

미소유동 해석을 위한 압력수정기법 및 미끄럼 경계조건

최형일*, 맹주성**, 이도형***

Pressure Correction Method and Slip Boundary Conditions for Microflows

Hyung-il Choi, Joo-sung Maeng and Dohyung Lee

Key Words : MEMS(미소전자기계시스템), Slip Boundary Condition(미끄럼 경계조건), Rarefaction(희박도), Pressure Correction Method(압력수정기법), Micro Channel(미소채널)

Abstract

This paper introduces a pressure correction method for microflow computation. Conventional CFD methods with no slip boundary condition fail to predict the rarefaction effect of the wall when simulating gas microflows in the slip-flow regime. Pressure correction method with an appropriate slip boundary condition is an efficient tool in analyzing microscale flows. The present unstructured SIMPLE algorithm adopts both the classical Maxwell boundary condition and Langmuir boundary condition proposed by Myong. The simulation results of microchannel flows show that the proposed method has an effective predictive capability for microscale flows.

1. 서론

최근 MEMS(Micro-Electro-Mechanical-System) 기술은 공학과 산업분야의 필요성으로 인하여 많은 기초 연구가 이루어지고 있다.⁽¹⁾ 여기에는 여러 학문분야의 지식이 요구되는 데 유체역학도 그 중 필수적인 하나가 된다. 미소유동(microflows)에서 물체의 특성 길이는 마이크로미터 단위이므로 유동의 희박도(rarefaction)를 나타내는 Knudsen 수는 커지게 되어 연속류 영역(continuum flow regime)을 벗어나게 된다. 이 유동은 대부분 열역학적으로 비평형인 미끄럼 유동 영역(slip-flow regime)에 해당되며 전형적인 고착경계조건(no-slip boundary condition) CFD 기법의 적용이 불가능하다.⁽¹⁾

이러한 미소크기의 유동을 해석하기 위한 해석적 또는 실험적 연구가 여러 연구자들⁽²⁻⁸⁾에 의해 이루어졌으며, 해석적 기법들에는 DSMC 기법^(2,3)

과 Navier-Stokes 방정식에 미끄럼 경계조건(slip boundary condition)을 적용하는 기법⁽⁴⁻⁶⁾ 등이 있다.

DSMC 기법은 입자간 충돌(inter-molecular collision)을 통계적으로 처리하는 모사기법(simulation method)으로 저속의 미소유동에 적용할 경우 통계적 교란(statistical fluctuation)이 매우 커지게 되며, 시간간격을 분자간 평균충돌시간(mean collision time)보다 작게 해야 하는 제약조건으로 인해 막대한 연산시간이 요구되어진다.⁽⁶⁾

이에 비하여 Navier-Stokes 방정식에 미끄럼 경계조건을 부과한 CFD 기법은 벽면의 미끄럼 현상을 잘 예측하는 경제적인 방법이라 할 수 있다. 실제 미소 크기의 유동에서 유동내부의 비평형도는 무시할 수 있는 정도의 크기이며 벽면의 미끄럼 효과가 중요한 현상이 된다.^(1,6)

따라서, 본 연구에서는 미소크기의 유동을 해석할 수 있는 미끄럼 경계조건을 고려한 압력수정기법을 개발하였다. 실제 복잡한 형상에도 쉽게 적용할 수 있도록 비정렬격자 알고리즘⁽⁹⁻¹²⁾을 사용하였으며, Demirdzic and Muzafferija⁽⁹⁾가 제안한 이산화기법을 격자점 중심법(cell-vertex scheme)에 맞게 변형하였다. 미끄럼 경계조건으로는 널리 쓰이는 Maxwell 경계조건⁽²⁻⁵⁾과 Myong 에 의해 새롭게

* 회원, 한양대학교 대학원 기계공학과

** 회원, 한양대학교 기계공학과

*** jismaeng@hanyang.ac.kr

회원, 한양대학교 안산캠퍼스 기계산업공학부
dohyung@hanyang.ac.kr

제안된 Langmuir 경계조건⁽⁶⁾을 적용하였다. 제안된 수치기법을 이용하여 미소채널 유동(microchannel flows)을 해석하였으며 기존의 연구 결과들과 비교하여 타당성을 검증하였다.

