

# 축방향 유동이 있는 Taylor-Couette 유동에 대한 전산해석

황 종 연\* · 양 경 수\*

## Numerical Study of Taylor-Couette Flow with an Axial Flow

Jong-Yeon Hwang and Kyung-Soo Yang

**Key Words:** Taylor Vortex(테일러 와류), Taylor Number( $Ta$ , 테일러 수), Instability(불안정성), Torque Coefficient(토크 계수), Growth Rate(성장률)

### Abstract

The flow between two concentric cylinders, with the inner one rotating and with an imposed pressure-driven axial flow, is studied using numerical simulation. This study considers the identical flow geometry as in the experiments of Wereley and Lueptow[Phys. Fluid, 11(12), 1999]. They carried out experiments using PIV to measure the velocity fields in a meridional plane of the annulus in detail. When an axial flow is imposed, the critical Taylor number is increased. The axial flow stabilizes the flow field and decreases the torque required to rotate the inner cylinder. The velocity vector fields obtained also show the same flow features found in the experiments of Wereley and Lueptow.

### 1. 서 론

Taylor vortex에 대한 연구는 1923년 G. I. Taylor의 선형 안정성 이론과 실험이후로 많은 연구자들에 의해서 수행되어왔다.<sup>(1-4)</sup> 특히 Chung 등<sup>(5)</sup>은 축방향으로 유동이 있는 경우에 대한 선형 안정성 이론을 제시하여 회전방향의 wavenumber로서 유동의 안정성을 예측할 수 있다고 보고하였다. Gravas 등<sup>(6)</sup>은 축방향 유동이 있는 경우에 대해서 바깥 실린더의 반경에 대한 안쪽 실린더의 반경의 비를 다양하게 변화시키며 실험을 수행하여 유동 불안정성을 해석하였다. 그는 축방향 유동은 유동장을 안정화시키며 그로 인해

Taylor vortex가 발생하는 임계 테일러수( $Ta_c$ )가 증가한다고 보고하였다. 그러나 그들의 실험은 유동장에 대한 충분한 정보를 제공하지 못했다는 단점이 있다. 최근에 PIV(Particle Image Velocimetry)를 이용하여 속도장을 비교적 자세히 관찰한 연구가 보고되었다. Wereley 등<sup>(7)</sup>은 축방향 유동이 있는 경우에 대하여 실험을 수행하여 wavy vortex에 대한 자세한 연구를 수행하였다. 그는 축방향의 레이놀즈수( $Re$ )가 증가하면 helical wavy vortex가 발생함을 확인하였다. 축방향 유동이 있는 Taylor-Couette 유동은 여러 응용 분야에서도 중요한 문제이다. 가령 회전하는 전기기계류에서의 냉각문제나 저어닐 베어링에서의 윤활 문제에서 이러한 형태의 유동을 발견할 수 있다. 또한 축방향의 유동은 유동장을 안정화시키며 회전에 필요한 토크를 감소시키므로 유동장의 제어측면에서도 중요한 문제로 인식되고 있다. 축방향 유동이 없는 경우에 대해서 Taylor vortex와 wavy vortex에 대한 전산 해석적 연구 또한 많은 연구자들에 의해서 수행되었다.<sup>(8-10)</sup> 그러나 이중 대부분은 수치해석적 방법에 관심을 집중하였으며 축방향 유동이 있는 경우에 대한

\* 회원, 인하대학교 대학원

† 책임저자, 회원, 인하대학교 기계·항공·자동차 공학부

E-mail : ksyang@inha.ac.kr

TEL : (032)860-7322 FAX : (032)868-1716

전산 해석적 연구는 저자가 아는 한 전무하다.

본 연구에서는 Wereley 등<sup>(7)</sup>의 실험처럼 축방향 유동이 있는 경우에 대하여 그들이 실험에서 사용한 실린더와 동일한 반경비를 갖는 형상(Fig. 1)에 대하여 전산해석을 수행하였다. 축방향 유동이 없는 경우는 황중연과 양경수<sup>(11)</sup>에 의해서 고려되었다. 특히 이렇게 반경비,  $Ta$  뿐만 아니라 축방향  $Re$  등 많은 파라미터가 중요하게 인식되는 유동의 경우는 많은 파라미터의 변화에 대해 비교적 쉽게 구현할 수 있는 전산해석적 연구가 앞으로 연구자들이 지향해야할 방법이라고 할 수 있다. 본 연구에서는 Wereley 등<sup>(7)</sup>의 실험에서 얻어진 정보의 거의 대부분을 재확인하였으며 유동장에 대한 자세한 정보를 얻을 수 있었다. 축방향 유동이 유동 불안정성에 미치는 영향에 대한 심층적인 연구도 수행되었고 travelling wave에 대한 공간적인 관찰도 수행되었다.

