

분할단계법의 경계조건에 관한 연구: 적합성, 안정성 및 정확도

김 영 배*. 이 문 주**. 오 병 도***

Investigation on Boundary Conditions of Fractional-Step Methods: Compatibility, Stability and Accuracy

Young Bae Kim, Moon J. Lee and Byung Do Oh

Key Words : Navier–Stokes equation (나비에-스톡스 방정식); incompressibility (비압축성); fractional-step methods (분할단계법); boundary conditions (경계조건); compatibility condition (적합성조건); stability (안정성); accuracy (정확도).

Abstract

An analytical and numerical examination of second-order fractional-step methods and boundary condition for the incompressible Navier–Stokes equations is presented. In this study, the compatibility condition for pressure Poisson equation and its boundary conditions, stability, and numerical accuracy of canonical fractional-step methods has been investigated. It has been found that satisfaction of compatibility condition depends on tentative velocity and pressure boundary condition, and that the compatible boundary conditions for type D method and approximately compatible boundary conditions for type P method are proper for divergence-free velocity for type D and approximately divergence-free for type P method. Instability of canonical fractional-step methods is induced by approximation of implicit viscous term with explicit terms, and the stability criteria have been founded with simple model problems and numerical experiments of cavity flow and Taylor vortex flow. The numerical accuracy of canonical fractional-step methods with its consistent boundary conditions shows second-order accuracy except D_{MM} condition, which make approximately first-order accuracy due to weak coupling of boundary conditions.

1. 서론

본 논문은 Navier–Stokes 방정식을 풀기 위한 분할단계법(fractional-step methods)에 필요한 경계 조건의 적합성 및 안정성 그리고 정확도의 시험에 관하여 기술하고 있다. 최근 Lee, Oh and Kim⁽⁴⁾ (앞으로 LOK 로 언급함) 은 generalized approximate factorization 방법을 이용하여 표준 분할단계법(canonical fractional-step method)과 그 일관된 경계 조건을 구축하였다. 표준 분할단계법의 적절한

performance 를 얻기 위해 (i) pressure Poisson 방정식 경계조건의 적합성 (compatibility), (ii) numerical solution 의 안정성 (stability) 등을 고려하여야 한다.

압력 Poisson 방정식의 해가 존재하기 위해서는 그 경계조건이 적합성조건을 만족해야 한다. 이산화된 system 에서의 적합성조건의 만족여부는 압력에 관한 경계조건, pressure Poisson 방정식 그리고 사용된 grid system 및 이산화방법등에 따라 결정된다⁽¹⁾. 만약 적합성조건을 만족하지 못할 경우에는 적절한 근사화로 해를 구해야 하는데 경우에 따라 매우 큰 divergence 의 오차를 발생할 수가 있기 때문에 반드시 엄밀한 시험이 필요하다.

분할단계법에 대한 안정성은 여러 연구에서 논의되었다 (Orszag et al.⁽⁵⁾, Simo and Armero⁽⁷⁾). 분할 단계법에서의 불안정성은 split 방정식과 경계조건

* 포항공과대학교, 첨단유체공학연구소

** 정희원, 포항공과대학교, 첨단유체공학연구소

*** 포항공과대학교, 첨단유체공학연구소

의 구축에 있어서 implicit viscous term 을 explicit term 으로 근사화하여 처리하는 경우에 발생할 수 있다. LOK 에서는 이러한 근사화를 사용하여 만든 split 방정식과 경계조건이 있는데 이러한 경우에 개발된 분할단계법을 실제 계산에 사용하려면 이에 대한 안정성의 시험이 필요하다.

본 연구의 목적은 분할단계법의 실제 사용을 위한 두가지 요소 (i) split 방정식과 경계조건에 대한 적합성만족여부와 (ii) 분할단계법에서의 안정성에 대한 criterion 들을 연구하는 것이며, 또한 표준 분할단계법의 속도장 divergence 와 정확도를 시험하는 것이다.

