

# 시간에 따라 변하는 회전 각속도를 가지는 원통용기내의 스피업

김경석\* · 곽호상\*\* · 현재민\*\*\*

## Spin-up in a Cylinder with a Time-Dependent Rotation Rate

Kyung Seok Kim, Ho Sang Kwak and Jae Min Hyun

**Key Words:** Ekman layer(에크만 경계층), Azimuthal velocity(방위각방향 속도), Coriolis force(코리올리스 힘), Homogenous spin-up(균질유체의 스피업), Ekman number(에크만 수)

### Abstract

Comprehensive numerical computations are made of a homogenous spin-up in a cylindrical cavity with a time-dependent rotation rate. Numerical solutions are acquired to the governing axisymmetric cylindrical Navier-Stokes equation. A rotation rate formula is  $\Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega (1 - \exp(-t/t_c))$ . If  $t_c$  is large, it implies that a rotation change rate is small. The Ekman number,  $E$ , is set to  $10^{-4}$  and the aspect ratio,  $R/H$ , fixed to 1. For a linear spin-up ( $\epsilon \ll 1$ ), the major contributor to spin-up in the interior is not viscous-diffusion term but inviscid term, especially Coriolis term, though  $t_c$  is very large. The viscous-diffusion term only works near sidewall. But for spin-up from rest, when  $t_c$  is very large, viscous-diffusion term affects interior area as well as sidewall, initially. So azimuthal velocity of interior for large  $t_c$  appears faster than that of interior for relatively small  $t_c$ . However, the viscous-diffusion term of interior decreases as time increases. Instead, inviscid term appears in the interior.

### 1. 서론

스피업이란 유체가 들어있는 용기를 정지상태에서 갑자기 각속도  $\Omega$ 를 주어 회전하거나, 용기와 같은 각속도로 돌고 있는 상태에서 갑자기 각속도를 증가시키는 경우에 있어서 과도기적인 현상을 말한다. 이러한 스피업 현상은 폐기물 처리에 있어서의 회전반응기, 원심분리기, 유체기계등에서 발견되고 있다. 또한 지구물리학적 관점에서 해류나 기상변동 등에서도 상당히 중요한 현상이 되고 있다.

지금까지 스피업에 관한 연구는 지난 수십년간 원통용기내의 비압축성 유체에 대해 많이 다루어 왔다. 본 연구에서도 같은 경우에 대해서 연구를 수행하였다.

스피업 문제에서 중요한 무차원수로는 Ekman 수( $E = \nu / \Omega H^2$ )와 Rossby 수( $\epsilon = \Delta \Omega / \Omega$ )를 들 수 있다. Ekman수가 작은 경우에 있어서 스피업 문제는 원판주위의 경계층 유동과 점성의 효과가 무시되는 내부유동으로 나눌 수 있다. 이때, 위판과 아래판의  $O(\Omega^{-1})$ 의 시간척도에서 형성된 Ekman 경계층에서는 판과 유체의 vorticity차에 의해서 Ekman 흡입이 일어난다. 그런 다음 흡입된 유체는 기하학적인 제약 때문에 바깥쪽으로 이동하게 되고 내부에서는 유동의 연속성을 만족하기 위해서 안쪽으로 유동이 발생하게 된다. 그리고 점성의 효과를 무시할 수 있는 내부의 유동은 각운동

\* 한국과학기술원 기계공학과

\*\* 금오공과대학 기계공학과

\*\*\* 한국과학기술원 기계공학과

량 보존에 의해서 작은 위치에 있는 유체의 회전 속도를 증가시키는 구조로써 스펀업 되는 것이다.

$\epsilon \ll 1$ 인 경우에 대해서 Greenspan & Howard[1]는 균질유체에 대한 선형해를 구하였다. 그들은 무한한 반경을 가지는 원판사이의 스펀업 문제를 다루어서 Ekman 흡입에 의해서 자오면 상에 유동이 발생하고, 실질적인 스펀업은  $O(E^{1/2}\Omega^1)$ 의 시간척도에서 대부분 일어나고, 유체가 새로운 각속도로 강제운동을 하기까지는  $O(E^1\Omega^1)$ 의 시간척도가 걸린다고 하였다.