## 2. 수식전개 및 수치해석법

본 절은 앞서 발표된 논문<sup>(11)</sup>에서와 같다.

## 3. 유동 파라미터 및 경계조건

축방향 유동이 있는 경우의  $Re$ 는  $Re = \overline{wd}/\nu$ 로 정의하였는데 여기서  $\overline{w}$ 는 축방향으로의 평균 속도이고  $d$ 는 바깥 실린더와 안쪽 실린더의 반경의 차이를 의미한다.  $Ta$ 는 여러 가지 다양한 형태로 정의될 수 있으나 본 연구에서는  $Ta = r_i \Omega d / \nu$ 로 정의하였다. 여기서  $r_i$ 는 안쪽 실린더의 반경이고  $\Omega$ 는 회전하는 안쪽 실린더의 각속도를 의미한다. 바깥 실린더 반경에 대한 안쪽 실린더 반경의 비( $\eta$ )는 Wereley 등의 실험과 동일하게 0.83을 사용하였다. 계산영역의 횡방향 크기( $H$ )의 결정은 세심한 주의가 요구된다. 본 연구에서는 횡방향으로 주기조건을 사용하였고 Wereley 등의 실험치를 고려하여 실린더사이의 간격  $d$ 의 약 3.8배로 결정하였다. Figure 1은 전체 계산 영역과 사용된 격자계를 보여준다. 여기서  $\Omega$ 의 방향은 시계방향으로 결정하였다. Figure 1(a)는 횡방향 단면을 Fig. 1(b)는 회전방향 실린더 사이에서의 단면을 각각 보여준다. 사용된 격자계는 body-fitted O-격자계로서 본 연구에서 고려하는 형상에 가장 적합하며, 물리량들의 구

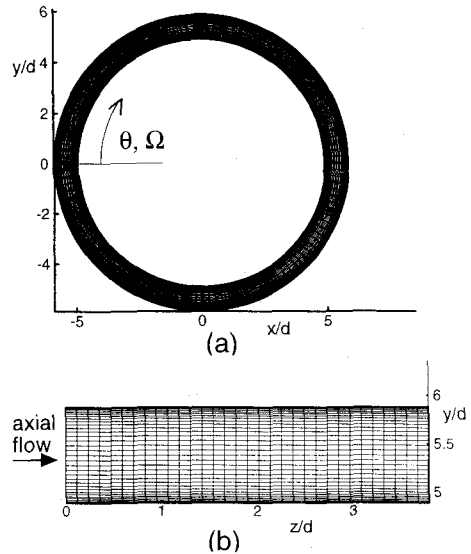


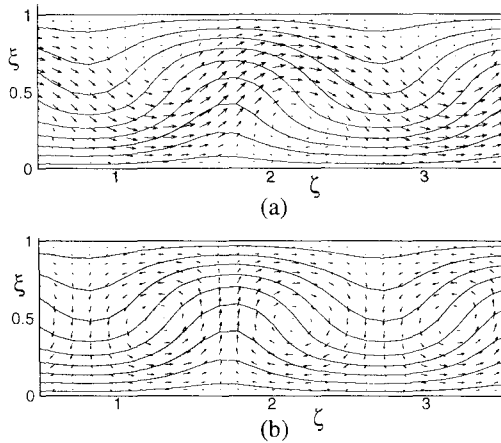
Fig. 1 Computational domain and grid system ; (a) cylinder cross-section, (b) meridional section

배가 심한 실린더 벽 근처에 더 많은 격자점을 분포시켰다. 사용된 격자점의 수는 회전, 반경, 그리고 횡방향으로 각각  $128 \times 32 \times 32$  이 사용되었고  $256 \times 64 \times 64$ 를 사용한 격자세분화연구(grid-refinement study) 결과 물리량들의 정량적인 큰 차이는 발견되지 않았다. 실린더 표면에서는 no-slip 조건이 적용되었으며 계산의 초기조건으로는 회전방향으로 Taylor vortex가 존재하지 않는 경우에 해당하는 완전 발달된 임밀해를 적용하였다.