2. 표준 분할단계법과 경계조건

2.1 Navier-Stokes 방정식의 차분화와 표준 분할단계법

본 장에서는 LOK 에서 개발된 표준 분할단계법과 그 경계조건에 대하여 간략하게 기술하고자 한다. 먼저 비압축성의 Navier-Stokes 방정식의 운동량식과 연속방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

여기서 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 와 $p(\mathbf{x}, t)$ 는 각각 속도와 압력이며 Re 는 고려하고 있는 유동의 Reynolds 수를 나타낸다. Navier-Stokes 방정식을 시간과 공간에 대하여 차분한 matrix 식은 속도와 압력이 결합되어 있는 방정식으로 이것을 직접 풀기에는 매우 비용이 많이 드는 일로서 분할단계법을 적용함으로써 그 비용을 크게 줄일 수 있다. LOK 에서는 second-order 분할단계법을 만들기 위해 approximate factorization 방법을 적용하였고 이러한 방법으로 가능한 조합인 D, P, M 형의 방법을 만들었다. 이 방법을 앞으로의 논의에서 표준 분할단계법으로 지칭할 것이다.

표준 분할단계법 D 형은 다음과 같은 semi-discrete form 으로 쓸 수 있다:

$$A\mathbf{u}^* = \mathbf{r}, \quad (3a)$$

$$D\mathbf{u}^* - \Delta t DG\phi^{(n+1)} = 0, \quad (3b)$$

$$\mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t G\phi^{(n+1)} = \mathbf{u}^*. \quad (3c)$$

여기서 D 와 G 는 각각 divergence 와 gradient operator 를 나타내며 \mathbf{r} 은 time step (n)에 알 수 있는 모든 양을 나타낸다. $\phi^{(n+1)}$ 와 \mathbf{u}^* 는 fictitious pressure 와 tentative velocity 를 뜻한다. 또한 A 는 1

- $\Delta t B$ 이며 B 는 시간에 대한 차분방법에 따라 달라지는데 Crank-Nicolson 방법에서는 $(1/2\text{Re})\nabla^2$ 를 나타내며 fully explicit 방법에서는 0 이다. D 형방법은 실제압력 p 와 fictitious pressure ϕ 간의 차이가 $O(\Delta t)$ 크기의 오차를 가지며 속도의 divergence 는 정확히 0 이 되는 방법이다.

P 형방법은 다음과 같은 semi-discrete form 으로 쓸 수 있다:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{r}, \quad (4a)$$

$$D(1 + \Delta t B)\mathbf{u}^* - \Delta t DG\phi^{(n+1)} = 0, \quad (4b)$$

$$A\mathbf{u}^{(n+1)} + \Delta t G\phi^{(n+1)} = \mathbf{u}^*. \quad (4c)$$

P 형방법은 fictitious pressure 와 실제압력이 일치하며 비압축성은 $D\mathbf{u} = O(\Delta t^2)$ 로 근사적으로 만족하는 방법이다.

LOK 에서는 fictitious pressure 의 transform 을 이용하여 새로운 분할단계법 D*와 P*를 만들었다⁽²⁾. D*형은 D 형과 같이 정확히 비압축성을 만족하는 방법이며 또한 fictitious pressure 과 실제압력이 $O(\Delta t^2)$ 의 차이로 매우 정확한 방법이다. 또한 P*형은 P 형과 유사한 성질이 가진다. 본 연구에서는 M 형에 대한 고려는 하지 않았다.

2.2 분할단계법의 경계조건

LOK 에서는 second-order accuracy 에 일관된 경계조건을 찾기 위해 (1) fictitious pressure 혹은 tentative velocity 에 대한 표현을 이미 알려져 있는 값으로 근사하고 (2) 이것을 경계에서의 값으로 취하였다. Second-order accuracy 에 일관된 경계조건은 tentative velocity 와 fictitious pressure 에 대하여 각각 $O(\Delta t^2)$ 과 $O(\Delta t)$ 의 정확도를 가져야 한다. 본 연구에서 고려하는 일관된 경계조건의 조합과 함께 일관된 경계조건이 아닌 Z 형 경계조건이 Table I 에 나타나 있다. 전통적인 1 차정확도의 MAC 방법⁽³⁾에서 사용되는 Z 형은 다른 일관된 경계조건과 비교하기 위한 것이다. 이러한 경계조건의 구축방법과 특성은 LOK 에 자세히 설명되어 있다.