2. 미소유체역학(Microfluidics)

2.1 미소기구에서의 유체역학적 문제

최근 10 여년 동안 미소전자기계시스템 가공과 응용기술은 괄목할 만한 발전을 이루었다. 이러한 미소 기구의 성능향상을 위한 설계와 최적화 그리고 제작기술에 있어서 유체역학의 이해는 필수적이나 아직 이에 관한 연구는 많이 부족한 실정이다.

미소기구(micro devices)에서의 유동은 전형적인 기구(typical devices)에서의 유동 현상과 매우 다르다. 따라서, Navier-Stokes 방정식에 고착경계조건(no-slip boundary condition)을 사용하는 전형적인 유동 모델을 사용한다면 정확한 예측을 하기 어렵다. 실제 전형적인 유동 모델로는 설명이 불가능한 현상들이 여러 실험의 결과로 나타났다. 예를 들면, 긴 미소 덕트에서 압력구배는 비선형이고, 질량유량이 전형적인 연속개념 유동 모델의 해석결과에 비해 높게 측정되었다. 또한 미소 베어링에서의 부하용량은 예측값보다 작게 나타났으며, 미소 구동기(micromotor)를 구동하는 데 필요한 전류는 매우 높게 측정되었다.⁽¹³⁾

이러한 현상들은 미소기구에서의 유동 특성 - 예를 들면, 미끄럼 유동(slip flow), 희박도(rarefaction), 압축성(compressibility), 분자간 힘(intermolecular forces)등 - 을 정확히 예측함으로써 설명되어질 수 있다. 따라서, 이와 같은 비전형적인 효과(unconventional effects)를 적절히 예측할 수 있는 유동 모델을 적용하는 것이 중요하다.

2.2 유체 모델링

유체 모델링의 방법은 Fig. 1 에 보인 바와 같이 크게 입자개념 접근법(molecular approach)과 연속개념 접근법(continuum approach)으로 나눌 수 있다. 입자개념 접근법은 다시 결정적(deterministic)방법과 통계적(statistical)방법으로 나뉘어진다.^(6,13) 결정적 방법에는 분자 운동학(Molecular Dynamics, MD)이 있으며 이 방법은 조밀한 기체(dense gas)의 해석에 적합하며 대부분의 희박기체(dilute gas)의 해석에는 분자간 충돌을 모사하기 위해 수많은 계산을 해야 한다. 통계적 모델에는 Liouville 방정식이 있으나 아주 복잡한 형태에서 해석 모델로는 거의 사용되지 않는다. 이 방정식에 입자혼돈(molecular

chaos) 가정을 이용하여 유도된 Boltzmann 방정식은 유체역학에서 아주 중요한 위치를 차지하며 Chapman-Enskog 전개기법이나 Grad 의 모멘트기법 등을 이용하면 Euler 방정식, Navier-Stokes 방정식, 그리고, 고차 유체방정식을 유도해 낼 수 있다.^(1,6,14) 이와는 달리 DSMC 기법은 입자의 운동은 결정적 묘사법을 사용하며 입자간 충돌은 통계적으로 처리하는 모사 기법이다.

이러한 유동 모델을 적용할 수 있는 영역은 일반적으로 분자 평균자유행로(mean free path)와 물체 특성길이(characteristic length)의 비인 Knudsen 수(이하 Kn 수)에 의해 결정되어 진다. Fig. 2 에서 Kn 수에 따른 유동 영역들과 적용 가능한 접근 방법을 표시하였다. Kn 수가 0 에 가까워지게 되면, 열전도와 점성소산이 무시할 수 있을 정도로 작아져 Euler 방정식을 적용할 수 있게 된다. 연속류(continuum flow) 영역은 열역학적으로 평형에 가까우며 Navier-Stokes 방정식을 적용할 수 있다. 미끄럼유동(slip flow)영역은 벽면의 희박도 효과(rarefaction)가 커지며, 이 경우 Navier-Stokes 방정식에 미끄럼 경계조건을 부과하여 해결할 수 있다. Kn 수가 더 커지면 천이영역(transition regime)에 해당되며 비평행도가 더욱 증가하게 된다. 이 영역은 전형적인 Navier-Stokes 방정식의 적용이 불가능하며, 입자개념 접근법이나 고차의 유체방정식을 사용하여 계산하여야 한다. 자유분자류(free molecular flow)영역에서 비평행도는 더욱 증가하게 된다. Kn 수에 따른 유동의 분류는 경험에 의한 것으로 실제 유동 조건에 따라 달라지게 된다.