## 4. 결과 및 토론

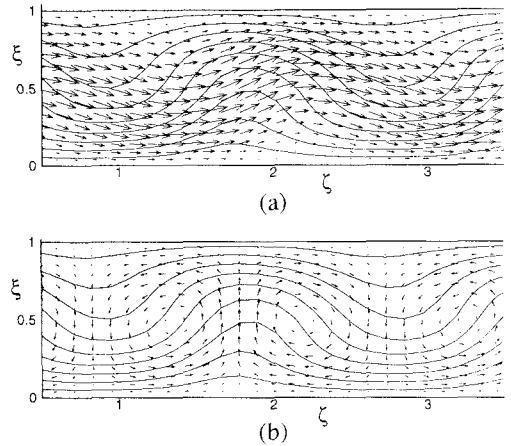
### 4.1 Non-wavy Taylor vortex 유동

본 절에서는 축방향 유동이 있는 경우의 Taylor-Couette 유동을 고려한다. 서론에서 언급한 바와 같이 축방향 유동은 유동장을 안정화시키므로 wavy vortex로 천이 되는  $Ta$ 가 축방향 유동이 없는 경우보다 다소 증가한다. Figure 2(a)는  $Ta=123$ ,  $Re=4.9$ 에 대하여 축방향과 반경방향에서의 유동장을 보여준다. 이 경우의 유동장은 non-wavy Taylor vortex에 해당한다. 여기서 축방향과 반경방향의 좌표는 각각  $\xi = (r - r_i)/d$



**Fig. 2** Velocity vectors and magnitude contours of azimuthal velocity in a radial-axial plane at  $Ta=123$ ,  $Re=4.9$ , (a) including the axial velocity profile (b) with the axial velocity profile removed

와,  $\zeta=z/d$ 로 각각 표시하였다. 여기서  $r_i$ 는 안쪽 실린더의 반경을 의미한다. 실선으로 표시된 contour는 회전방향 속도의 크기를 나타내고 아래경계는 안쪽 실린더를 위 경계는 바깥 실린더를 나타낸다. 축방향 유동에 의해 Taylor vortex의 아래위로 번갈아 가면서 흐르는 것을 볼 수 있다. 또한 vortex의 크기가 축방향 유동이 없을 때보다 더 작아졌으며 안쪽 실린더 쪽의 vortex의 크기가 바깥 실린더 쪽의 vortex의 크기보다 다소 크다. Figure 2(b)는 Taylor vortex를 뚜렷이 관찰하기 위해서 해석적으로 구한 축방향의 속도성분( $w(r)$ )을 빼어준 유동장을 보여 준다. 여기서  $w(r)$ 은 annulus를 지나는 유동의 해석적인 해로서  $w(r)=A \ln(B/r)-Cr^2$ 으로 주어지며 A, B, C는 상수이다. 유동의 패턴이 축방향 유동이 없는 경우와 유사하다.<sup>(11)</sup> 또한 vortex사이의 경계를 보면 안쪽 실린더를 향하는 유동의 속도가 바깥 실린더를 향하는 유동의 속도보다 작다. 즉 Wereley 등<sup>(7)</sup>이 보고한 바와 같이 축방향의 유동이 있는 경우는 축방향의 유동이 없는 유동장에 축방향의 속도성분( $w(r)$ )을 중첩시킨 경우와 유사하다는 사실을 유추할 수 있다. 한가지 특징은 축방향의 유동이 없을 때 non-wavy vortex의 경우는 정상유동이지만 축방향의 유동이 있는 경우는 non-wavy vortex의 특징을 유지하면서



**Fig. 3** Velocity vectors and magnitude contours of azimuthal velocity in a radial-axial plane at  $Ta=129$ ,  $Re=13.1$ , (a) including the axial velocity profile (b) with the axial velocity profile removed