3. 경계조건에 대한 적합성

3.1 Discrete compatibility condition

Pressure Poisson 방정식의 경계조건은 semi-discrete form 유도되었기 때문에 이산화한 식에서의 적합성조건을 만족함은 보장되지 못한다. Poisson 방정식에 대한 적합성을 만족시키지 못하는 경계조건은 Poisson 방정식의 해가 존재하지 않는 원인이 되기 때문에 이것을 시험하는 것은

Table I. Boundary conditions for fractional-step methods and their compatibility.

Method	Code	$[G_n \phi^{(n+1)}]_b$	$[u^*]_b$	Consist.	Compat.	$\ \Theta\ _\infty$
D	D_{ZZ}	0	$u_b^{(n+1)}$	No	Yes	0
	D_{CC}	$[G_n \phi^{(n)}]_b$	$u_b^{(n+1)} + \Delta t [G_n \phi^{(n)}]_b$	Yes	Yes	0
	D_{MM}	$\Delta t^{-1} \mathbf{n} \cdot [-u^{(n+1)} + \mathbf{r} + \Delta t \mathbb{B}u^{(n)}]_b$	$[r + \Delta t \mathbb{B}u^{(n)}]_b$	Yes	Yes	0
	D_{CM}	$[G_n \phi^{(n)}]_b$	$[r + \Delta t \mathbb{B}u^{(n)}]_b$	Yes	No	$O(\Delta t \Delta x^\xi)$
	D_{MC}	$\Delta t^{-1} \mathbf{n} \cdot [-u^{(n+1)} + \mathbf{r} + \Delta t \mathbb{B}u^{(n)}]_b$	$u_b^{(n+1)} + \Delta t [G_n \phi^{(n)}]_b$	Yes	No	$O(\Delta t \Delta x^\xi)$
D^*	D_{HH}^*	$[G_n \phi^{(n+1)}]_b = 0$	$u_b^{(n+1)}$	Yes	Yes	0
P	P_{ZZ}	0	$u_b^{(n+1)} - \Delta t [\mathbb{B}u^{(n)}]_b$	No	Approx.	$O(\Delta t^2)$
	P_{CC}	$[G_n \phi^{(n)}]_b$	$u_b^{(n+1)} + \Delta t [G_n \phi^{(n)} - \mathbb{B}u^{(n)}]_b$	Yes	Approx.	$O(\Delta t^2)$
	P_{MM}	$\Delta t^{-1} \mathbf{n} \cdot [-u^{(n+1)} + \mathbf{u}^* + \Delta t \mathbb{B}u^{(n)}]_b$	$[r]_b$	Yes	Approx.	$O(\Delta t^2)$
	P_{TM}	$\Delta t^{-1} \mathbf{n} \cdot [-u^{(n+1)} + \mathbf{u}^* + \Delta t \mathbb{B}u^*]_b$	$[r]_b$	Yes	Yes	$O(\Delta t^2)$
		P_{CM}	$[G_n \phi^{(n)}]_b$	$[r]_b$	Yes	No
	P_{MC}	$\Delta t^{-1} \mathbf{n} \cdot [-u^{(n+1)} + \mathbf{u}^* + \Delta t \mathbb{B}u^{(n)}]_b$	$u_b^{(n+1)} + \Delta t [G_n \phi^{(n)} - \mathbb{B}u^{(n)}]_b$	Yes	No	$O(\Delta t \Delta x^\xi)$
	P_{TC}	$\Delta t^{-1} \mathbf{n} \cdot [-u^{(n+1)} + \mathbf{u}^* + \Delta t \mathbb{B}u^*]_b$	$u_b^{(n+1)} + \Delta t [G_n \phi^{(n)} - \mathbb{B}u^{(n)}]_b$	Yes	No	$O(\Delta t \Delta x^\xi)$
P^*	P_{HH}^*	$[G_n \phi^{(n+1)}]_b = 0$	$u_b^{(n+1)} - \Delta t [\mathbb{B}u^{(n)}]_b$	Yes	Approx.	$O(\Delta t^2)$

중요하며, 이 적합성을 본 장에서 시험하고자 한다. 적합성조건의 시험은 staggered grid 에서의 finite-difference 방법을 적용한 경우에 대해서 하고자 하며 이러한 시험은 다른 격자계 혹은 다른 차분 방법에서도 확장 가능하다 (Zang et al.⁽⁹⁾).

