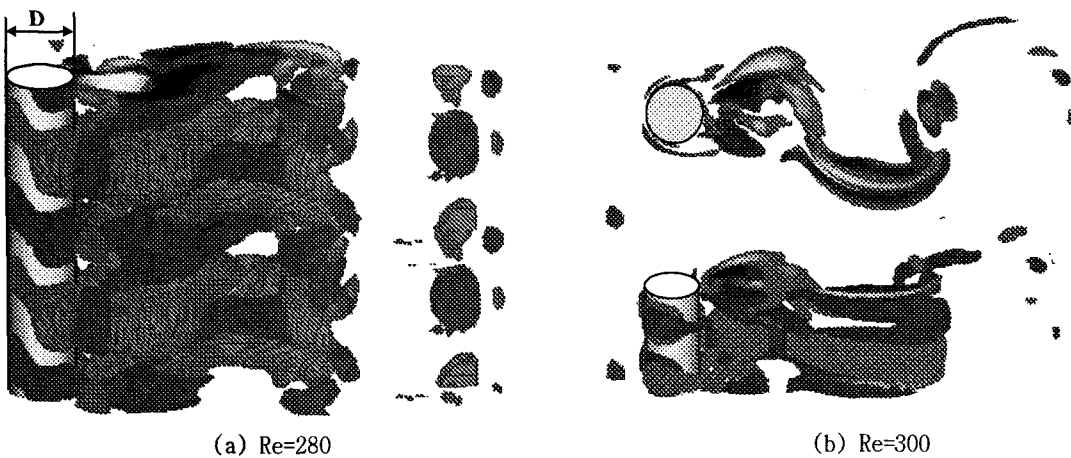


Fig.8 Vorticity Contours in Re=300  
(Range  $-0.35 < \xi_x < 0.35$  ,  $-15 < \xi_z < 15$ )



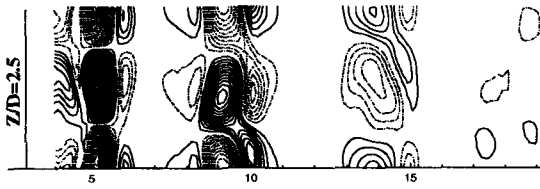
Fig.9 Isocontours of spanwise vorticity in Re=300 (karman vortex).



(a) Re=280

(b) Re=300

Fig.10 Modification of the streamwise vortex structures as Reynolds number increases ; passage to mode B; iso-contours at values  $\pm 0.25$  of  $\xi_x$

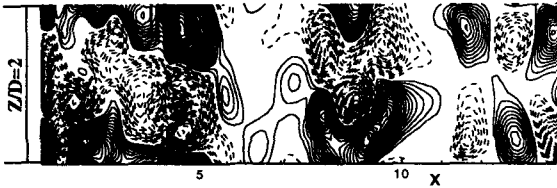


(a) Plane A



(b) Plane C (x/D=2.5) (c) Plane C (x/D=4.5)

Fig.11 Streamwise vorticity field,  $\xi_x$ ,  $y/D=0.0$ ,  $x/D=2 \sim 10$  ( $Re=280$ )



(a) Plane A



(b) Plane C (x/D=2) (c) Plane C (x/D=4.25)

Fig.12 Streamwise vorticity field,  $\xi_x$ ,  $y/D=0.0$ ,  $x/D=0.5 \sim 7.5$  ( $Re=300$ )

앞에서 살펴본 바와 같이 스펠방향의 와도에 관한 3차원성은 상당히 약하여 스펠방향에 거의 동일한 형태의 카르만 와가 방출되고 있다. 이것에 비하여, Fig.10 (a)과(b)는 Re수가 각각 280과 300인 경우의 유동방향 와도의 등고면을 나타내고 있다. 이 그림들로부터, 카르만 와간의 브레이드 영역에는 유동방향에 회전축을 갖는 역회전의 와대가 형성되어 있는 것을 알 수 있다. 또, 원주 근방에 있어서도 동일하게 유동방향의 와도가 역후초의 영역이 떠를 이루어 형성되어 있는 것을 알 수 있다. 이와 같은 구조를 갖는 Re수의 범위를 b-mode라고 하며 이 떠의 간격은 원주 직경의 약 1.0배를 갖는다. 이 결과들은 최근의 많은 실험결과와 잘 일치하고 있다.