Taylor vortex가 축방향으로 어떤 속도를 가지고 이동하므로 엄밀히 말해서 정상유동은 아니다. 하지만 축방향으로 이동하는 속도가 일정하기 때문에 축방향 속도를 갖는 상대좌표계에서 본다면 정상 유동으로 간주할 수 있다. Figure 3은  $Ta=129$ ,  $Re=13.1$ 에 대하여 축방향과 반경방향에서의 유동장을 보여준다. 이 경우에도 wavy vortex는 발견되지 않았다. 같은  $Ta$ 에서 축방향의 유동이 없는 경우는 wavy vortex에 해당되었다는 점을 고려한다면<sup>(11)</sup> 축방향의 유동에 의해 wavy vortex로 천이 되는  $Ta$ 가 다소 증가한다는 사실을 알 수 있다. 축방향의 속도성분을 제거하지 않은 Fig. 2(a)와 Fig. 3(a)를 비교하면 축방향의  $Re$ 가 다소 높은 Fig. 3(a)에서는 축방향 유동에 가려져서 마치 Taylor vortex가 없는 것처럼 보인다. 이러한 형태의 vortex를 helical vortex라고 부른다.<sup>(7)</sup> 그러나 축방향 속도를 제거한 Fig. 3(b)를 보면 non-wavy Taylor vortex를 뚜렷이 볼 수 있다. 이러한 정성적인 결과들은 Wereley 등<sup>(7)</sup>의 실험과 정확히 일치되었다.

#### 4.2 Wavy vortex 유동

Figure 4는 본 연구와 논문<sup>(11)</sup>에서 수행한 여러 가지 경우의  $Ta$ ,  $Re$ 에 대하여 유동장의 형태를

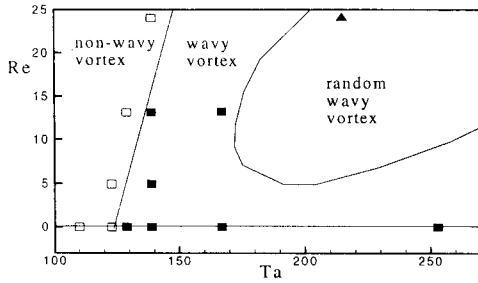


Fig. 4 Flow conditions in the  $Ta-Re$  plane at which current simulations were made; non-wavy vortex( □ ), wavy vortex( ■ ), random wavy vortex( ▲ )

도시한 것이다. 여기서 실선은 non-wavy vortex와 wavy vortex의 경계, wavy vortex와 random wavy vortex의 경계를 각각 나타내는데 이는 Wereley 등의 논문을 참고하여 대략적으로 표시한 것이다. non-wavy vortex와 wavy vortex의 경계 선을 보면  $Re$ 가 증가함에 따라 대체적으로 그 경계를 나타내는  $Ta$ 도 증가하고 있음을 확인할 수 있다.  $Ta=139$ 를 보면 축방향 유동이 없는 경우와 축방향  $Re=13.1$ 인 경우의 유동 형태가 둘다 wavy vortex이지만  $Re=24.0$ 인 경우는 wavy vortex가 나타나지 않음을 볼 수 있다. 이는 뒤에서 거론할 성장률을 해석함으로써 확인되었다. 만일  $Re$ 를 더욱 높인다면  $Ta=139$ 인 경우에도 non-wavy vortex가 형성될 수 있음을 쉽게 유추할 수 있다.  $Ta=215, Re=24.0$ 인 경우 회전방향이나 시간적으로 wavy vortex의 규칙적인 양상을 볼 수 없었는데 이를 random wavy vortex라고 한다. 이 random wavy vortex는 축방향이 없고  $Ta=253$ 인 경우에는 발견되지 않았고 이 사실 또한 Wereley 등의 실험에서도 확인되었다. Figure 5는  $Ta=139, Re=4.9$ 인 경우에 한 travelling wave에서 축방향과 반경방향의 한 평면에서 축방향의 속도 성분 ( $w(r)$ )을 빼어준 속도벡터를 보여준다. 여기서 각 유동장의 윗 경계와 아래 경계는 Fig.2에서와 마찬가지로 각각 바깥쪽과 안쪽 실린더를 나타내고 실선으로 표시된 contour는 회전 방향 속도의 크기를 나타낸다. 또한\*로 표시된 기호는 각 vortex의 중앙을 나타낸다. 회전방

