

# P2P1 유한요소를 이용한 LES

최형권\* · 남영석\*\* · 유정열\*\*\*

## Large Eddy simulation using P2P1 finite element formulation

Hyung-Gwon Choi (Bk21, Mech. Engrg. Research Div., Seoul Nat. Univ.), Youngsok Nam (L.G. Electronics) and Jung Yul Yoo (School of Mech. & Aero. Engineering, Seoul Nat. Univ.)

**Key Words:** LES (큰에디 모사법), P2P1 element (P2P1유한요소), SUPG (유선상류법), MILU (수정된 ILU), MIRA model (MIRA 모델)

### Abstract

A finite element code based on P2P1 tetra element has been developed for the large eddy simulation (LES) of turbulent flows around a complex geometry. Fractional 4-step algorithm is employed to obtain time accurate solution since it is less expensive than the integrated formulation, in which the velocity and pressure fields are solved at the same time. Crank-Nicolson method is used for second order temporal discretization and Galerkin method is adopted for spatial discretization. For very high Reynolds number flows, which would require a formidable number of nodes to resolve the flow field, SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) method is applied to the quadratic interpolation function for velocity variables. Noting that the calculation of intrinsic time scale is very complicated when using SUPG for quadratic tetra element of velocity variables, the present study uses a unique intrinsic time scale proposed by Codina et al. since it makes the present three-dimensional unstructured code much simpler in terms of implementing SUPG. In order to see the effect of numerical diffusion caused by using an upwind scheme (SUPG), those obtained from P2P1 Galerkin method and P2P1 Petrov-Galerkin approach are compared for the flow around a sphere at some Reynolds number. Smagorinsky model is adopted as subgrid scale models in the context of P2P1 finite element method. As a benchmark problem for code validation, turbulent flows around a sphere and a MIRA model have been studied at various Reynolds numbers.

### 1. 서론

지난 10 여년 동안 병렬처리용 대용량컴퓨터를

포함한 컴퓨터의 급속한 발달로 인해 유한요소법은 복잡한 형상을 가지는 물체 주위의 유동장을 포함한 대용량 계산에 효과적으로 쓰여왔다. Tezduyar등<sup>[1]</sup>과 Johnson등<sup>[2]</sup>은 여러 가지 실제적인 문제들에 대해 안정화된 P1P1 유한요소법을 이용하여 병렬계산을 수행하였다. P1P1 유한요소법은 비교적 병렬화가 용이한 대각항 예조건화(diagonal preconditioning)를 쉽게 구현할 수 있

\* BK21, 서울대 기계분야사업단

\*\* LG 전자

\*\*\* 서울대학교 기계항공공학부

는 장점이 있다. Johnson등<sup>[2]</sup>은 이 방법을 이용하여 자동차 주위의 유동장을 계산하였는데 난류모델로는 Smagorinsky 모델을 이용하였다. 한편으로, Joseph등<sup>[3]</sup>은 P2P1 유한요소법을 이용하여 2상유동을 포함한 대응량 계산을 수행하고 있다. P1P1 유한요소법과는 다르게 P2P1 유한요소법은 압력과 속도가 내재적으로 결합된 경우 대각항 예조건화 (diagonal preconditioning)가 효과적으로 작동하지 않는 어려움이 있다.

Joseph등<sup>[3]</sup>은 P2P1 유한요소법을 위한 예조건인자 (preconditioner)를 개발하고 실제 유동장문제에 적용하여 검증하는 작업을 하고 있다. 본 연구에서는 최형권<sup>[4]</sup>에 의해서 개발된 P2P1 유한요소와 분리유한요소법을 이용한 2차원 코드를 확장하여 큰 에디모사 (large eddy simulation)를 위한 3차원 분리유한요소코드를 개발하고 MIRA모델 주위의 유동장을 해석하였다. 한편, 물체 주위의 레이놀즈 수가 매우 큰 유동장을 계산할 경우 Galerkin 방식으로는 해를 구하기가 어려우므로 SUPG를 도입하였다.

## 2. 지배방정식 및 수치 기법

### 2.1 지배방정식

지배방정식은 3차원 비정상 비압축성 유동에 관한 Navier-Stokes 방정식과 연속방정식이다.