Semi-discrete form 의 Poisson 방정식과 Neumann 형태의 경계조건이 해를 가지기 위해 다음의 divergence 정리를 만족하여야 한다:

$$\int_{\partial\Omega} [\mathbf{q}(u^*) - \Delta t G \phi^{(n+1)}]_b \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (5)$$

여기서 $\mathbf{q}(u^*)$ 는 분할방법에 따라 달라지는데 D 와 D^* 형에서는 $\mathbf{q}(u^*) = u^*$ 이며 P 와 P^* 형에서는 $\mathbf{q}(u^*) = (1 + \Delta t B)u^*$ 로 쓸 수 있다. b 는 경계에서의 값을 나타내며 \mathbf{n} 은 경계에 수직한 단위 vector 를 나타낸다. 이 조건은 Poisson 방정식의 적합성조건으로 알려져 있으며⁽¹⁾, 압력의 source 와 경계에서의 압력구배의 flux 가 균형을 이루어야 한다는 것을 의미 한다.

Poisson 방정식을 공간에 대하여 차분하여 다음과 같은 matrix-vector 방정식을 얻을 수 있다:

$$\mathbf{H} \phi^{(n+1)} = \mathbf{g}. \quad (6)$$

여기서 \mathbf{H} 는 DG operator 를 차분한 식에 각 cell 의 부피 ΔV_j 를 곱하여 얻은 것이며 $\phi^{(n+1)}$ 는 fictitious pressure 의 vector 이고 \mathbf{g} 는 우변 vector 이다. 식 (6)이 해를 가지기 위해서 다음과 같은 조건을 만족해야 함을 보일 수 있다:

$$J = \sum_b [\mathbf{q}(u^*) - \Delta t G \phi^{(n+1)}]_b \cdot \mathbf{n} \Delta S = 0. \quad (7)$$

여기서 J 는 적합조건 지표 (compatibility index)라고 하며 J 가 0 이 되어야 적합성조건을 만족하게 된다. 조건 (7)은 조건 (5)의 차분화된 형태이다. 본 연구에서 시험하고 있는 경계조건에 대한 적합성조건의 만족 여부는 Table I 에 나타나 있다.

차분화된 Poisson 방정식 (6)은 system matrix \mathbf{H} 가 singular 하므로 그 해를 구하기 위하여 한점의 ϕ 값을 고정하여야 하며 이러한 경우 적합성조건에 상관없이 (6)의 해를 구할 수 있지만 풀지 않는 한 개의 cell 에서는 원래의 Poisson 방정식을 만족시키지 못할 수 있다. 풀지않는 Poisson 방정식에 대해 얻은 해가 갖는 오차의 값은 정확히 J 와 일치함을 보일 수 있다. 따라서 적합성조건을 만족하는 경계조건의 경우 풀지 않는 cell 에서의 Poisson 방정식을 정확히 만족한다. 적합성조건을 만족하지 않는 경우에 풀지 않는 방정식의 오류는 고정된 cell 에서의 divergence 로 반영된다. 이 divergence 는 $\Delta t J / \Delta V^*$ 이며, ΔV^* 는 그 cell 의 부피를 나타낸다. 경계조건에 따른 divergence 를 Table I 에 나타냈다.

3.2 경계조건의 적합성에 관한 시험

주어진 분할단계법과 경계조건에 대하여 적합성조건의 만족 여부에 따른 divergence 의 값 변화를 알아보기 위하여 Taylor vortex⁽⁸⁾를 사용하여 시험하였다. 계산에 사용한 Reynolds 수는 $Re = 100$ 이며 grid 의 개수는 65×65 이다. 유동의 domain 은 $[0, \pi] \times [0, \pi]$ 이며 무차원 시간간격 Δt 는 0.0005-0.05 이었다. 시간은 0.5 까지 simulation 을 진행시켰다.