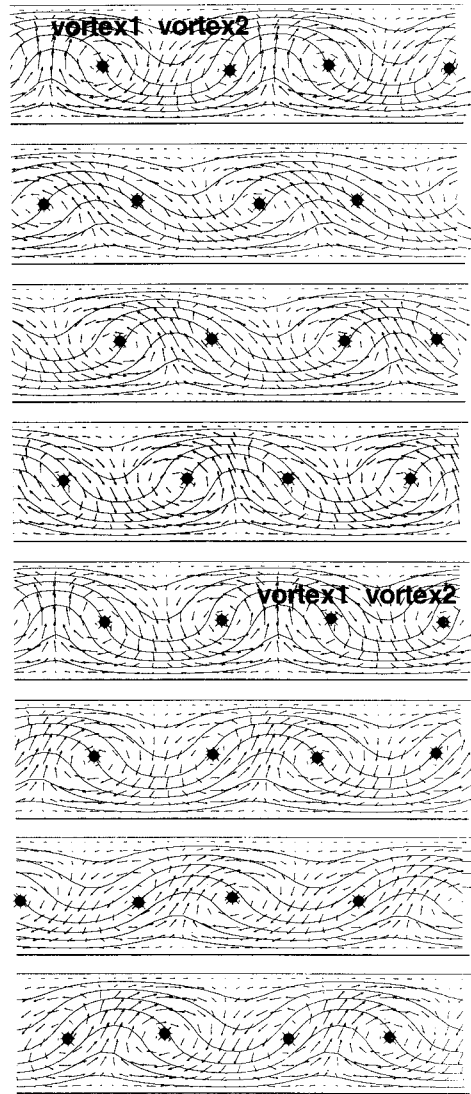


Fig. 5 Velocity vectors and magnitude contours of azimuthal velocity with the axial velocity profile removed in a radial-axial plane at  $Ta=139, Re=4.9$  during one travelling wave (from top to bottom)

향으로의 공간적 관찰을 수행하지 않고 주어진 평면에서 시간에 따른 travelling wave를 관찰한 Wereley 등의 결과와 공간적 관찰을 수행한 본 연구의 결과는 매우 잘 일치되었다. 축방향 유동이 있는 경우 이러한 공간적 관찰의 장점은

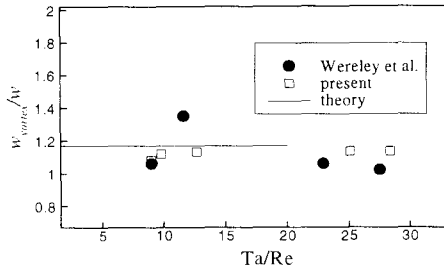


Fig. 6 Vortex translation speed as a function of  $Ta/Re$

Taylor vortex의 공간적인 진동 양상을 명확히 볼 수 있다는 것이다. 즉 Weresley 등의 연구에서와 같이 한 평면에서 시간적 관찰을 하면 한 travelling wave에서 Taylor vortex 자체의 진동에 의한 속도와 축방향 유동에 의한 Taylor vortex의 축방향으로 이동하는 속도가 혼재되어 있기 때문에 Taylor vortex의 진동 양상을 명확히 관찰하기 힘들다는 점이다. 이는 축방향 유동이 있는 경우에 travelling wave를 명확히 구현하기 위해서는 전산해석적 방법이 더 효과적이라는 사실을 제시하고 있다. Figure 6은 각각의  $Ta/Re$ 에 대한 Taylor vortex의 축방향 속도 ( $w_{vortex}$ )를 이론치<sup>(7)</sup>와 Weresley 등의 실험<sup>(7)</sup>과 본 연구의 결과를 비교하여 나타낸 것이다. 여기서  $w_{vortex}$ 는 축방향 유동의 평균속도 ( $\bar{w}$ )로 무차원화 하였다. 이론값은  $Ta/Re$ 의 범위가 1.6에서 20사이이고 wavy vortex로 천이 되는 범위에서 계산한 것이다. 따라서 본 연구나 Weresley 등의 실험과는 정확히 일치하지는 않지만 대략적으로 비슷한 값을 보이고 있으며  $Ta/Re$ 가 20이 넘는 구간에서도 대체적으로 20이전의 구간과 경향이 비슷하다. Taylor vortex가 형성되는 불안정성을 고찰하기 위하여 다음과 같은 무차원수를 실린더 사이의 중앙 ( $r^* = r_i + 0.5d$ )에서의 한  $\theta = \pm$ 면에서 정의한다.