### 2.2 지배방정식의 이산화

본 연구에서는 완전내재적 4단계 분리계산 방법<sup>[5,6]</sup>을 P2P1 유한요소법에 적용하였다. 이전 시간 단계에서 계산된 압력장을 이용하여 첫 단계에서는 다음과 같이 공식화되는 운동량 방정식을 푼다. 여기서 와점도 (eddy viscosity)는 LES를 이용하여 모델링된다.

Find  $\hat{U} \in H'$  such that

$$\int (\bar{W} \frac{D\hat{U}}{Dt} + \nabla \bar{W} : \hat{\sigma}) d\Omega = 0$$

for all admissible functions

$$\bar{W} \in V_h$$

$$\text{where } V_h = \{v_h | v_h \in H', v_h = 0 \text{ on } \Gamma_g\} \quad (1)$$

$$\hat{\sigma} = -p^n I + \tau \quad \tau = 2\nu_e \hat{D}_{ij}$$

$$v_e = v + v_t \quad v_t = C\Delta^2 \bar{S}$$

$$\bar{S} = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad S_{ij} = D_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

중간 (Intermediate) 속도의 경계조건은  $\hat{U} = U^{n+1}$ 으로 주어진다. 유한요소공식화를 거쳐 비대칭행렬이 얻어지며 이는 Bicgstab<sup>[7]</sup>을 이용하여 풀어진다. 예조건화 (Preconditioning)로는 대각항 예조건화 (diagonal preconditioning)가 사용된다. 두 번째 계산단계에서는 이전단계에서 얻어진 압력장을 이용하여 다음 식을 푼다. 이 단계는 운동량 방정식의 경계조건이 시간에 대해 2차의 정확도를 유지하게 하는데 필요하다.

$$\frac{U^* - \hat{U}}{\Delta t} = \nabla p^n \quad (2)$$

마지막 단계에서는 통상적으로 압력에 대한 Poisson 방정식이 얻어지며 이를 풀어 얻은 압력장을 이용하여 속도장이 수정된다. 하지만, 본 연구에서는 속도와 압력이 결합된 시스템을 푼다. 이로 인해 메모리와 계산량은 증가하지만 압력에 대한 경계조건이 필요하지 않으며 더 견고한 알고리즘이 된다. 마지막 단계에서는 다음의 식을 푼다.

$$\frac{U^{n+1} - U^*}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot U^{n+1} = 0$$

식 (3)을 P2P1 유한요소를 이용하여 이산화할 경우 다음과 같은 형태의 전체행렬이 얻어지며 이는 주어진 비정렬격자계에 대해서 항상 일정하다. 그러므로 한번 생성된 전체 행렬과 대응되는 MILU 예조건인자 (preconditioner)<sup>[3,8]</sup>는 격자계가 바뀌지 않는 한 전체 계산동안 사용된다.

$$\begin{bmatrix} M & G \\ G^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

식 (4)는 MILU 예조건화 (preconditioning)와 공액구배 (Conjugate Gradient)를 이용하여 푼다. 레이놀즈수가 매우 높은 유동을 해석하기 위하여 SUPG를 P2P1 유한요소체에 적용하였다. Codina 등<sup>[9]</sup>에 의해서 지적된 데로 최적화된 upwind 함수는 P2요소의 경우 유동방향에 따라 노드마다 다른 함수 형태를 가지게 된다. 따라서, 이를 3차원 비정렬격자계 문제에 적용할 경우 코드는 매우 복잡해지게 된다. 따라서, 본 연구에서는 코드를 단순화하기 위해서 Codina 등<sup>[9]</sup>에 의해서 제안된 unique upwind 함수를 이용한다. 그 방법을 따르면 SUPG 가중 함수는 다음과 같이 주어진다. 여기서  $\gamma$ 는 요소 페클릿 수이고  $h_e$ 는 유한요소의 특성길이이다.

$$\tilde{W} = W + s\vec{U} \cdot \nabla W$$

$$\text{where } s = \frac{\alpha h_e}{2|u|_e}$$

and  $\alpha$  is a function of element Peclet number such that;

$$\alpha = \begin{cases} \gamma/6 & 0 < \gamma < 3 \\ 1/2 & 3 < \gamma \end{cases}, \quad \gamma = \frac{|u|h_e}{2\nu}$$

난류 모델링으로는 Smagorinsky 모델을 이용하였다. 모델상수는 0.01을 이용하였다.