Wedemeyer[7]는 원통용기안의 균질유체에 대한 비선형 스펀업 문제의 선형해를 얻었다. 여기서 비선형화된 문제라는 것은 초기의 각속도  $\Omega=0$ 가 되는 것을 의미한다. 그는 이러한 문제에서 front가 존재한다는 것을 확인하였다. 즉, 스펀업 되는 과정에서 중심축과 front사이의 내부는 방위각 성분의 속도가 없고, front와 옆벽면 사이의 공간에서 방위각 성분의 속도가 있다는 것이다. 그리고 이 front가 시간이 지남에 따라 점점 안쪽으로 전파하여 들어간다는 것이다. 즉, front가 도달하고 나서야 유체가 스펀업 되기 시작한다는 것이다.

Hyun등[3]은 Wedemeyer와 같은 문제에 대해서 수치계산을 수행하였다. 그들은 방위각 성분의 가속도를 발생시키는 원인을 알아보기 위하여 방위각 방향의 모멘트 방정식 각 항들을 분리계산하여 그 특성을 알아보았다. 그리하여 그들은 Wedemeyer가 나타내지 못한 front 근처의 유동특성에 대해서 연구를 수행하였다. 그리고 유체가 스펀업 되는데 있어서 시간에 따른 각항들의 기여도를 조사하였다.

지금까지 연구자들은 균질유체에 있어서 스펀업 문제를 많이 다루었는데 모든 연구들이 각속도의 변화를 계단상의 형태로 갑자기 변화시켰다. 그러나 본 연구에서는 각속도를 계단상의 갑작스런 변화가 아닌 시간의 함수로써 연속적으로 변화시켜, 선형화된 문제와 비선형화된 문제 두가지의 연구를 수행하였다. 여기서 각속도 함수로서는 Exponential 함수를 사용하였다. 즉, 초기의 각속도  $\Omega_i$ 에서 갑자기  $\Omega_f = \Omega_i + \Delta\Omega(1 - \exp(-t/t_c))$ 의 형태로 회전시키는 것이다. 여기서 비선형 문제의 경우  $\Omega_i=0$ 가 된다. 여기서  $t_c$ 는 각속도 변화율의 크기를 나타내는 것으로, 본 연구에서는 이

값이 중요한 변수가 된다.  $t_c$ 의 값이 커진다는 것은 변화율의 값이 아주 작아서 서서히  $\Omega_f$ 에 도달한다는 것이다. 따라서 본 연구에서는  $t_c$  값에 따라 유체가 스펀업 됨에 있어서 그 특성은 무엇인지 알아보고, 기존의 스펀업 연구와 어떻게 다른지 알아보려고 한다.

## 2. 수학적 모델 및 수치계산

종횡비(R/H)=1인 실린더 내부안에 비압축성 유체가 가득차 있다. 그리고 앞에서 말했듯이 비선형적인 스펀업일 경우에는  $\Omega_i$ 를 서론에서 말한  $\Omega_f$ 로 회전시키고, 비선형적인 스펀업일 경우에는  $\Omega_i=0$ 가 된다. 이러한 시스템의 개요는 그림 1에 잘 나타나 있다. 유동장은 축대칭 비정상 Navier-Stokes 방정식에 의해 지배되고, 무차원화된 방정식은 다음과 같다. 그리고 원통좌표계의  $(r, \theta, z)$ 에 해당하는 속도를  $(u, v, w)$ 라 한다.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - (2 + \frac{v}{r})v = -\frac{\partial p}{\partial r} + E(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2}) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + (2 + \frac{v}{r})u = E(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + E\nabla^2 w \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

여기서  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial}{r\partial r}(r \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  을 나타낸다. 비선형 스펀업의 경우에 있어서는 위의 방정식에서  $v$  대신  $v'$ 를 사용한다. 여기서  $v'$ 는 상대좌표계에 있어서  $v = v' + r$ 의 관계를 가진다.