$$V_{cl} = \frac{1}{\Omega r_i} \frac{1}{2\pi r^* H} \int_0^H \int_0^{2\pi} |v_r(\theta, r^*, z)| r^* d\theta dz \quad (4)$$

여기서  $\Omega$ 와  $H$ 는 각각 회전하는 안쪽 실린더의 각속도와 계산영역의 축방향 크기를 나타낸다. 정량적인  $V_{cl}$ 의 기울기를 알아보기 위하여 시간에 따른 성장률( $\sigma$ )을  $V_{cl} \sim \exp(\sigma t)$ 와 같이 정의하여 Fig. 7에 나타내었다. 유동이 완전히 발달

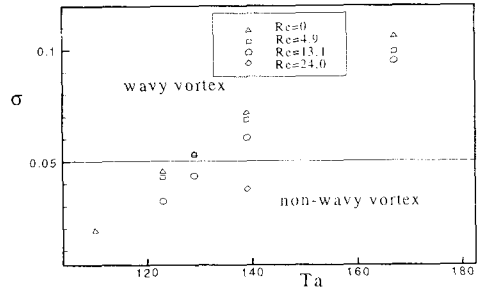


Fig. 7 Growth rate of Taylor vortices

되기까지 약 15,000시간 단계가 필요하였지만 성장률을 얻을 수 있기까지는 약 2,000시간 단계가 필요하다. 여기서 2,000시간 단계는 안쪽 실린더의 약 27회의 회전에 해당한다. 따라서 Fig.7에서와 같이 비교적 많은 경우의  $Ta$ ,  $Re$ 에 대해서 경제적으로 성장률을 얻을 수 있었다. 여기서 실선은 non-wavy vortex와 wavy vortex의 경계를 대략적으로 나타낸다. 같은  $Ta$ 에 대하여 축방향 속도가 있는 경우의 성장률이 축방향 속도가 없는 경우보다 항상 작음을 확인할 수 있다.  $Ta = 139$ 인 경우를 보면  $Re = 24.0$ 인 경우는 wavy vortex가 나타나지 않음을 확인할 수 있다. 이 그래프를 이용하면 다른 여러 경우의  $Ta$ ,  $Re$ 에서 과도한 계산시간의 소모 없이 유동장이 non-wavy인지 wavy인지 예측할 수 있다. 이는 수치해석시 소요되는 계산시간을 절약할 수 있다는 점에서 중요한 의미를 갖는다. 여러 경우의  $Ta$ ,  $Re$ 에서 실린더를 회전시키는데 요구되는 토크의 상관

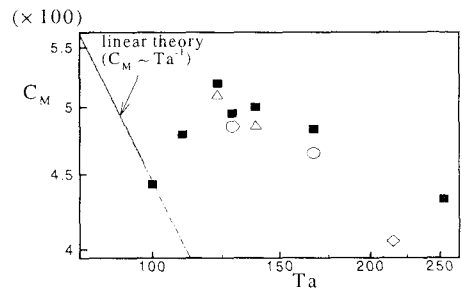


Fig. 8 Torque coefficient ( $C_M$ ) for inner cylinder vs.  $Ta$  at various  $Re$ ,  $Re = 0.0$ (■),  $Re = 4.9$ (△),  $Re = 13.1$ (○),  $Re = 24.0$ (◇)

관계를 알아보기 위하여 다음과 같이 정의되는 토크계수를 도입하였다.