### 3. 수치 결과

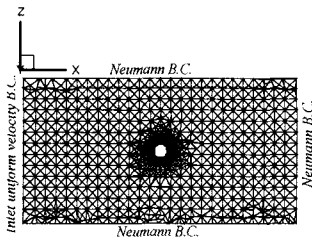


Fig. 1 Unstructured mesh around a sphere

본 연구에서 사용된 SUPG 방법의 정확성을 확인하기 위하여 구 주위의 층류유동을 레이놀즈 수 100에서 해석하여 다른 연구결과와 비교하였다. Fig. 1은 계산에 사용된 격자계와 경계조건을 나타낸다. 그림에서는 후처리 과정을 효율적으로 하기 위해서 vertex 절점만을 표시하였다.

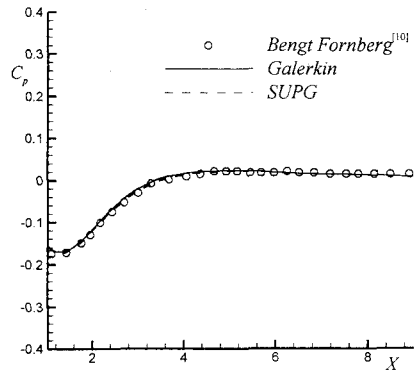


Fig. 2 Pressure along the center of wake

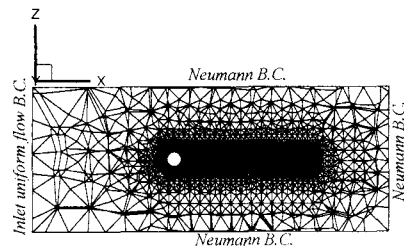


Fig. 3 Unstructured mesh around a sphere

Fig. 2에서 보듯이 SUPG를 이용한 해는 Galerkin 해와 비교적 잘 일치함을 보여준다. 그리고 두 해는 Fornberg<sup>[10]</sup>에 의해서 얻어진 해와 잘 일치한다. 계산에 사용된 총 절점수는 97,193이며 총 변수 수는 304,357이다.  $Re = 200$ 에서도 계산을 수행하여 얻어진 항력계수는 0.799이며 이는 실험치<sup>[11]</sup> 0.8과 잘 일치하는 결과이다. 한편 이 때 형상저항은 약 56%를 차지한다. Fig. 3은 레이놀즈수가 높을 때 LES를 이용한 계산에 사용된 격자계를 보여준다. 총 절점 수는 588,574이며 변수 수는 약 180만개이다. 속도구배가 큰 구 주위와

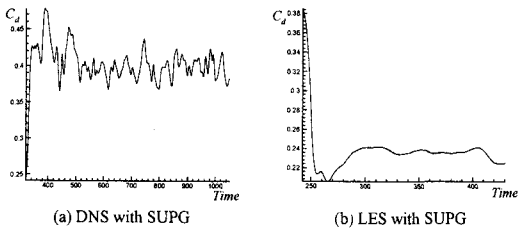


Fig. 4 Drag history of a sphere at  $Re=10^6$

wake영역 근처에 밀집된 메쉬를 이용하였다. 계산에서 사용된 메쉬는 상당히 조밀하지만 레이놀즈 수가 10,000이 넘을 경우 SUPG를 사용하지 않을 때 발산하였다. 따라서, 본 연구에서는