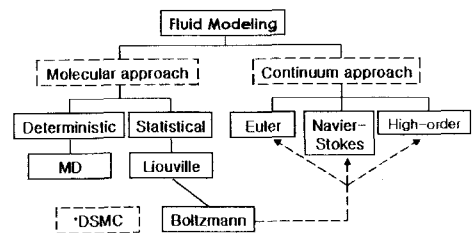


Fig. 1 Molecular and Continuum flow models

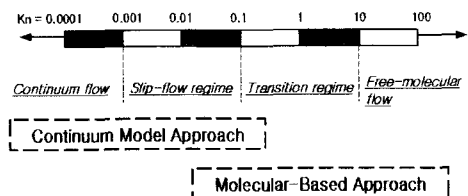


Fig. 2 Knudsen number regimes and available approaches

미소기구에서의 유동은 대부분 미끄럼 유동 영역에 해당된다. 또한, Myong⁽¹⁴⁾에 따르면 이 유동은 유동내부의 비평형도는 상대적으로 무시할 수 있을 정도로 작으므로 고차 유체방정식의 도움 없이 Navier-Stokes 방정식을 이용할 수 있고, 높은 Kn 수에 의한 벽면에서의 미끄럼 현상은 적절한 미끄럼 경계조건인 부과로 해결되어질 수 있다.

3. 미끄럼 경계조건

3.1 Maxwell 경계조건

고체 벽면에서의 미끄럼 현상을 예측하기 위해 Maxwell 경계조건이 널리 사용되어 왔다. 이 조건은 벽면-입자의 상호작용(surface-gas molecular interaction)에 관한 근사해법에 기초한 것으로, 등은 유동인 경우 아래와 같이 표현된다.

$$U_g = \frac{2 - \sigma_v}{\sigma_v} \text{Kn} \frac{dU}{dy} \quad (1)$$

여기에서 하첨자 g 는 벽면에서의 기체를 나타낸다. 따라서, 벽면에서의 기체의 미끄럼속도는 Kn 수, 벽면에 평행한 속도성분의 구배, 그리고, 조절계수(accommodation coefficient) σ_v 에 의해 결정된다. 한편, Beskok 등⁽⁴⁾은 식(1)의 일차근사식을 고차의 근사식으로 확장한 고차 경계조건을 개발하였다. 그러나, 일차정확도의 Navier-Stokes 방정식에 적용하는 것은 논리적으로 맞지 않고, 실제 수치기법의 적용이 용이하지 않으며, Maxwell 경계조건 단점을 그대로 포함하고 있어 거의 사용되지 않는다.^(1,6)

3.2 Langmuir 경계조건

Maxwell 경계조건은 조절계수가 유일하게 결정되지 않고 문제에 따라 임의로 결정되어야 하는데, 이 값에 따라 벽면 미끄럼효과의 크기가 변하는 단점이 있다. 이러한 기존 경계조건의 단점을 해결하기 위해 Myong⁽⁶⁾은 Langmuir 이론에 근거하여 다음과 같은 경계조건을 제안하였다.

$$U_g = \frac{1}{1 + \beta p} \quad (2)$$

여기에서, β 는 벽면의 특성과 기체의 특성에 따라 결정되는 상수이다. Maxwell 경계조건과는 달리 임의의 조절계수나 속도구배등을 이용하지 않고 경계조건을 결정할 수 있는 장점이 있다.

본 연구에서는 미끄럼유동에 대하여 Maxwell 조건과 Langmuir 조건을 압력수정기법에 적용하였다.

4. 수치기법

4.1 일반 수송방정식(Generic transport equation)

분리형 알고리즘(segregated algorithm)⁽⁹⁻¹¹⁾에서, 운동량방정식과 연속방정식, 그리고 에너지방정식은 각각 순차적으로 계산하게 된다. 운동량과 에너지 보존방정식은 각각 다음과 같은 일반적인 형태로 나타낼 수 있다.

$$\int_V \rho \vec{V} \phi \cdot \vec{n} dS - \int_V \lambda_\phi \nabla \phi \cdot \vec{n} dS = S_\phi \quad (3)$$

여기에서 ϕ 는 종속변수 u, v, h_0 를 나타내고 λ_ϕ 는 각각의 방정식에 대하여 확산계수들을 의미한다. 식(3)의 좌변의 첫번째 항은 대류항을 나타내고, 두 번째 항은 확산항을 나타낸다. 그리고, 우변은 원천항(source term)을 나타낸다. 운동량방정식에서, 이 항은 나머지 속도구배항과 압력항, 그리고 체력항을 포함한다. 또한 연속방정식 역시 확산항이 없는 형태의 식(3)으로 표현될 수 있으며 압력수정방정식을 도출하는 데 이용되어진다.