D 및 D^* 형의 경우 적합성을 만족하는 D_{ZZ} , D_{CC} ,

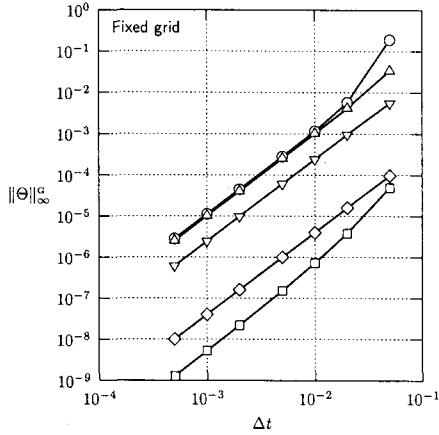


Fig. 1. Maximum divergence $\|\Theta\|_\infty$ of boundary-condition pairs for splitting methods of type P and P*: \circ , P_{ZZ} ; \triangle , P_{CC} ; ∇ , P_{MM} ; \diamond , P_{TM} ; \square , P_{HH}^* . Data from fixed-grid computations of the decaying vortex flow at $Re = 100$ with $N_x \times N_y = 65 \times 65$.

D_{MM} , D_{ZZ}^* 의 경계조건에 대해서는 이론과 같이 0의 divergence를 나타냈다. 적합성조건을 만족하지 않는 경우 D_{CM} 과 D_{MC} 의 경우는 매우 큰 divergence로 인하여 simulation이 unstable함을 보였다.

P형과 P*형의 divergence는 Fig. 1과 같이 적합성조건을 만족하는 P_{TM} 과 적합성조건을 근사적으로 만족하는 경우 (J 가 Δt 의 order를 가지는 경우)인 P_{ZZ} , P_{CC} , P_{MM} , 그리고 P_{HH}^* 의 경우에 대하여 모두 second order를 가짐을 알 수 있다.

4. 분할단계법의 안정성

분할단계법의 안정성은 time-advancement 방법, 차분방법, splitting 방법 그리고 경계조건 등 여러 가지의 원인에 영향을 받는다. 본 연구에서는 이러한 여러 요인중 splitting과 그 경계조건에 기인한 안정성여부를 연구하기 위하여 분할단계법의 안정성을 model problem과 cavity flow 혹은 Taylor vortex flow의 numerical experiment를 통하여 알아 보았다. Numerical simulation은 $Re = 1, 100$ 에서 grid를 20×20 , 40×40 , 80×80 , 160×160 으로 하였다.

4.1 D와 D*형의 안정성 분석

분할단계법 D_{ZZ} , D_{CC} , 그리고 D_{HH}^* 는 경계조건 혹은 split 방정식의 implicit viscous term을 explicit하게 처리하지 않기 때문에 CFL 수가 1보다 작은 경우 얻어진 해는 모두 안정하였다. 이는 이 방법의 explicit nonlinear term에서 발생하는 불안정

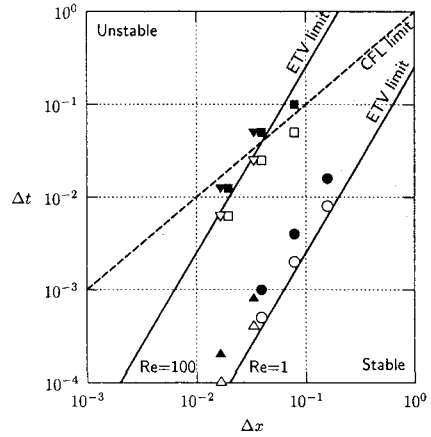


Fig. 2. Stability diagram of the fractional-step method D_{MM} : ----, $\Delta t_{CFL} = \Delta x$ ($N_{CFL} = 1$); —, $\Delta t_{ETV} = \frac{1}{4}Re\Delta x^2$. Data from computations of the decaying vortex flow and lid-driven cavity flow: \circ , \square , \triangle , ∇ , stable; \bullet , \blacksquare , \blacktriangle , \blacktriangledown , unstable.

성 이외에는 안정성에 미치는 다른 요인이 없기 때문이다.

D_{MM} 의 경우는 Fig. 2와 같은 안정성경계를 찾을 수 있었다. D_{MM} 의 nonlinear term을 explicit하게 처리하여 발생하는 불안정성 외에도 viscous term에 의하여 나타나는 불안정성이 있었으며, 이것은 다음과 같은 criterion과 비교적 잘 일치했다:

$$\Delta t \leq \Delta t_{ETV} = 0.25Re\Delta x^2. \quad (8)$$

이 불안정성은 D_{MM} 의 경계조건에서 viscous term의 implicit 부분을 explicit하게 근사하는데 그 원인이 있으며 이 때문에 나타나는 불안정성의 기준인 (8)은 diffusion 방정식을 explicit Euler 방법으로 time-advancement하는 경우에 발생하는 불안정성을 해석하여 얻은 criterion이다.