선형 스펀업 시스템의 초기 조건과 경계조건은 다음과 같다.

$$u=v=w=0 \quad \text{at } t=0 \quad (5)$$

$$u=w=0, v=r \epsilon (1 - \exp(-t/t_c)) \quad \text{at } z=0 \quad (6)$$

$$u=v = \partial w / \partial r = 0 \quad \text{at } r=0 \quad (7)$$

$$u=w=0, v=r \epsilon (1 - \exp(-t/t_c)) \quad \text{at } z=R/H \quad (8)$$

비선형 스펀업 시스템의 초기 조건과 경계조건

은 다음과 같다.

$$u=w=0, v'=-r \quad \text{at } t=0 \quad (9)$$

$$u=w=0, v'=-\text{rexp}(-t/t_c) \quad \text{at } z=0 \quad (10)$$

$$u=w=\partial w/\partial r=0 \quad \text{at } r=0 \quad (11)$$

$$u=w=0, v'=-\text{rexp}(-t/t_c) \quad \text{at } z=R/H \quad (12)$$

여기서 사용한 무차원 변수는 다음과 같다.

$$t^* = t\Omega_i, (u^*, v^*, w^*) = \frac{(u, v, w)}{R\Omega_i}, (r^*, z^*) =$$

$$\frac{(r, z)}{H}, E = \frac{\nu}{\Omega_i H^2}, t_c^* = t_c \Omega_i$$

비선형 스펀업의 무차원 변수의 경우에는  $v$  대신  $v'$ 를 사용하고, 무차원 방정식과 초기, 경계조건에서  $*$ 를 생략하였고 이후로도 생략한다.

SIMPLER 알고리즘[4]에 기초를 둔 FVM을 이용하였고 QUICK scheme을 사용하였고 Ekman 경계층내에 5개 이상의 격자점이 포함되게 하기 위해 비균등 격자계를 사용하였다.

Ekman 수는  $10^4$ 으로 고정하였고, 중요한 변수인  $t_c$ 는 1, 100, 10000의 값을 사용하였다. 왜냐하면  $E=10^{-4}$ 으로 고정한 상태에서 1, 100, 10000은 각각 Ekman 경계층 형성 시간척도, 스펀업 시간척도, 확산 시간척도를 나타내기 때문이다. 그리하여  $t_c$ 가 스펀업 시간척도의 값을 가질때와 이것보다 상당히 작은 Ekman 경계층 형성 시간척도의 값을 가질때와 또한, 상당히 큰 확산 시간척도를 가질때의 결과를 비교하고자 한다. 그리고  $t_c$ 를 각속도  $\Omega$ 로 무차원했기 때문에 만일  $t_c=100$ 이라는 것은 회전 각속도의 100배라는 의미를 갖게 된다. 그리고 각 시간마다의 수렴조건은 유동장의 최대 상대 변화율이  $10^{-4}$  이하가 되도록 계산을 수행하였다.

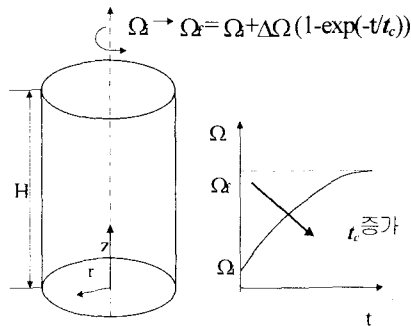


Figure. 1. Schematic diagram

### 3. 결과 및 고찰

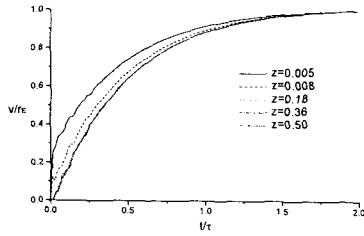
본 연구는 Ekman 수를  $10^4$ 으로 고정하여 종횡비가 일정한 가운데 경계층과 내부의 구분을 확실히 나타내도록 하였다. 또한 선형 스펀업의 경우에는 Rossby 수를 0.05로 하였는데, 이것은 스펀업 유동에 대한 이전의 연구에서 주어진 바와 같이 점성효과가 작은 내부유동에서 방정식의 비선형성을 작게 하여 기존의 결과와 비교하기 위함이다.