$$C_M = T_i / [0.5\pi\rho(\Omega r_i)^2(r_i)^2H] \quad (5)$$

여기서  $T_i$ 는 안쪽 실린더를 회전시키는데 필요한 토크이다. Figure 8은 본 연구에서 수행한 여러 경우의  $Ta$ ,  $Re$ 에 대한  $C_M$ 을 나타낸 것이다. 여기서 실선은 선형이론으로 구한 값이다. 축방향 유동은 회전에 필요한 토크를 감소시킴을 볼 수 있고  $Re$ 가 증가할수록 토크는 더 많이 감소하며 이러한 경향은  $Ta$ 가 클수록 더욱 심해지고 있다. 회전방향의 한 평면에서 Taylor vortex의 중심과 vortex 사이의 경계에서의 회전방향속도분포는  $C_M$ 에 영향을 미친다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 축방향 유동이 있는 경우의 Taylor-Couette 유동에 대해서 전산 해석을 수행하였다. 축방향 유동이 있는 경우 유동장을 안정화시킨다는 사실이 여러 실험결과와 일치되었고 이 축방향 유동에 의해 성장률이 감소함이 관찰되었다. 또한 여러 경우의  $Ta$ 와  $Re$ 에 대한 성장률을 알면 각각의 경우에 대한 유동의 특성을 예측할 수 있음이 확인되었다. 3차원 계산을 통하여 주어진 시간에 회전방향 공간에서 travelling wave를 관찰하여 회전방향의 한 공간에서 시간에 따른 실험을 수행한 Wereley의 결과가 타당함을 보일 수 있었으며 대부분의 물리량들이 그의 실험결과와 일관성 있게 일치되었다. 여러 경우의  $Ta$ 와  $Re$ 에 대해 자세한 속도장을 파악할 수 있었으며 토크 계수에 미치는 영향이 확인되었다. PIV로 실험을 수행한 Wereley의 실험결과와 많은 비교가 이루어졌고 대부분 잘 일치되었다. 또한 성장률과 vortex의 형태는 서로 밀접한 관계가 있다는 사실을 밝혀내었다. 이를 이용하면 여러 경우의  $Ta$ 와  $Re$ 에 대한 연구를 수행할 때 성장률만 계산하면 vortex의 형태를 예측할 수 있음이 확인되었다.

#### 참고문헌

- (1) Taylor, G. I., 1923, "Stability of a Viscous Liquid Contained between Two Rotating Cylinders," *Phil. Trans. R. Soc.*, A223, pp. 289~343.
- (2) Stuart, J. T., 1958, "On the Non-Linear Mechanics of Hydrodynamic Stability," *J. Fluid Mech.*, Vol. 4, pp. 1~21.
- (3) Davey, A., 1962, "The Growth of Taylor Vortices in Flow between Rotating Cylinders," *J. Fluid Mech.*, Vol. 14, pp. 336~368.
- (4) DiPrima, R. C., 1967, "Vector eigenfunction Expansions for the Growth of Taylor Vortices in the Flow between Rotating Cylinders," In *Nonlinear Partial Differential Equations* (ed. W. F. Ames), pp. 19~42, Academic.
- (5) Chung, K. C. and Astill, K. N., 1977, "Hydrodynamic Instability of Viscous Flow between Rotating Coaxial Cylinders with Fully Developed Axial Flow," *J. Fluid Mech.*, Vol. 81, pp. 641~655.
- (6) Gravas, N. and Martin, B. W., 1978, "Instability of Viscous Axial Flow in Annuli Having a Rotating Inner Cylinder," *J. Fluid Mech.*, Vol. 86, pp. 385~394.
- (7) Wereley, S. T. and Lueptow, R. M., 1999, "Velocity Field for Taylor-Couette Flow with an Axial Flow," *Phys. Fluids*, 11(12), pp. 3637~3649.
- (8) Jones, C. A., 1985, "The Transition to Wavy Taylor Vortices," *J. Fluid Mech.*, Vol. 157, pp. 135~162.
- (9) Schroder, W. and Keller, H. B., 1990, "Wavy Taylor-Vortex Flows via Multigrid-Continuation Methods," *J. Comput. Phys.*, Vol. 91, pp. 197~227.
- (10) Marcus, P. S., 1984, "Simulation of Taylor-Couette Flow, Part 2, Numerical Results for Wavy-Vortex Flow with One Travelling Wave," *J. Fluid Mech.*, Vol. 146, pp. 65~113.
- (11) 황종연, 양경수, 2001, "Wavy Taylor-Couette 유동에 대한 전산해석( I ), 축방향 유동이 없는 경우," *대한기계학회 논문집 B권*, 제 25권, 제 5호, 게재예정.