4.2 P형의 안정성 분석

P형에서는 fictitious pressure의 방정식 (4b)을 만들 때 implicit viscous term을 explicit하게 처리하며 이로 인하여 발생하는 불안정성은 Fig. 3에서 볼 수 있듯이 D_{MM} 와 유사한 경향의 불안정성을 나타냈다. 이 그림의 경향은 다른 P형의 경계조건 (P_{ZZ} , P_{CC} , P_{TM})에서도 유사하게 나타난다.

이러한 P형의 불안정성의 criterion을 nonlinear term을 무시한 Stokes problem의 Fourier stability analysis로 찾을 수 있는데 그 결과는 다음과 같다:

$$\Delta t \leq \Delta t_{ETV} = 0.603Re\Delta x^2. \quad (9)$$

Fig. 3는 수치해석 결과와 식 (9)의 criterion이 잘

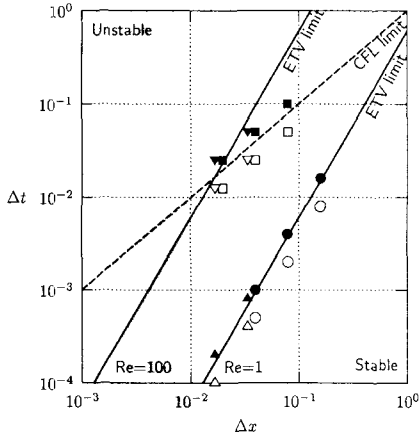


Fig. 3. Stability diagram of the fractional-step method P_{MM} : ----, $\Delta t_{CFL} = \Delta x$ ($N_{CFL} = 1$); —, $\Delta t_{ETV} = \frac{1}{4}(1 + 2^{1/2})Re\Delta x^2$. Data from computations of the decaying vortex flow and lid-driven cavity flow: ○, □, △, ▽, stable; ●, ■, ▲, ▼, unstable.

일치하고 있음을 보인다.

4.3 P*형의 안정성 분석

P*형 방법에서도 P와 유사하게 pressure 방정식에서 implicit viscous term을 explicit하게 처리함으로써 불안정성이 나타났다 (Fig. 4). P*형은 P에 비하여 더 작은 Δt 에서 불안정한 것을 볼 수 있는데 이것은 model problem의 stability criterion에서도 볼 수 있었다. P형과 같은 가정하에 model problem의 stability criterion을 구하면 다음과 같다:

$$\Delta t \leq \Delta t_{ETV} = 0.25Re\Delta x^2. \quad (10)$$

P*형에서도 model problem의 stability criterion과 numerical experiment의 결과가 잘 일치함을 알 수 있다.

5. 분할단계법의 정확도

분할단계법의 numerical accuracy는 Taylor vortex의 numerical simulation을 $Re = 100$ 에서 65×65 의 grid 상에서 수행하여 얻은 해로부터 측정하였다. 이때 각각의 해의 error는 기준이 되는 해 (가장 작은 Δt 를 사용하여 얻은 해)와의 차이로부터 얻은 것을 이용하였다.

5.1 D형과 D*형의 정확도

D형과 D*형의 속도에 대한 numerical accuracy는 Fig. 5에 나타나 있는데 inconsistent 경계조건인 D_{ZZ} 를 사용한 경우 first order의 정확도를 보이고 있다. 일관된 경계조건인 D_{CC} 와 D^*_{HH} 는 LOK에서 예상한 바와 같이 second order의 정확도를 나타냈