#### 3-1. 선형 스펀업

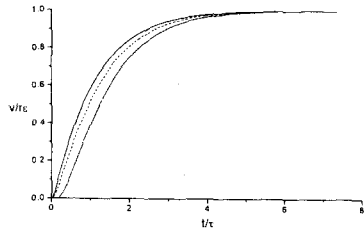
그림 2는 각각의  $t_c$ 값에 대해  $r=0.5$ 로 고정한 상태에서  $z$ 의 여러점에 대한 스펀업 결과를 보인 것이다. 이때 Ekman 수는  $10^4$ 이기 때문에 경계층의 두께  $\delta_E \sim 0.01$ 이 된다. 따라서 경계층 내부에 2개의 점을 잡고 내부에 3개의 점을 잡아 결과를 나타내었다. 그림 2-(a)는 기존의 계단상의 각속도 증가와 유사하게 아주 빠르게 최종 각속도로 증가시키는 경우로 경계층 내부의 두점을 제외하고는 거의 같은 속도로 스펀업 되는 것을 볼 수 있다. 이것은 균질 유체의 스펀업에서는 수직방향에 따라 방위각 속도의 구배가 없는 Taylor-Proudman 정리를 만족함을 나타낸다. 여기서  $\tau$ 는 스펀업 시간척도를 나타내는 것으로 본 연구에서는 100의 값을 가진다.  $t_c$ 가 증가함에 따라 경계층 안의 점과 내부의 점이 스펀업 되는 시간이 거의 비슷하게 됨을 알 수 있다. 예를 들어  $t_c=10000$ 인 경우에는 내부나 경계층 안의 점에서의 스펀업 되는 시간이 거의 차이가 없음을 알 수 있다.

이와 같은 현상은 그림 3에서도 잘 나타난다. 이것은  $z=0.25$ 인 지점에서의  $r$ 에 따라 여러점에서의 스펀업 결과를 나타낸 것이다.

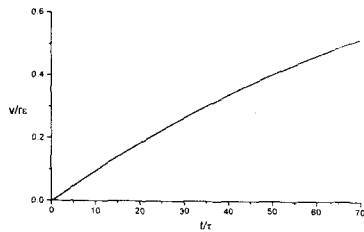
그림 3-(a)는 위에서 말한것과 마찬가지로 기존의 연구결과와 비슷한 양상을 보인다. 그리고  $t_c$ 가 증가함에 따라 그림 2와 마찬가지로 경계층과 내부의 방위각 성분의 속도가 스펀업 되는 차이가 거의 없어지고 있음을 알 수 있다. 이상으로 볼 때  $t_c$ 가 상당히 크게 될 경우에는 바깥표면이나 내부나 속도가 빨리 지는 현상이 거의 같게 때문에 강제운동 하는 것처럼 보인다.



(a)



(b)

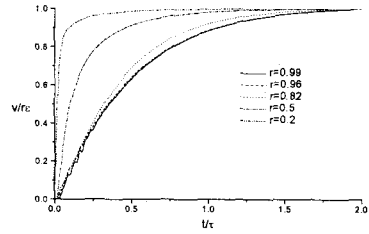


(c)

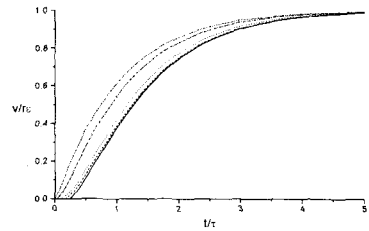
Figure. 2. Spin-up results at  $r=0.5$ (a)  $t_c/\tau=0.01$ , (b)  $t_c/\tau=1$ , (c)  $t_c/\tau=100$ 

하지만 그림 4는 그림 2와 3의  $t_c=10000$ 인 경우의 초기상태를 나타내는 것인데 그 속도 차이는 상당히 작으나 분명히 경계층과 내부의 점이 스피업 되는 것이 차이가 남을 알 수 있다. 그리고 내부의 3개지점은 거의 같은 시간으로 스피업 되는 것을 알 수 있는데 이것은  $t_c$ 가 상당히 커도 위에서 말한 Taylor-Proudman 정리를 만족함을 알 수 있다.

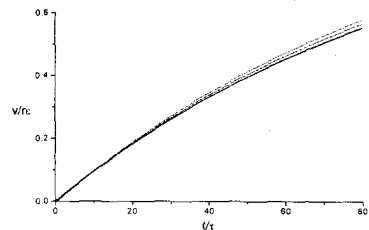
그림 5는 시간  $t/\tau=0.7$ 의 경우에 방위각 방향의 모멘트 방정식에서 비점성을 나타내는 반지름 방향의 대류항과 수직방향의 대류항, curvature항, Coriolis항을  $z=0.25$ 위치에서  $r$ 방향에 따라 나타낸 것이다. 이것을 보면 기존의 스피업 문제와 마찬가지로 Coriolis항이 내부에서 유체를 스피업 시



(a)



(b)



(c)

