

압축성 회전 유동에서의 비점성 Taylor-Proudman column 유동

박 준 상*

Taylor-Proudman Column Flows in a Compressible Rotating Fluid

Jun Sang PARK

Key Words: compressible rotating flow(압축성 회전유동), Ekman number(에크만 수), Rossby number (로스비 수), Taylor-Proudman column flow (테일러-프라우드만 유동)

Abstract

A study has been made of the condition to maintaining Taylor-Proudman column flows in a compressible rotating fluid, which is driven by small mechanical and/or thermal perturbations imposing on the container wall in the basic state of isothermal rigid body rotation. The Rossby and system Ekman numbers are assumed to be very small. The Taylor-Proudman column flow can be produced when energy parameter, e , becomes constant on the whole flow region. Energy balance concept, related to energy parameter, and its physical interpretation are given with comprehensive discussions.

1. 서론

회전하는 유체에 관한 연구는 공학 및 과학의 많은 영역에서 다양한 관점에서 오래 동안 연구되어 왔고, 이들 연구의 주된 부분은 유체가 회전 중에 발생시키는 힘의 상호작용 및 균형에 대한 것이다. 특히, 시스템 Ekman 수 (E) 와 Rossby 수 (ϵ)가 매우 작은 문제인 경우 내부 유체와 용기의 벽 근처의 경계층 유동의 상호작용에 의한 경계층 유동이 발생시키는 용기 벽에서 먼 내부 유체의 정상 유동 상태는 다양한 분야에서의 응용과 문제 자체로서의 기본 물리 현상 연구에 대한 중요성으로 인해 여러 연구자들에 의해 많이 다루어져 왔다.

$E \ll 1$ 와 $\epsilon \ll 1$ 인 경우, 균질 비압축성 유체는 회전할 때 용기 벽으로부터 먼 내부 비점성 영역에서는 회전축 방향으로 유동의 속도벡터가

변하지 않고 일정한 유동현상을 보인다. 이것을 Taylor-Proudman column 유동이라 한다. 이때, 비점성 영역의 정상유동에서 발생하는 회전축에 수직인 반경방향 힘의 균형은 코리올리 힘과 압력구배의 평형에 의해 유지되고, 이를 geostrophic balance라 부른다.[Greenspan⁽¹⁾].

한편, 압축성 유체인 경우, 용기 벽에서 먼 내부 영역에서는 힘의 균형이 코리올리 힘, 부력과 압력구배에 의해 이루어지는 thermal geostrophic wind relation 에 의해 지배된다. 결과적으로 내부 비점성 영역 유체의 온도장이 회전축 방향으로 일정하지 않으면 균질의 비압축성 유체에서와 같은 Taylor-Proudman column 유동이 불가능하다. 압축성 회전유동에서는 유체의 반경방향 운동에 따른 압축 (혹은 팽창)이 이 유동장 내부에서 발열을 일으키기 때문에 회전축방향으로 온도를 균일하게 하는 것이 대단히 힘든 문제이다. 다시 말하면 유한 용기 내의 압축성 회전유동에서는 유체가 용기와 같은 일정한 회전속도를 갖는 등은 강제회전 상태 이외에는 일반적으로 영

* 한라대학교

계층 유동을 동반한 형태의 정상 유동에서 Taylor Proudman column 유동이 존재하기가 대단히 힘들다. 결과적으로 이전에 이루어진 정상 유동에 대한 연구는 모두가 내부 유동 및 온도장이 회전축 방향으로 변화를 갖는 문제를 다루고 있다.

본 논문에서는 시스템 Ekman 수가 매우 작은 유한 용기 내의 압축성 회전 유동에서 발생하는 내부 영역의 유동 및 온도장이 회전축 방향으로 일정한 Taylor Proudman column 유동을 발생시킬 수 있는 이론적인 조건을 구하고, 이 결과를 바탕으로 실제적인 문제를 논의하고자 한다.