4.2 해석영역의 이산화(Domain discretization)

유한체적법에서 해석영역은 중첩되지 않는 제어체적(non-overlapped control volume)으로 나누어져야 한다. 본 연구에서는 복잡한 형상에 대해서도 쉽게 적용 가능한 복잡 비정렬격자 해법(hybrid unstructured grid solver)을 개발하였다. 기억장소면에서 유리한 격자점 중심법(node centered scheme)을 사용하였으며, 플럭스의 계산은 효율적인 계산을 할 수 있도록 모서리(edge)를 중심으로 계산하였다.^(10,12)

4.3 해의 재구성기법과 대류, 확산항의 이산화

유한체적법에서 제어체적의 중심에서의 값이 이 셀의 대표값이 된다. 공간에 대해 2 차 이상의 정확도를 얻기 위해서 해의 재구성(reconstruction)이 필요하다. 본 연구에서는 제어체적내의 해의 분포를 선형의 1 차함수로 가정하는 부분 선형 재구성기법(piecewise linear reconstruction)⁽¹²⁾을 적용하였으며, 수치적 효율이 좋은 modified Gram-Schmidt 직교화를 사용하여 구배를 계산하였다.

대류항과 확산항의 이산화는 Demirdzic and Muzafferija⁽⁹⁾가 제안한 방법을 적용하였다. 대류항은 중앙차분법이라 할 수 있으며 확산항의 계산은 다양한 격자에 일관되게 적용할 수 있는 정렬 격자계의 이산화방법을 비정렬 격자에 맞게 변형시킨 방법을 사용하였다.

4.4 압력수정기법(Pressure correction method)

실제 미소유동은 레이놀즈수가 아주 작은 저속 유동이나 압축성 효과를 무시할 수 없으므로 여기에서는 저속 유동에 유리하며 압축성 효과를 고려

하는 수정된 SIMPLE 법^(9,15,16)을 적용하였다. SIMPLE 법등의 압력기반 해법은 몇몇 연구자들에 의해 비정렬 격자로 확장되었으며 본 연구에서는 Demirdzic and Muzafferija⁽⁹⁾가 제안한 방법을 격자점 중심법에 적용하였다.

5. 연속류 영역의 유동

본 연구에서 개발한 비정렬격자 Navier-Stokes 프로그램의 정확도를 검증하기 위해 상판 끌림 공동유동과 T형 분지관 유동문제를 해석하였다.

5.1 상판 끌림 공동유동(Lid-driven cavity flow)

2 차원 상판 끌림 공동유동은 경계가 모두 벽면으로 명료한 비압축성 유동의 대표적인 벤치마크 문제이다. 본 수치기법의 정확도를 검증하기 위해 Fig. 3 과 같이 다양한 종횡비(aspect ratio)를 가진 삼각형요소와 사각형 요소로 이루어진 혼합격자를 생성하였다. Re 수가 1000 일때 해석영역의 도심을 통과하는 수평선에서의 수직속도성분을 Fig. 4 에 도시하였다. 여기에서 보인 바와 같이 격자수가 증가할수록 속도분포는 Ghia 등⁽¹⁷⁾의 수치해석 결과에 접근하며 격자수가 3725 개 이상에서는 정확히 일치하는 결과를 보였다.

5.2 T형 분지관 내 유동(Flow in a T-shaped planar branch)

분지관 유동문제는 산업분야나 의공학 분야등에서 중요한 유동문제로 여러 연구자들에 의해 연구되고 있다.⁽¹⁸⁾ T형 분지관은 하나의 입구와 출구, 그리고 주유동 방향에 수직으로 분지관이 나있는 형상으로 8100 개의 사각격자를 구성하여 수치 계산하였으며 Hayes 등⁽¹⁸⁾의 수치계산 결과와 비교하였다. Fig. 5 는 Re 수가 400 일 때의 유선을 도시한 것으로 분지관에서 박리(separation)가 일어남을 볼 수 있고, Fig. 6 에서는 Re 수에 따른 주유동 방향의 유량비율을 나타내었으며 Hayes 등의 결과와 정확히 일치함을 볼 수 있다.