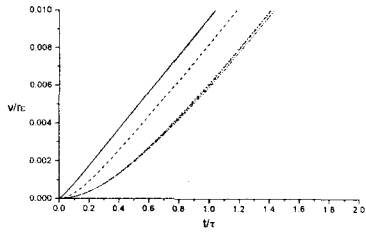
Figure. 3. Spin-up results at  $z=0.25$ (a)  $t_c/\tau=0.01$ , (b)  $t_c/\tau=1$ , (c)  $t_c/\tau=100$ 

키는데 있어 주요한 인자임을 알 수 있다. 이것은 시간이 아주 초기일 경우와 시간이 많이 흐른 후에도 같은 현상이 일어남을 알 수 있었다.

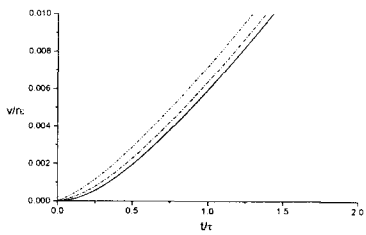
그림 6은 위에서 말한 비점성부분을 나타내는 네가지의 항을 더한 것과 점성항을  $z=0.25$ 위치에서  $r$ 방향에 따라  $t/\tau=0.7$ 일때 나타낸 것이다.

$t_c=1$ 인 그림 10-(a)의 경우는 스피업이 상당히 진행된 상태여서 벽쪽의 점성의 영향이 많이 줄어들음을 볼 수 있다. 하지만 그림 10-(b), (c)의 경우는 최종적인 각속도에 도달하기까지는 많은 시간이 남아 점성항이 벽쪽에서 여전히 중요한 역할을 한다. 하지만 세 경우 모두 내부는 비점성항이 중요한 역할을 한다. 이것은 아주 초기의 경우나 시간이 많이 흐른 다음에도 크게

달라지지 않음을 확인 할 수 있었다. 이와 같이  $t_c$ 가 상당히 큰 경우에도 스핀업 되는 과정이 확산에 의한 과정이 아니라 기존의 스핀업과 같은 메카니즘을 가짐을 알 수 있다. 본 연구에서 사용한 모델인 연속적인 각속도의 변화는 수학의 구분구적법처럼 계단상의 각속도 변화가 무한개 있다고 생각할 수 있다. 결국 무한개의 계단상의 각속도 변화의 합과 마찬가지로기 때문에 기존의 스핀업 메카니즘과 같게 되는 것이다.



(a) ( $r=0.5$ )



(b) ( $z=0.25$ )

Figure 4. Initial velocity for  $t_c/\tau=10000$

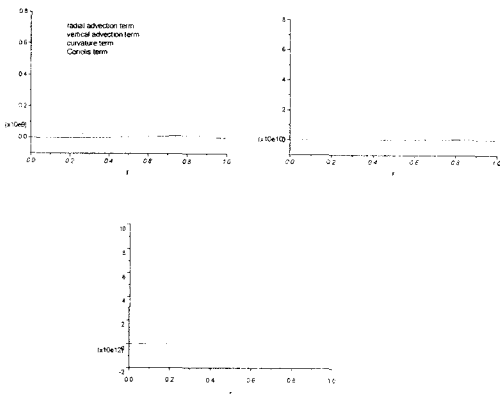


Figure 5. Radial profile of each inviscid term ( $t/\tau=0.7, z=0.25$ ) (a) $t_c/\tau=0.01$ , (b) $t_c/\tau=1$ , (c) $t_c/\tau=100$

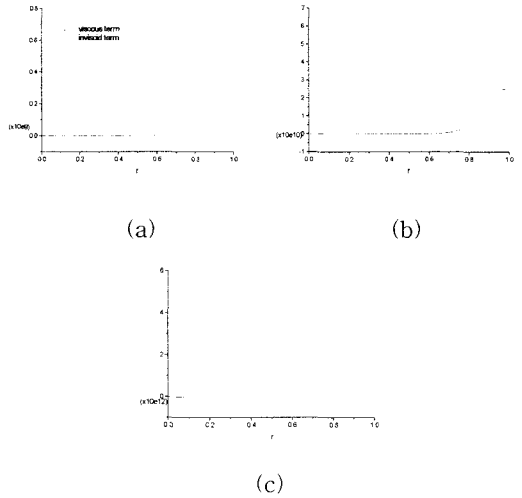


Figure 6. Radial profile of inviscid and viscous term ( $t/\tau=0.7, z=0.25$ )