2. 지배방정식

초기 상태에 실린더의 중심 축에 대해 각속도 Ω^* 로 일정하게 회전하는 압축성유체를 생각하자. 회전하는 유체는 반경 R_0^* , 높이 H 인 원통형 실린더 내부에 담겨있다고 가정하자. 원통형 좌표계 (r^*, θ^*, z^*) 와 관련 속도 성분 (u^*, v^*, w^*) 을 고려하자. 초기 기본 상태의 내부 유체와 용기 벽은 T_{00}^* 의 등온상태이다. 이 경우 완전기체의 밀도는 [e.g., Bark & Bark⁽²⁾, Hyun & Park⁽³⁾]:

$$\rho_{00} = \exp[\gamma M^2(r^2 - 1)/2], \quad (1)$$

와 같다. 여기서 상첨자 * 는 차원 변수를, 그리고 하첨자 00 는 초기 기본 상태를 의미한다. 그리고 indicates the undisturbed basic state, $M[\equiv \Omega^* r_0 H^* / (\gamma R T_{00}^*)^{1/2}]$ 은 마하수, γ 는 비열비, $r_0 \equiv R_0^* / H^*$, 그리고 R 은 기체상수를 의미한다.

초기 상태에서부터 벽에 약한 열적 혹은 기계적인 섭동이 가해지는 경우를 생각하자. 섭동의 크기는 로스비수 $\epsilon \equiv T^{*b} / T_{00}^*$ (혹은 $\equiv U^{*b} / (\Omega^* H^*)$) 로 나타낼 수 있고, 여기서 T^{*b} (혹은 U^{*b}) 는 열적 (혹은 기계적) 인 섭동의 크기를 나타낸다. 지배방정식을 아래와 같은 무차원 변수를 도입하여 선형화시키면 [e.g., Hultgren et al.⁽⁴⁾

$$t = t^* \Omega^*,$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u, v) = \vec{V}^{*b} / \epsilon \Omega^* H^*, \\ p &= p^{*b} / \epsilon (H^* \Omega^*)^2 \rho_{00}^* (r_0 H^*), \\ T &= T^{*b} / \epsilon T_{00}^*, \\ \rho &= \rho^{*b} / \epsilon \rho_{00}^* (r_0 H^*), \end{aligned}$$

Ω^* 로 회전하는 좌표계에 대한 무차원화된 선형 정상 지배방정식은 [e.g., Hultgren et al.⁽⁴⁾, Park & Hyun⁽⁵⁾]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_{00} u) + \rho_{00} \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -2 \rho_{00} v - r \rho &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\ + E \left[\left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) u + \left(\frac{1}{3} + \beta \right) \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \vec{V}) \right], \quad (3) \end{aligned}$$

$$2 \rho_{00} u = E \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v, \quad (4)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + E \left[\nabla^2 w + \left(\frac{1}{3} + \beta \right) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] = 0, \quad (5)$$

$$-4 \alpha^2 r \rho_{00} u = E \nabla^2 T, \quad (6)$$

$$p = \frac{\alpha(\gamma-1)}{4\gamma\alpha^2} (\rho + \rho_{00} T), \quad (7)$$

이 된다. 위에서 $\alpha^2 = \alpha(\gamma-1) M^2 / 4 r_0^2$, β 는 열팽창계수, $\sigma \equiv \mu C_p / k$ 는 프랜틀 수, μ 는 점성계수, C_p 는 정압비열, k 는 열전도계수 그리고 $E \equiv \mu / \rho_{00}^* (R_0) \Omega R_0^2$ 는 Ekman 수를 의미한다.

문제의 초기 및 경계조건은 다음과 같다.

초기조건: $t=0$ 일 때 $u=v=w=T=0$;

경계조건:

$z=0$ 에서 $u=w=0, v=V_S - V_A$ 그리고

$$T = T_S - T_A; \quad (8a)$$

$z=1$ 에서 $u=w=0, v=V_S + V_A$ 그리고

$$T = T_S + T_A; \quad (8b)$$

$r=r_0$ 에서 $u=w=0, v=V_{VW}$ 그리고

$$T = T_{VW} \quad (8c)$$

이다. 여기서

$$V_S = (V_{WT} + V_{WB})/2, \quad V_A = (V_{WT} - V_{WB})/2,$$

$$T_S = (T_{WT} + T_{WB})/2, \quad T_A = (T_{WT} - T_{WB})/2,$$

이다. S 는 대칭(symmetric)성분, A는 반대칭(antisymmetric)성분을 의미하고, VW는 수직벽, WB는 아래 수평벽, WT는 위 수평벽을 의미한다.