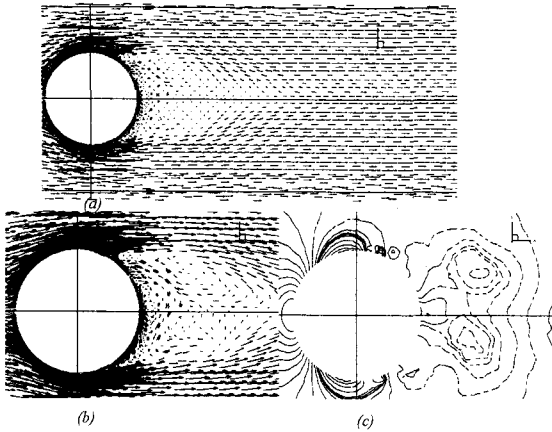


Fig. 5 Velocity field and pressure contour at  $Re=106$  around a sphere

레이놀즈수가 클 때 SUPG를 사용하여, LES 모델링이 해에 미치는 효과를 보았다. Fig. 4(a)는 레이놀즈 수가  $10^6$  이고 LES 모델을 사용하지 않았을 경우에 항력 이력곡선을 나타낸다. 하지만, 이 경우에는 수치확산이 포함되어 있으므로 DNS (직접수치모사 방법)와는 구별되어야 한다. SUPG는 upwind 계열중 수치 확산이 적은 방법으로 알려져 있음에도 불구하고 그림에서 보듯이 항력계수는 실험치와 많은 차이를 보인다. 따라서, 수치확산으로 인해 SUPG를 사용한 DNS결과는 천이점을 지난 높은 레이놀즈수에서 항력계수를 정량적으로 예측하는데는 많은 문제가 있음을 알 수 있다. 한편 Fig. 4(b)는 LES를 사용한 경우 구

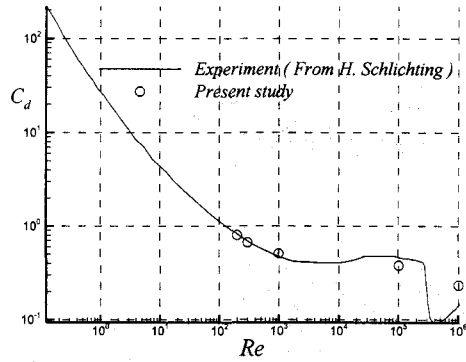


Fig. 6  $C_d$  curve of a sphere

주위의 항력계수의 이력곡선을 나타낸다. 이 경우의 항력계수는 LES를 사용하지 않은 경우에 비해 실험치에 더 근접해 있지만, 여전히 실험치<sup>[11]</sup>와 차이를 보임을 알 수 있다. 본 연구에서는 SUPG가 LES해에 미치는 영향을 좀 더 자세히 알아보기 위해서 Fig. 3에 주어진 메쉬를 이용하여 SUPG를 끈 상태에서 LES를 수행하였으나 레이놀즈수가 큰 경우에는 수렴된 해를 얻을 수가 없었다. 따라서, 이 문제는 현재 진행중인 병렬코드가 개발된 후 시도될 것이다. Fig. 5는 레이놀즈수  $10^6$ 에서 LES를 사용한 계산 결과를 보여준다. Fig. 6은 레이놀즈수에 따른 항력계수의 변화를 나타낸다. 레이놀즈수가  $10^3$  보다 큰 경우에는 SUPG를 사용하였다. 레이놀즈수가 1,000까지는 수치계산 결과는 실험과 잘 일치함을 볼 수 있다. 하지만, 천이 영역 근처에서 항력계수는 실험치와 차이를 보이고 있다. 이 차이를 해결할 수 있는 유일한 해결책은 수치확산을 배제한 상태에서 더 조밀한 격자계로 계산을 수행하는 것이라 믿어지며, 이를 위해서는 대용량 계산을 가능하게 하는 병렬코드를 사용해야 된다.

또 다른 예제로 MIRA모델 주위의 난류 유동장을 레이놀즈수  $2 \times 10^6$ 에서 해석하였다. 레이놀즈수는 MIRA모델의 높이와 입구 속도를 기준으로 한다. Smagorinsky LES 모델과 SUPG를 이용하였다. P2P1 사면체 요소를 이용하여 계산 영역을 채운 후에 경계층을 분해하기 위해 MIRA모델 표면 주위에 종횡비가 아주 큰 프리즘 요소를 삽입한 후 이를 다시 P2P1 사면체 요소로 분할하는 방식을 이용하여 전체 격자계를 구성하였다. 격자계는 ICEM CFD를 이용하여 생성하였다. 전