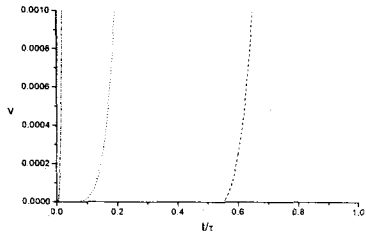
(a) $t_c/\tau=0.01$ , (b) $t_c/\tau=1$ , (c) $t_c/\tau=100$

### 3-2. 비선형 스핀업

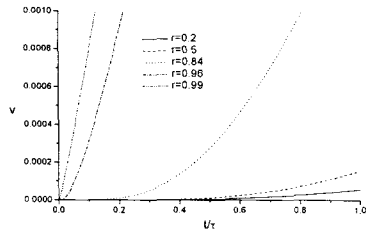
그림 7은 비선형 스핀업에 관한 결과를 나타 낸 것이다. 여기서는  $t_c=100, t_c=10000$ 인 두가지 경우에 있어서 초기에 방위각 속도를 나타낸 것이다.

그런데 바깥벽쪽의 각속도변화율이 큰 그림 7-(a)의 경우보다 상대적으로 변화율이 작은 그림 7-(b)의 경우가 아주 작은 속도지만 내부에 먼저 나타남을 볼 수 있다. 예를 들면, 그림 7-(a)는  $r=0.20$ 의 지점의 속도가 나타나지 않았으나 그림 7-(b)는 작은 속도지만 속도가 발생함을 알 수 있다. 이것의 이유를 알아보기 위해 선형 spin-up 경우와 같이 비점성항과 점성항을 나누어 나타내 보기로 한다.

그림 8은 초기 상태( $t/\tau=0.06$ )를 나타낸 것인데  $t_c=1$  그림 8-(a)의 경우에는 벌써 front가 나타나 front 안쪽에는 비점성항 값이 나타나지 않고 front와 옆벽면 사이에서만 비점성값이 나타남을 볼 수 있다. 그리고 점성항의 값은 옆벽면쪽에서만 일부 나타난다. 그러나 그림 8-(b), (c)의 경우에는 아직 front가 나타나지 않고 오직 옆벽면에 서만 점성항이 나타남을 알 수 있다. 이것은  $t_c$ 에 상관없이 각속도 변화가 있는 순간 초기에는 스핀업이 일어나는데 점성이 큰 역할을 한다. 이것



(a)

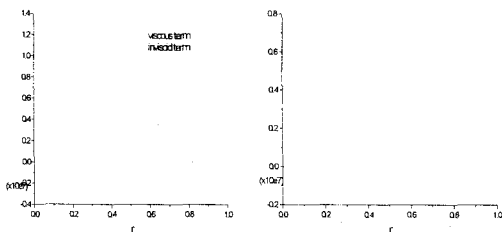


(b)

Figure 7. Initial azimuthal velocity

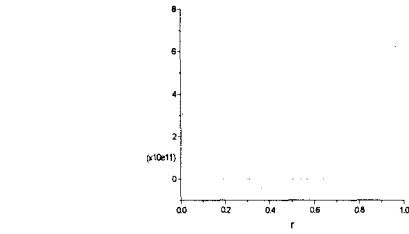
(a)  $t_c/\tau = 1$ , (b)  $t_c/\tau = 100$ 

은 Hyun 등[3]의 기존의 스핀업 연구 결과와 일치한다. 그림 9는  $t/\tau = 1.3$  경우인데 그림 9-(a)의 경우에는 내부의 유체뿐만 아니라 옆벽면쪽의 유체도 거의 스핀업 되었기 때문에 옆벽면 경계층이 거의 사라짐을 볼 수 있다. 그리고 그림 9-(c)의 경우에는 옆벽면에서 서서히 비점성항 값이 나타남을 알 수 있다. 그리고 가장 중요한 것은 내부에는 비점성항보다 점성항이 내부로 침투하고 있음을 알 수 있다. 그림 7-(b)처럼 내부에  $t_c$ 가 상당히 작다 하더라도 방위각 속도가 먼저 나타난다. 즉, 점성항이 옆벽면 경계층뿐만 아니라 내부로 침투해서 이 항 때문에 속도가 나타나는 것이다.