3. 압축성 회전유동에서의 Taylor-Proudman Column 유동

$E \ll 1$ 인 경우, 정상상태의 유동을 생각하면 용기의 수평벽 근처의 두께 $O(E^{1/2})$ 인 Ekman 경계층 유동, 용기 수직벽 근처의 두께 $O(E^{1/3})$ 의 inner layer와 두께 $O(E^{1/4})$ 의 outer layer 로 구성된 Stewartson 경계층 유동과 내부 주 유동 영역으로 나눌 수 있다. [Sakurai & Matsuda⁽⁶⁾, Matsuda & Hashimoto⁽⁷⁾] 따라서 유동변수를 expansion parameter, $E^{1/2}$ 로 series 전개하여 scaling analysis 할 수 있다.

3.1 내부 주 유동 해석

Ekman 수평 경계층과의 matching을 고려하여 Sakurai & Matsuda⁽⁶⁾, Bark & Hultgren⁽⁸⁾ 에서와 같은 방법으로 leading order에 대한 scaling law를 찾으면

$$u_i = E^{-1}u, v_i = v, w_i = E^{-1/2}w,$$

$$T_i = T, p_i = p, \rho_i = \rho$$

이고, 여기서 하첨자 i 는 main inner flow에서 크기 $O(1)$ 의 변수를 의미한다. 식 (2)-(6) 으로부터 leading order에 대한 정상상태의 지배방정식을 구하면

$$\frac{\partial w_i}{\partial z} = 0, \quad (9a)$$

$$-2\rho_{00}v_i - r\rho_i + \frac{\partial p_i}{\partial r} = 0, \quad (9b)$$

$$2\rho_{00}u_i = \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_i, \quad (9c)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial z} = 0, \quad (9d)$$

$$-4\alpha^2 r \rho_{00} u_i = \nabla^2 T_i, \quad (9e)$$

$$p_i = \frac{\alpha(\gamma-1)}{4\gamma\alpha^2} (\rho_i + \rho_{00} T_i), \quad (9f)$$

이다. 여기서 식 (9a) 와 (9d)로부터 w_i, p_i 는 r 만의 함수이다.

식(9f)를 식(9b)에 대입하면

$$v_i(r, z) = \frac{r}{2} T_i(r, z) + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{p_i(r)}{\rho_{00}} \right), \quad (10)$$

을 얻을 수 있다. 이식은 $E \ll 1$ 인 경우 압축성 회전 유동에서는 용기의 벽에서 먼 내부 주유동

영역에서의 azimuthal velocity는 식(10)의 오른쪽 첫 번째항인 thermal wind relation 과 두 번째항인 geostrophic relation 의 합에 의해 결정된다는 것을 보여준다. 즉 내부 주유동은 thermal geostrophic-wind relation을 만족한다. [Matsuda & Hashimoto⁽⁷⁾] 식(9c) 와 (9e)에서 u_i 를 제거하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^2 T_i + 2\alpha^2 r \left(\nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) v_i = 0. \quad (11)$$

식(10)을 이용하여 식(11)을 다시 쓰면 Bark & Hultgren⁽⁹⁾ 이 구한 다음의 식을 얻을 수 있다:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1 + \alpha^2 r^2) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_i}{r} \right) \right] + \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} \\ & = \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{p_i}{\rho_{00}} \right) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

이 된다.

내부 주 유동 영역 유체의 specific perturbed energy를 $e_i = T_i + 2\alpha^2 r v_i$ 와 같이 정의하면 식(10)으로부터 온도 T_i 와 속도 v_i 에 대한 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$T_i = \left[e_i - \alpha^2 r \frac{d}{dr} \left(\frac{p_i}{\rho_{00}} \right) \right] / (1 + \alpha^2 r^2), \quad (13a)$$

$$v_i = \left[\frac{r}{2} e_i + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{p_i}{\rho_{00}} \right) \right] / (1 + \alpha^2 r^2). \quad (13b)$$

식(13b)를 식(12)에 대입하면 내부 영역에서의 섭동에너지 e_i 에 관련된 다음의 지배방정식을 얻을 수 있다 :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[r(1 + \alpha^2 r^2) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{E_i}{r} \right) \right] + (1 + \alpha^2 r^2)^2 \\ & \cdot \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} = \frac{d}{dr} \left[\frac{2\alpha^2 r}{1 + \alpha^2 r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{p_i}{\rho_{00}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

여기서 $E_i = r e_i / (1 + \alpha^2 r^2)$ 이다.