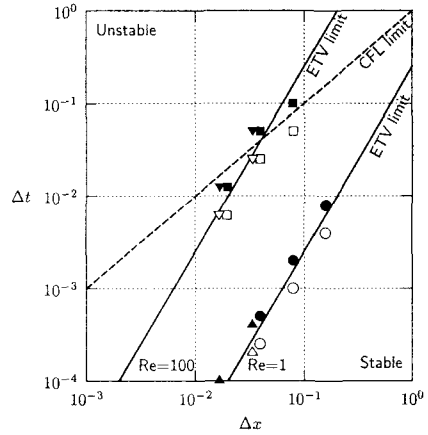


Fig. 4. Stability diagram of the fractional-step method P^*_{HH} : ----, $\Delta t_{CFL} = \Delta x$ ($N_{CFL} = 1$); —, $\Delta t_{ETV} = \frac{1}{4}Re\Delta x^2$. Data from computations of the decaying vortex flow and lid-driven cavity flow: ○, □, △, ▽, stable; ●, ■, ▲, ▼, unstable.

다. 이에 반해 일관된 경계조건인 D_{MM} 의 결과는 first order를 보였는데 이것은 경계조건 $\mathbf{u}^{(n+1)}|_B$ 을 $(1 + \Delta t/B)\mathbf{u}^{(n)}|_B$ 으로 근사하였기 때문이다. 이러한 경계조건의 weak coupling에 의하여 발생하는 정확도의 손실은 1차원의 diffusion problem에서 쉽게 확인할 수 있다. 여기에는 나타내지 않았지만 압력의 정확도는 모든 경우에 first order를 나타내는데 이것은 압력의 Poisson equation의 정확도가 first order이기 때문이다 (Perot⁽⁶⁾)

5.2 P형과 P*형의 정확도

P형과 P*형의 속도에 대한 numerical accuracy는 Fig. 6에 나타나 있다. P형과 P*형 모두가 second order를 나타내고 있다. 이것은 P_{ZZ} 를 제외한 모든 경우에 대하여 LOK의 예측과 일치하였다. P_{ZZ} 경우는 inconsistent한 경계조건임에도 불구하고 \mathbf{u}^* 와 ϕ 의 경계조건이 직접 momentum equation에 사용되지 않기 때문이다. 그러나 CFL 수를 고정시킨 경우 (격자간격 Δx 와 시간간격 Δt 를 함께 변화시키는 경우) 정확도를 측정하면 first order이며 또한 큰 divergence의 오류를 나타낸다. P형과 P*형의 압력에 대한 정확도 또한 D 및 D*형과 같이 first order이다

6. 결론

본 연구에서는 LOK에서 제시한 분할단계법과 그 경계조건을 numerical 혹은 analytical 방법으로 (1) 적합성의 만족여부와 divergence에 미치는 영향 및 (2) splitting 방법과 경계조건에 의한 불안정

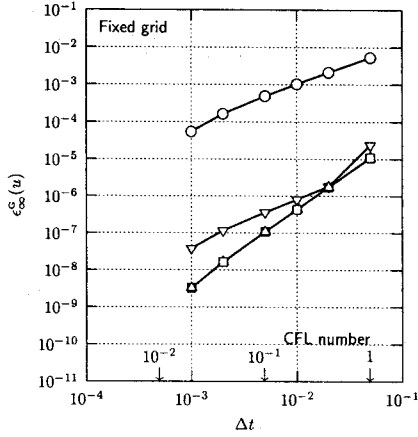


Fig. 5. Temporal convergence of $\epsilon_{\infty}^G(u)$ for fractional-step methods of type D and D*: \circ , D_{ZZ} ; \triangle , D_{CC} ; ∇ , D_{MM} ; \square , D_{HH}^* . Data from fixed-grid computations of the decaying vortex flow at $Re = 100$ with $N_x \times N_y = 65 \times 65$.

성을 밝혀 내었으며 (3) 수치해의 정확도를 시험하였다.

Pressure Poisson 방정식의 해는 적합성조건 (7)를 만족하는 경우에만 존재한다. D_{ZZ} , D_{CC} , D_{MM} , D_{HH}^* , 그리고 P_{TM} 만 적합성조건을 만족하며 이중 D 형의 경우 divergence 는 0 이고 P_{TM} 은 $O(\Delta t^2)$ 를 갖는다. 적합성을 근사적으로 만족시키는 경우인 P_{ZZ} , P_{CC} , P_{MM} , 그리고 P_{HH}^* 도 $O(\Delta t^2)$ 의 divergence 를 가짐으로서 P 형과 P*형의 경계조건으로 적절한 것임을 밝혀냈다.