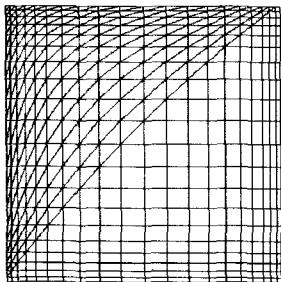


Fig. 3 Unstructured grids(590elements)

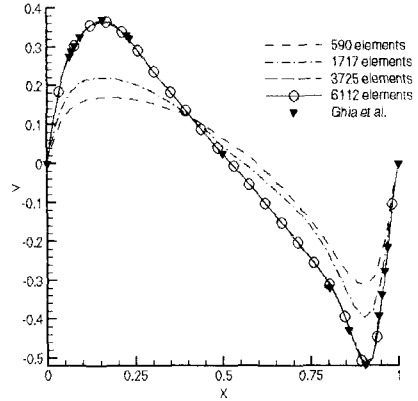


Fig. 4 Comparison of v-velocity profiles along the horizontal line through the geometric center

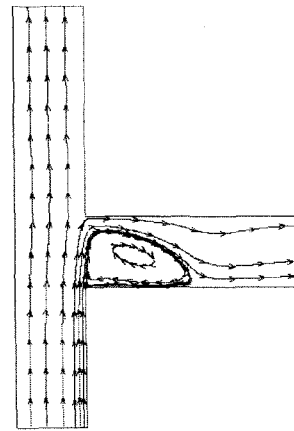


Fig. 5 Streamlines at Re = 400

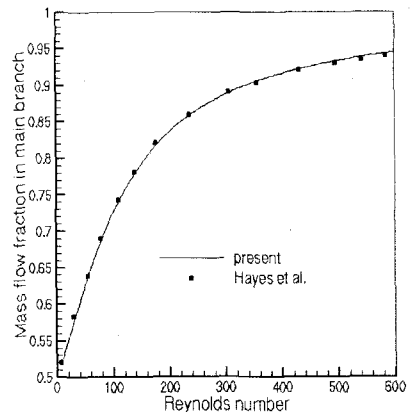


Fig. 6 Mass flow fraction at various Re number range

6. 미소채널 유동

미소채널 유동은 전단력 센서나 가속도계등의 미소기구에서 볼 수 있는 좁은 통로의 유동을 대표할 수 있다. 또한, 희박도 효과를 연구하는 데 가장 기본적인 형상으로 여러 연구자들에 의해 수치 또는 실험을 통해 연구되어 왔다. 본 연구에서는 기존의 연구에서와 유사한 2 차원 미소채널 내부의 정상상태, 등은 저속유동에 대해 수치계산을 수행하였다. 채널의 높이는 $1.04\mu\text{m}$, 길이는 $31.14\mu\text{m}$ 이며, 채널 내부의 유체는 각각 질소와 헬륨에 대해 계산하였다. 격자는 18000 개의 요소를 가진 벽면으로 당겨진 사각격자(quadrilateral grids)를 구성하였다.

먼저 질소에 대하여 출구 Kn 수가 0.05 이고, 출구와 입구의 압력비가 2.47 인 경우에 대하여 Maxwell 경계조건을 적용하여 계산을 수행하였다. Fig. 7 에서 채널 중심선에서의 압력분포를 DSMC 기법⁽²⁾ 그리고 Arkilic 등⁽⁸⁾의 해석해와 비교하였다. 본 연구의 수치해석 결과가 DSMC 기법보다 해석해에 좀 더 일치하며, 큰 압력차로 인해 발생하는 압력의 비선형성(nonlinearity)이 나타남을 볼 수 있다. Fig. 8 은 채널 내부의 유선방향 속도를 도시한 것으로 DSMC 기법을 사용한 연구결과^(2,3)에서 나타나는 통계적 교란(statistical fluctuation)의 영향은 나타나지 않는다. 출구에 가까워질수록 압력이 감소하고 이에 따라 벽면에서의 희박도(rarefaction)가 커지게 되어 미끄럼속도가 증가됨을 보여주고 있다.