3.2 수평 경계층 해석

Ekman 수평 경계층에서의 경계층 변수

$$\zeta_j = E^{-1/2} (1 - (-1)^{j+1} z), \quad (j=0, 1)$$

를 도입하여 (여기서, $j=0, 1$ 은 각각 아래 와 위쪽 수평경계층 변수를 의미한다.), 의미있는 경계층 변수의 leading order scale을 정하면 [Sakurai & Matsuda⁽⁶⁾, Bark, Meijer & Cohen⁽⁸⁾]

$$\hat{u} = u, \hat{v} = v, \hat{w} = E^{-1/2} w, \hat{T} = T, \hat{\rho} = \rho, \hat{p} = E^{-1} p$$

를 얻을 수 있다. 여기서 hat 는 크기 $O(1)$ 의 수평 경계층 변수를 의미한다.

식 (4) 와 (6) 으로부터 leading order 에 대한 정상상태의 지배방정식을 구하면

$$2 \rho_{00} \hat{u} = \partial^2 \hat{v} / \partial \xi_j^2, \quad (15a)$$

$$-4 \alpha^2 r \rho_{00} \hat{u} = \partial^2 \hat{T} / \partial \xi_j^2, \quad (15b)$$

을 얻는다. 식 (15a,b)로부터 경계층 변수에 대한 energy parameter, $\hat{e} = \hat{T} + 2 \alpha^2 r \hat{v}$, 에 대한 방정식 $\partial^2 \hat{e} / \partial \xi_j^2 = 0$,

$$(16)$$

을 얻을 수 있고, 경계층 변수의 조건 $\xi_j \rightarrow \infty, \hat{T}, \hat{v} \rightarrow 0$ 을 고려하면 $\hat{e} = 0$,

$$(17)$$

을 얻을 수 있다.

3.3 수직 경계층 해석

Stewartson 수직 경계층은 두께 $O(E^{1/3})$ 의 inner layer 와 두께 $O(E^{1/4})$ 의 outer layer 로 구성된다.

3.3.1 내부 수직 경계층 유동

내부 수직 경계층에서의 경계층 변수

$$\eta = E^{-1/3} (1-r),$$

를 도입하여 의미있는 경계층 변수의 leading order scale을 정하면 [Sakurai & Matsuda⁽⁶⁾]

$$\bar{u} = E^{-1/3} u, \bar{v} = v, \bar{w} = w,$$

$$\bar{T} = T, \bar{\rho} = \rho, \bar{p} = E^{-1/3} p,$$

를 얻을 수 있다. 여기서 bar 는 크기 $O(1)$ 의 vertical inner layer 변수를 의미한다. 식 (4) 와 (6) 으로부터 leading order 에 대한 정상상태의 지배방정식을 구하면

$$2 \rho_{00} \bar{u} = \partial^2 \bar{v} / \partial \eta^2, \quad (18a)$$

$$-4 \alpha^2 r \rho_{00} \bar{u} = \partial^2 \bar{T} / \partial \eta^2, \quad (18b)$$

을 얻는다. 식 (18a,b)로부터 경계층 변수에 대한 energy parameter, $\bar{e} = \bar{T} + 2 \alpha^2 r \bar{v}$, 에 대한 방정식 $\partial^2 \bar{e} / \partial \eta^2 = 0$,

$$(19)$$

을 얻을 수 있고, 경계층 변수의 조건 $\eta \rightarrow \infty, \bar{T}, \bar{v} \rightarrow 0$ 을 고려하면 $\bar{e} = 0$,

$$(20)$$

을 얻을 수 있다.

3.3.2 외부 수직 경계층

외부 수직 경계층에서의 경계층 변수

$$\xi = E^{-1/4} (1-r),$$

를 도입하여 의미있는 경계층 변수의 leading order scale을 정하면 [Bark & Bark⁽²⁾, Park &

Hyun⁽⁶⁾]

$$\tilde{u} = E^{-1/2} u, \tilde{v} = v, \tilde{w} = E^{-1/4} w,$$

$$\tilde{\rho} = \rho, \tilde{p} = E^{-1/4} p,$$

를 얻을 수 있다. 여기서 bar 는 크기 $O(1)$ 의 vertical inner layer 변수를 의미한다. 식

(4) 와 (6) 으로부터 leading order 에 대한 정상상태의 지배방정식을 구하면

$$2 \rho_{00} \tilde{u} = \partial^2 \tilde{v} / \partial \xi^2, \quad (21a)$$

$$-4 \alpha^2 r \rho_{00} \tilde{u} = \partial^2 \tilde{T} / \partial \xi^2, \quad (21b)$$