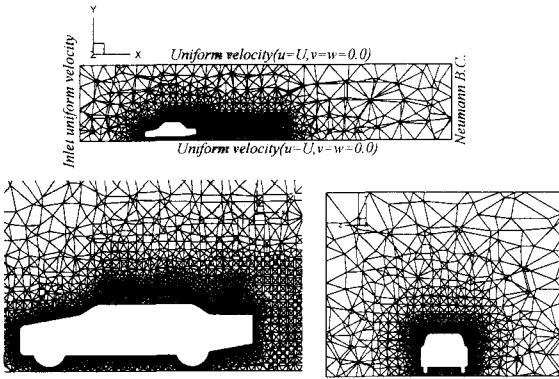


Fig. 7 Unstructured meshes around a MIRA model

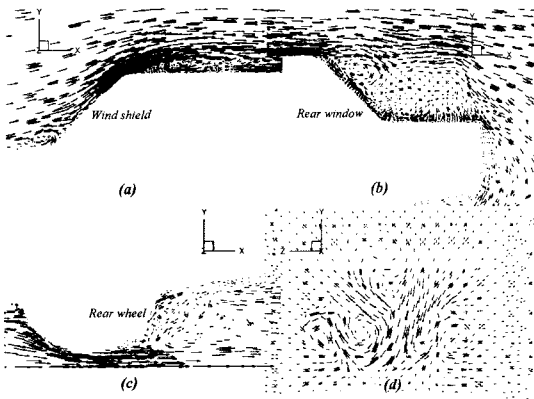


Fig. 8 Velocity fields at various regions

체 절점의 수는 710,150이며 총 변수 수는 약 220만개이다. Fig. 7은 몇 단면에서 MIRA모델 주위의 비정렬격자계를 경계조건과 함께 보여준다. Fig. 7은 주행상태에 대한 경계조건을 나타낸다. Fig. 8은 몇 영역에서의 속도 벡터들을 나타낸다. 여기서 보듯이 MIRA모델 주위의 유동장은 매우 복잡함을 알 수 있다. 앞 창문 앞에 강한 역류가 형성되고 지붕의 양 끝단 근처에 또한 역류가 형성됨을 볼 수 있다. 뒷 창문에는 강한 역류가 형성됨을 볼 수 있다. Fig. 9는 MIRA 모델의 대칭면의 윗면을 따라서 얻은 압력계수를 실험치와 비교한다. 본 계산 결과는 첫 번째 정점에서 실험치와 잘 일치한다. 하지만 두 번째 정점에서는 다른 계산 결과들과 마찬가지로 큰 차이를 보인다. 두 번째 정점의 불일치를 제외하고는 계산 결과는 실험치와 비교적 잘 일치한다. 반면에,  $k-\epsilon$  모델을 이용한 유한체적법의 결과<sup>[12]</sup>는 첫째 및 두 번째 정점에서 실험치와 차이를 보인다.

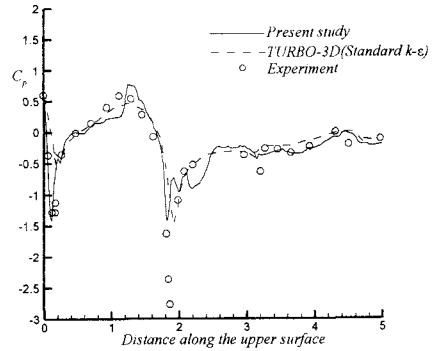


Fig. 9  $C_p$  curve along the upper surface of a MIRA model

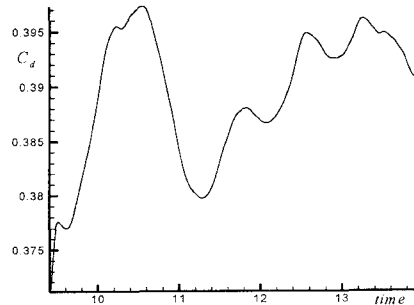


Fig. 10 Drag history of a MIRA model at  $Re = 2 \times 10^6$

다. 그들은  $140 \times 40 \times 50$  정렬격자계를 사용하였으며 정상상태의 해를 구하기 위해 대칭조건을 이용하여 MIRA모델의 절반만을 계산하였다. 압력분포에서 2차 정점의 차이는 지붕의 양 끝단에서 메쉬의 밀집도가 충분하지 못한데 기인하며, 본 연구에서는 좀 더 성긴 메쉬로 계산했을 경우 2차 정점의 차이가 더 크음을 확인하였다. 다 상세한 내용은 참고문헌 [13]을 참고하라. 또 다른 부차적인 이유로는 수치계산에 사용된 경계조건이 실험의 풍동조건과 다르다는 점과 풍동에서의 blockage 효과가 계산에서는 고려되지 않았다는 점이 있다. Fig. 9의 결과는 주행조건으로부터 얻어진 결과임을 주목하라. 본 연구에서 풍동조건은 사용된 전체 절점의 수를 절약하기 위해 풍동의 벽에서 미끄러짐 조건을 사용하여 구현하였다. Fig. 10은 주행조건에서 MIRA모델 주위의