다음으로 헬륨에 대하여 출구 Kn 수가 0.165 일 경우에 대해 계산을 수행하였다. 출구와 입구의 압력비에 따른 정규화 유량(normalized mass flow rate)의 변화를 기존의 실험, 해석결과와 비교하였다. Fig. 9 에서 보면 압력비가 증가할수록 희박도가 감소하므로 정규화 유량도 감소된다. 본 연구에서 계산한 결과가 해석해와 Arkilic 등⁽⁸⁾의 실험결과와 비교적 잘 일치함을 볼 수 있다. Beskok 등⁽⁴⁾이 제안한 고차 경계조건은 압력비가 높을수록 실험결과와 일치하나, 일차의 Maxwell 경계조건을 사용한 경우에 압력비가 낮은 부분에서 더 잘 일치함을 볼 수 있다.

끝으로 본 수치기법에 새롭게 적용한 Langmuir 경계조건⁽⁶⁾과 고착경계조건 그리고, Maxwell 경계조건의 결과를 비교하였다. Fig. 10 에 보인 바와 같이 Langmuir 경계조건을 적용할 경우 고착경계조건에 비해 압력의 비선형성이 증가함을 볼 수 있으며 이것은 Myong⁽⁶⁾의 해석해와 동일한 경향

을 보인다. 반면, Maxwell 경계조건을 사용할 경우 이와 반대로 비선형성이 감소하였다. 물리적 직관에 의하면 비선형성이 증가함이 더 타당하다 할 수 있으나 이 점에 관해서는 더 충분한 연구가 필요하리라 사료된다.

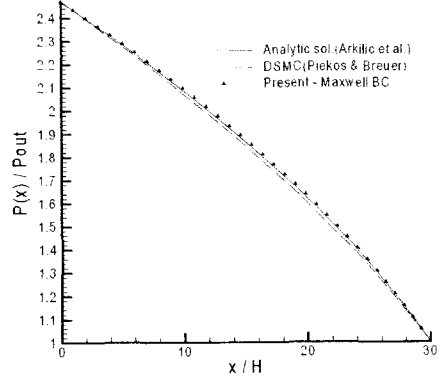


Fig. 7 Comparison of computed and analytical pressure distributions

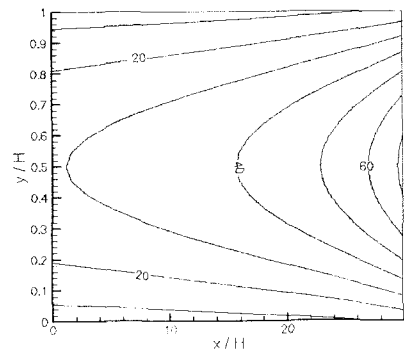


Fig. 8 Streamwise velocity distribution

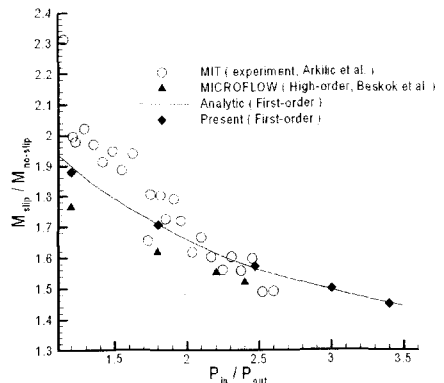


Fig. 9 Variation of normalized mass flow rate as a function of pressure ratio

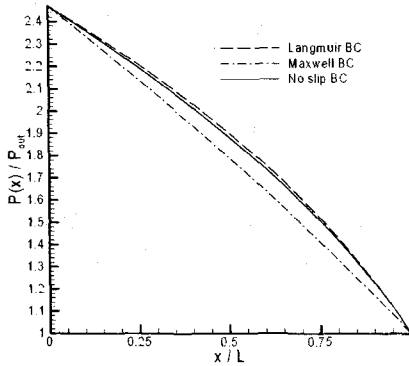


Fig. 10 Comparison of pressure distributions for no slip and slip boundary conditions($Kn=0.4$)

7. 결론

본 연구에서는 미소 유동을 해석하기 위한 Navier-Stokes 해법을 제안하였다. 복잡한 형상에 대한 해석이 용이하도록 비정렬격자 알고리즘을 적용하였으며, 미끄럼 경계조건은 기존의 Maxwell 조건 이외에 새로이 제안된 Langmuir 조건을 적용하였다.