을 얻는다. 식 (21a,b)로부터 경계층 변수에 대한 energy parameter, $\tilde{e} = \tilde{T} + 2 \alpha^2 r \tilde{v}$, 에 대한 방정식 $\partial^2 \tilde{e} / \partial \xi^2 = 0$,

$$(22)$$

을 얻을 수 있고, 경계층 변수의 조건 $\xi \rightarrow \infty, \tilde{T}, \tilde{v} \rightarrow 0$ 을 고려하면 $\tilde{e} = 0$,

$$(23)$$

을 얻을 수 있다.

3.4 Taylor-Proudman column 유동을 위한 조건

앞서의 해석 결과로부터 수평, 수직 경계층 변수에 의해 정의된 energy parameters,

$$\hat{e} [\equiv \hat{T} + 2 \alpha^2 r \hat{v}], \quad \bar{e} [\equiv \bar{T} + 2 \alpha^2 r \bar{v}],$$

$\tilde{e} [\equiv \tilde{T} + 2 \alpha^2 r \tilde{v}]$ 들이 identically zero 임을 알 수 있다. 따라서, 내부 유동장의 변수로 정의된

$$e_i [\equiv T_i + 2 \alpha^2 r v_i]$$

에 관한 식(8)의 경계조건이 $e_i(r) = e_w(r) (\equiv T_w + 2 \alpha^2 r V_w)$,

$$(24)$$

이 됨을 알 수 있다. 여기서, T_w, V_w 은 각각 용기 벽의 온도와 회전방향 속도를 의미한다.

유동장을 회전축 방향으로 변화가 없는 Taylor-Proudman column 유동으로 가정하면 식 (3.7)로부터 방정식

$$\frac{d e_i}{d r} - \frac{2 \alpha^2 r e_i}{1 + \alpha^2 r^2} = \frac{2 \alpha^2}{1 + \alpha^2 r^2} \frac{d}{d r} \left(\frac{p_i}{\rho_{00}} \right), \quad (25)$$

을 얻을 수 있다. 그리고 e_i 는 경계조건 (24)로부터

$$e_i(r) = T_{wT} + 2 \alpha^2 r V_{wT} \\ = T_{wB} + 2 \alpha^2 r V_{wB}, \quad (26)$$

을 만족하고, 비점성 영역에서의 압력은

$$\frac{d}{d r} \left(\frac{p_i}{\rho_{00}} \right) = V_{wT} + V_{wB} - \frac{r}{2} (T_{wT} + T_{wB}), \quad (27)$$

의 관계를 가지므로 [Bark & Hultgren⁽⁹⁾, 식 (26) 과 (27) 로부터 압력에 대한 다음의 관계식을 얻을 수 있다:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{p_i}{\rho_{00}} \right) = (1 + \alpha^2 r^2) (V_{WT} + V_{WB}) - r e_i, \quad (28)$$

결과적으로 에너지변수에 대한 지배방정식

$$\frac{d e_i}{dr} = 2 \alpha^2 (V_{WT} + V_{WB}) = 4 \alpha_2 V_S, \quad (29)$$

을 얻는다. 식 (29)의 해는

$$e_i = 4 \alpha_2 \int V_S dr, \quad (30)$$

위 식과 식(26)을 이용하면

$$T_S = 4 \alpha^2 \int V_S dr - 2 \alpha^2 r V_S, \quad (31)$$

이다. 결과적으로 내부 영역에서의 유동이 Taylor-Proudman column 유동이 되기 위해서는 식(26) 과 (31)을 동시에 만족해야 한다.

기본유동에 대해 위 결과를 적용시키면, Taylor-Proudman column 유동이 되기 위해서는 (1) 반대칭(antisymmetric) 경계조건인 경우에는

$$e_i = v_i = T_i = 0, \quad \text{그리고}$$

$$T_{WT} + 2 \alpha^2 r V_{WT} = T_{WB} + 2 \alpha^2 r V_{WB} = 0,$$

(2) 대칭(symmetric) 경계조건인 경우 즉,

$$V_{WT} = V_{WB} = c_1 r, \quad T_{WT} = T_{WB} = c_2,$$

(c_1, c_2 는 임의의 상수), 일 때에는

$$e_i = c_2 + 2 \alpha^2 r c_1, \quad v_i = V_S, \quad T_i = T_S,$$

의 조건을 만족해야 함을 쉽게 확인할 수 있다.