항력이력곡선을 나타낸다. 얻어진 항력계수는 약 0.38이며 이는 풍동조건으로 얻어진 실험치<sup>[14]</sup> 0.316보다 약 20% 정도 크다. 한편, 풍동조건을 이용했을 경우 항력계수는 약 0.365로서 실험치보다 약 15% 정도 크게 예측된다. 이 차이는 MIRA모델 표면 주위에 좀 더 조밀한 격자계를 사용하면 줄어들 것으로 여겨지며 앞으로 추가적인 계산이 수행되어야 한다. 하지만, 유한체적법과  $k-\epsilon$ 이나 RNG  $k-\epsilon$ 을 이용한 결과와 비교하면 상당히 고무적인 결과라 할 수 있다. 허남건등<sup>[12]</sup>의 결과에 의하면 항력계수는 표준  $k-\epsilon$ 과 RNG  $k-\epsilon$ 을 이용했을 때 각각 0.544, 0.507이다.

## 후기

이 연구는 차세대자동차개발사업과 BK21 사업의 지원으로 수행되었으며 격자생성프로그램을 제공해준 CMSTECH에 감사의 뜻을 전합니다.

## 참고문헌

- (1) Tezduyar, T. E., Behr, M., Mittal, S. and Johnson, A. A., 1992, Computation of Unsteady Incompressible Flows with the Finite Element Methods - Space-Time Formulations, Iterative Strategies and Massively Parallel Implementations, in P. Smolinski, W. K. Liu, G. Hulbert, and K. Tamma, Editors, New Methods in Transient Analysis, AMD-Vol. 143, ASME, New York, pp. 7-24.
- (2) Johnson, A. A., and Tezduyar, T. E., 1997, "Parallel Computation of Incompressible Flows with Complex Geometries", Inter. J. for Numerical Methods in Fluids, 24, pp. 1321-1340.
- (3) Joseph, D. D. et al., 1998-2001, Direct Simulation of the Motion of Particles in Flowing Liquids, NSF KDI/New Computational Challenge.
- (4) Choi, H. G., 2000, "Splitting Method for the Combined Formulation of Fluid-Particle Problem", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190, pp. 1367-1378.
- (5) Choi, H., and Moin, P., 1994, "Effects of the Computational Time Step on Numerical Solutions of Turbulent Flow", J. Comp. Phys., 113, pp. 1-4.
- (6) Choi, H. G., Choi, H., and Yoo, J. Y., 1997, "A Fractional Four-Step Finite Element Formulation of the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations Using SUPG and Linear Equal-Order Element Methods", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 143, pp. 333-348.
- (7) Van der Vorst, H. A., 1992, "Bi-CGSTAB: A Fast and Smoothly Converging Variant of Bi-CG for the Solution of Non-Symmetric Linear Systems", SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 12, pp. 631-634.
- (8) Nam, Y. S., Choi, H. G., and Yoo, J. Y., 2001, "MILU Preconditioning for P2P1 finite element formulation of the incompressible Navier-Stokes equations", In preparation.
- (9) Codina, R., Onate, E., and Cervera, M., 1992, "The Intrinsic Time for the Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulation Using Quadratic Elements", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 94, pp. 239-262.
- (10) Fornberg, B., 1988, "Steady Viscous Flow Past a Sphere at High Reynolds Numbers", J. Fluid Mech., 190, pp. 471-489.
- (11) Schlichting, H., 1999, *Boundary Layer Theory*, 8th Revised and Enlarged Ed., Springer.
- (12) Hur, N., Ahn, I. K., Kim, S. R., Lee, K. H., and Lee, S. C., 1995, A Study on Vehicle Aerodynamics by using CFD: Simulation of 3-D Flow Fields around MIRA Reference Vehicle Model, AFR-94-B04.
- (13) Oh, M. S., and Kang, S. J., 1994, "External Flow Analysis on the Basic Car Shape", *Proc. KSAE Autumn Annual Meeting* 94, pp. 162-167.
- (14) Anonymous, 1992, "Validation of CFD Codes for Predicting Aerodynamic Performance", *Automotive Engineer*, 17, pp. 46-49.