개발한 수치기법의 정확성을 검토하기 위해 연속속류(continuum flow)영역의 문제를 해석하였으며, 미끄럼 유동영역의 대표적인 문제인 미소채널에 대하여 수치해석을 수행하였다. Maxwell 경계조건을 질소 작동유체에 적용한 경우 DSMC 기법보다 해석해에 좀 더 일치하는 결과를 보여주었다. Maxwell 경계조건을 헬륨 유동에 적용한 경우 해석해와 Arkilic 등의 실험결과와 잘 일치함을 보여준다. 헬륨에 대해서 Langmuir 경계조건을 적용한 경우에는 압력의 비선형성이 증가하여 해석해와 일치하는 경향을 보였다.

전반적으로 Maxwell 경계조건의 경우 압력의 비선형성이 감소하는 반면, Langmuir 경계조건에서는 비선형성이 증가하는 결과를 보여준다.

참고문헌

- (1) Gad-el-Hak, M., 1999, "The Fluid Mechanics of Microdevices - The Freeman Scholar Lecture," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 121, pp. 5-33.
- (2) Piekos, E. S. and Breuer, K. S., 1996, "Numerical Modeling of Micromechanical Devices Using the Direct Simulation Monte Carlo Method," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 118, pp. 464-469.
- (3) Xue, H., Fan, Q., and Shu, C., 2000, "Prediction of micro-channel flows using direct simulation Monte Carlo," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 15, pp. 213-219.
- (4) Beskok, A., Karniadakis, G. E., and Trimmer, W., 1996, "Rarefaction and Compressibility Effects in Gas Microflows," *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 118, pp. 448-456.
- (5) Arkilic, E. B., 1997, "Measurement of the Mass Flow and Tangential Momentum Accommodation Coefficient in Silicon Micromachined Channels," *Ph.D. Dissertation, MIT, Cambridge*
- (6) 명노신, 2000, "열역학 층류 비평형 유체역학 모델을 이용한 희박기체 및 MEMS 유동장 해석," 한국항공우주학회지 제 28 권 4 호, pp. 35-47.
- (7) Harley, J. C., Huang, Y., Bau, H. H., and Zemel, J. N., 1995, "Gas flow in micro-channels," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 284, pp. 257-274.
- (8) Arkilic, E. B., Breuer, K. S., and Schmidt, M. A., 1994, "Gaseous Flow in Microchannels," *ASME, FED-Vol. 197, Application of Microfabrication to Fluid Mechanics*, pp. 57-66
- (9) Demirdzic, I. and Muzaferija, S., 1995, "Numerical method for coupled fluid flow, heat transfer and stress analysis using unstructured moving meshes with cells of arbitrary topology," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 125, pp. 235-255.
- (10) Jessee, J. P. and Fiveland, W. A., 1996, "A Cell Vertex Algorithm for the Incompressible Navier-Stokes Equations on Non-orthogonal Grids," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 23, pp.271-293
- (11) Davidson, L., 1996, "A Pressure Correction Method for Unstructured Meshes with Arbitrary Control Volumes," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 22, pp.265-281
- (12) Anderson, W. K., and Bonhaus, D. L., 1994, "An Implicit Upwind Algorithm for Computing Turbulent Flows on Unstructured Grids," *Computers Fluids*, Vol. 23, No. 1, pp. 1-21.
- (13) Gad-el-Hak, M. and Löfdahl, L., 1999, "MEMS applications in turbulence and flow control," *Progress in Aerospace Sciences*, Vol. 35, pp. 101-203.
- (14) Myong, R. S., 1999, "Thermodynamically consistent hydrodynamic computational models for high-Knudsen-number gas flows," *Phys. Fluids*, Vol. 11, No. 9, pp.2788-2802.
- (15) Demirdzic, I., Lilek, Z. and Peric, M., 1993, "A Collocated Finite Volume Method for Predicting Flows at All Speeds," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 16, pp.1029-1050.
- (16) Rincon, J. and Elder, R., 1997, "A High-Resolution Pressure-based Method for Compressible Flows," *Comput. Fluids*, Vol. 26, No. 3, pp.217-231.
- (17) Ghia, U., Ghia, K. N., and Shin, C. T., 1982, "High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid method," *J. Comput. Phys.*, Vol. 48, pp. 387-411.
- (18) Hayes, R. E., Nandakumar, K., and Nasr-el-din, H., 1989, "Steady Laminar Flow in a 90 Degree Planar Branch," *Comput. Fluids*, Vol. 17, No. 4, pp. 537-553.