4. 에너지 변수 (e) 의 물리적 의미

용기의 벽에서 먼 내부 유체 의 유동이 Taylor-Proudman column 유동이라고 가정하자. 이때 용기 벽 근처의 수평 경계층 내부에서 일어나는 에너지 평형을 고려하자.

초기의 상태를 용기와 유체가 등은, 강제회전 하는 경우를 생각하자. 이때 회전 각속도는 Ω^* 로 일정하게 회전하는 상태이다. 용기 벽에 로스비 수 $\epsilon (\ll 1)$ 크기의 미소 섭동이 아래와 같이 가해진 경우를 생각하자. (Fig. 1 참조)

$$v^* = \Omega^* r^* + \epsilon V_{W}^*, \quad (32)$$

$$T^* = T_{00}^* + \epsilon T_{W}^*, \quad (33)$$

여기서, 상첨자 * 는 차원변수, 하첨자 00 는 초기 상태, 하첨자 W는 벽에 가해진 섭동성분을 의미한다. 본 장에서 생각하는 속도는 이진과 달리 회전 좌표계 (rotating coordinate)가 아닌 관성 좌표계 (inertial coordinate)에 대한 것이다. 이제 Fig. 1에서 주어진 제어체적 내의 유체가 주고받는 에너지량을 생각하자. 제어체적내의 유체는 벽에 가해진 미소 섭동에 의해 벽과 유체 사이에는 속도기울기에 의한 마찰이 생기고 이로 인해 다음과 같은 단위시간 당 기계적인 일 벽으로부터 받는다:

$$\delta W_j^* = -\mu^* \cdot \epsilon \left(\frac{\partial v^*}{\partial n^*} \right)_{\text{at the wall}} \cdot (\Omega^* r^* + \epsilon v^*) \cdot A^*. \quad (34)$$

마찬가지로 다음과 같은 용기 벽과 유체 사이의 온도차이에 의해 발생하는 단위시간 당 열에너지를 벽으로부터 받는다:

$$\delta Q^* = -\epsilon k^* \left(\frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right)_{\text{at the wall}} \cdot A^*. \quad (35)$$

여기서 n^* 은 용기 벽에 수직방향을 의미하고, μ^* 와 k^* 는 각각 유체의 점성계수와 열전도 계수를 의미한다. 마지막으로 Fig. 1에서처럼 유체가 제어체적을 지나면서 초기 기본상태에서 주어진 압력을 이기고 외부로 하는 유동일은

$$\begin{aligned} \delta W_p^* &= \epsilon \int_0^{\delta z} \frac{u^*}{\Omega^*} \frac{dp_{00}^*}{dr^*} dz^* \cdot A^* \\ &= -\epsilon \frac{\mu^*}{2\rho_{00}^* \Omega^*} \left(\frac{\partial v^*}{\partial n^*} \right)_{\text{at the wall}} \cdot \frac{dp_{00}^*}{dr^*} \cdot A^*, \end{aligned} \quad (36)$$

이다. 위에서 $A^* = 2\pi r^* dr^*$ 를 의미한다.

$\epsilon \ll 1$ 인 경우 반경 r^* 에 위치한 수평 경계층 내부 유체가 단위시간당 외부와 주고받는 총 에너지량은

$$\begin{aligned} \delta E^* &= \delta W_j^* + \delta Q^* - \delta W_p^* \\ &\cong -\epsilon \frac{\partial}{\partial n^*} \left(\Omega^* r^* \mu^* v^* \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu^*}{2\rho_{00}^*} \frac{v^*}{\Omega^*} \frac{dp_{00}^*}{dr^*} \right)_{\text{at the wall}} \quad (37) \end{aligned}$$

로 나타난다.

이상의 결과로부터 총 에너지량이 우변의 괄호 안에 나타나는 물리량

$$\begin{aligned} T.E. &= \epsilon \left(\Omega^* r^* \mu^* v^* + k^* T^* \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu^*}{2\rho_{00}^*} \frac{v^*}{\Omega^*} \frac{dp_{00}^*}{dr^*} \right)_{\text{at the wall}} \quad (38) \end{aligned}$$