분할단계법의 안정성에 대한 성질은 model problem 의 해석과 numerical experiment 로 알 수 있었다. 표준 분할단계법의 불안정성의 원인은 경계조건 혹은 split 방정식에서의 implicit viscous term 을 explicit term 으로 근사화 할 경우 발생하는 것을 알 수 있었다. 이러한 경우 분할단계방법들이 가지는 안정성경계는 model problem 에서 얻은 criterion 과 잘 일치하였으며 이들에 대한 각각의 criterion 은 D_{MM} 의 경우 $\Delta t \leq 0.25Re\Delta x^2$, P 형의 경우 $\Delta t \leq 0.603Re\Delta x^2$, P*형의 경우는 $\Delta t \leq 0.25Re\Delta x^2$ 이다. D_{ZZ} , D_{CC} , D_{HH}^* 의 방법에 대한 불안정성은 explicit 한 nonlinear term 에 의하여서만 결정된다.

적합성을 만족하는 분할단계방법들을 사용한 Taylor vortex 유동의 numerical simulation 에서 얻은 수치해를 통하여 정확도를 측정하고 그 결과를 LOK 의 이론과 비교하였다. D_{CC} , D_{HH}^* , P_{CC} , P_{MM} , P_{TM} 및 P_{HH}^* 은 $O(\Delta t^2)$, 그리고 D_{ZZ} 는 $O(\Delta t)$ 의 numerical accuracy 를 나타내 LOK 의 이론과 일치하였다.

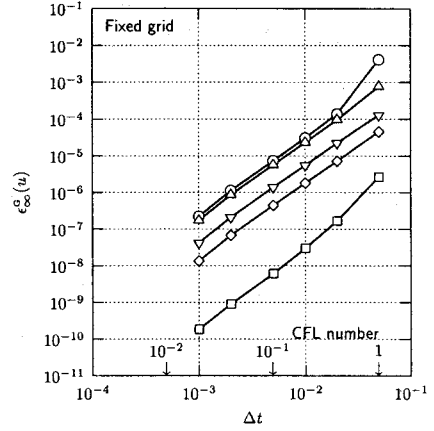


Fig. 6. Temporal convergence of $\epsilon_{\infty}^G(u)$ for fractional-step methods of type P and P*: \circ , P_{ZZ} ; \triangle , P_{CC} ; ∇ , P_{MM} ; \diamond , P_{TM} ; \square , P_{HH}^* . Data from fixed-grid computations of the decaying vortex flow at $Re = 100$ with $N_x \times N_y = 65 \times 65$.

참고문헌

- (1) Abdallah, S., 1987, "Numerical solution for the pressure Poisson equation with Neumann boundary conditions using a non-staggered grid," *I, J. Comput. Phys.* **70**, pp. 182-192.
- (2) Dukowicz, J. K. and Dvinsky, A. S., 1992, "Approximate factorization as a higher-order splitting for the implicit incompressible flow equations," *J. Comput. Phys.* **102**, pp. 336-347.
- (3) Harlow, F. W. and Welch, J. E., 1965, "Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluids with free surface," *Phys. Fluids* **8**, pp. 2182-2189.
- (4) Lee, M. J., Oh, B. D., and Kim, Y. B., 2001, "Canonical fractional-step methods and consistent boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations," *J. Comput. Phys.* **168**, pp. 73-100.
- (5) Orszag, S. A., Israeli, M., and Deville, M. O., 1986, "Boundary conditions for incompressible flows," *J. Sci. Comput.* **1**, pp. 75-110.
- (6) Perot, J. B., 1993, "An analysis of the fractional step method," *J. Comput. Phys.* **108**, pp. 51-58.
- (7) Simo, J. C. and Armero, F., 1994, "Unconditional stability and long-term behavior of transient algorithms for the incompressible Navier-Stokes and Euler equations," *Comput. Methods Appl. Mech. Appl.* **111**, pp. 111-154.
- (8) Taylor, G. I., 1923, "On the decay of vortices in a viscous fluid," *Phil. Mag.* **46**, pp. 671-674.
- (9) Zang, Y., Street, R. L., and Koseff, J. R., 1993, "A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates," *J. Comput. Phys.* **108**, pp. 18-33.