### 3.2 천이 모드(b-mode)의 스펠방향 파장

Re수가 200부터 300사이에서 원주주위 유동이 3차원으로 이동하는 것은 과거의 연구에 의하여 밝혀져 있지만, 그들의 스펠방향 파장에 관하여는 확실하지 못한 점이 많이 남아 있다. Re수가 약 150부터 260 사이에서는 비교적 스펠방향 파장이 긴 불안전 모드가 유동장을 지배한다고 알려져 있고 이 모드는 일반적으로 A-mode라고 불려지고 있다. 이것에 비하여 Re수가 260부터 300을

넘으면, 스펠방향 파장이 원주직경의 약 1배로 짧은 다른 3차원 모드가 유동을 지배한다고 알려져 있으며, 이 모드를 B-mode라고 불려진다.

Fig.11(a)와 Fig.12(a)는 각각 Re수가 280과 300의 경우에 대하여, 카르만 와간의 브레이드 영역을 포함하는 Fig.3의 A-단면의 유동방향 와도의 분포를 나타내고 있다. 실선은 정의 값을 점선은 부의 값을 의미하며, 스펠방향의 계산영역은 Re수가 280인 경우에 대하여 5D, Re수가 300인 경우에 대하여 2D로 하였다. 이 그림들로부터, 브레이드 영역에 형성된 종와의 파장은 원주직경의 약 1배이다는 것을 알 수 있다.

또한, Fig.11(b),(c)와 Fig.12(b),(c)는 B-단면의 유동방향 와도를 나타내고 있으며 단면의 위치는 Re수가 280인 경우는 x/D가 2.5와 4.5이며, Re수가 300인 경우는 X/D가 2와 4.25인 지점에서의 단면에 대한 결과를 나타내고 있다. 이 지점은 카르만 와간의 브레이드 영역 부근을 의미한다. 이 그림들을 통하여 y값이 0인 부근에서 약간 편심된 위치 즉, 카르만 와의 브레이드 영역에서 유동방향 와도가 원주 직경의 약 1배 간격을 갖는 정과 부의 떠를 나타내고 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본연구에서는 원주주위 유동의 3차 원천이 구조를 밝히기 위하여 고차정도 차분법과 스펙트럴법을 이용하여 원주주위 유동의 3차원 직접수치계산을 행하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) Re수 280과 300에 대하여 원주주위 유동은 3차원성을 가지며, 유동은 B-mode의 3차원 유동을 갖고 있다.

(3) B-mode의 3차원 유동에서는 브레이드 영역에 종좌가 형성되어, 그 파장은 원주직경의 약 1배를 갖는다.

(4) B-mode는 원주전연부터 명확한 3차원성을 나타내고, 박리전단층에서 원주후류로 밀려가면서 정·부의 유동방향좌도를 갖는 와층이 형성된다. 또한, 이것들은 박리전단층의 외측에 역방향의 유동방향좌도를 갖는 와층을 동반한다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Karniadakis, G.E & Triantafyllou, G.S. "Three-dimensional dynamics and transition to turbulence in the wake of bluff objects". J. Fluid Mech. Vol.238, 1992, 1-30
- (2) Tomboulides, A. G., Triantafyllou, G. S. & Karniadakis, G. E., "Anew mechanism of period doubling in free shear flows.", Phys. Fluids A 4, 1992, 1329-1332
- (3) Dwight Barkley & Ronald D. Henderson, "Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder.", J. Fluid Mech. Vol. 322, 1996, pp. 215-241
- (4) Williamson, C.H.K., "The existence of two stages in the transition to three dimensionality of a cylinder wake.", Phy. Fluids 31, 1988 3165-3168.
- (5) Williamson, C.H.K., "Mode A" secondary instability in wake transition.", Phys. Fluids 8, 1996, 1680-1682.
- (6) Williamson, C.H.K., "Vortex dynamics in the cylinder wake.", Ann. Rev. Fluid Mech. 28,

1996, 477-539.

(7) Zhang, H.-Q., Fey, U., Noack, B.R., Konig, M. & Eckelmann, H., "On the transition of the cylinder wake.", Phys. Fluids 7, 1995, 779-794.

(8) 宮内 敏雄, 店橋 護, 鈴木 基啓, "DNSのため流入流出境界条件", 日本機械学会論文集 (B編), 60

卷571号, 1994, pp.813

(9) B. Fornberg, "Generation of finite difference formulas on Arbitrarily spaced grids", Mathematics of Comp. vol.51, 1988, pp.99-706

(10) Canuto, C., Hussaini, M. Y., "Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer -Verlag, 1988, pp. 87

(11) H.A. van der Vorst, "Bi-CGSTAB: A fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of non-symmetric linear systems". SIAMJ. Sci. Stat. Comput, vol.13-2, 1992, pp.631-644

(12) 小国編, "行列計算ソフトへア", 九善株式会社, 1995

(13) Joe F. Thompson, Z. U. A. Warsi, C. Wayne Mastin, "Numerical Grid Generation"