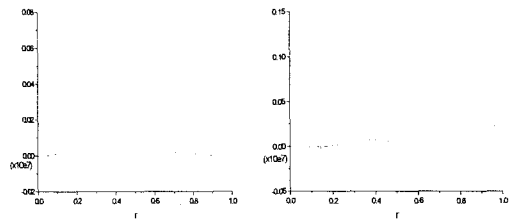


(a)

(b)

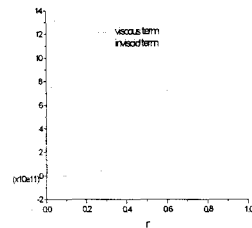


(c)

Figure 8. Radial profile of inviscid and viscous term ( $t/\tau = 0.06$ ,  $z = 0.25$ )(a)  $t_c/\tau = 0.01$ , (b)  $t_c/\tau = 1$ , (c)  $t_c/\tau = 100$ 

(a)

(b)



(c)

Figure 9. Radial profile of inviscid and viscous term ( $t/\tau = 1.3$ ,  $z = 0.25$ )(a)  $t_c/\tau = 0.01$ , (b)  $t_c/\tau = 1$ , (c)  $t_c/\tau = 100$ 

그림 10은  $t_c = 100000$ 인 경우에 대해 일정한 각속도를 가질때의 경우를 살펴 본 것이다. 초기에는 앞에서 말했듯이 점성의 영향이 내부에까지 미치지므로 비점성의 영향보다 많은 지점이 있으나 시간이 어느 정도 흐른 다음에는 옆벽면 경계층을 제외한 전 영역에서 점성의 영향보다 비점성의 영향이 강해진다. 그리고 초기에 내부에서 발생하는 속도는 점성의 영향이기 때문에 그 크기는 상당히 작다. 따라서 이 정도의 영향으로는 내부 유체가 스핀업 되는데 있어서 큰 영향을 주지 못한다. Front는 비점성항의 영향으로 내부로 전파

되어 가는 것이기 때문에  $t_c$ 가 클수록 front는 내부로 늦게 전파되어 감을 알 수 있다. 그리고 그림 10-(a)를 보면 비점성항이 나타나는 뒤쪽으로 Hyun 등[3]이 말한 점성의 증가와 감소가 미소하나 나타나므로 이 지점에서 front가 나타난다고 할 수 있다.

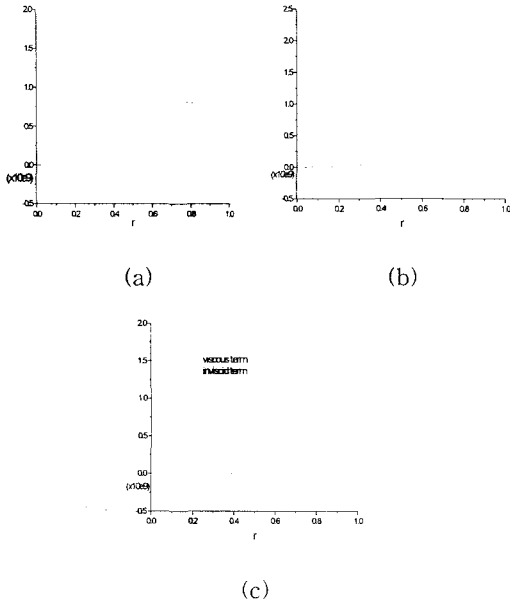


Figure 10. Radial profile of inviscid and viscous term ( $t_c/\tau = 100, z=0.25$ )  
 (a)  $\Omega=0.03\Omega_f$ , (b)  $\Omega=0.1\Omega_f$ , (c)  $\Omega=0.5\Omega_f$

#### 4. 결론

지금까지 실린더 내부에 균질유체가 들어있는 경우에 있어서의 선형 스핀업과 비선형 스핀업에 대해서 각속도가 시간에 따라 연속적으로 변화는 경우에 대해서 알아보았다. 그리고 각속도의 시간에 대한 변화율의 크기에 따른 내부 유동의 특징을 알아보기 위해서 식(2)를 크게비점성항과 점성항으로 구분하여 그 항들 미치는 영향을 알아보았다.

선형 스핀업의 경우에는 각속도 변화율의 크기에 상관없이 내부유동의 스핀업은 Coriolis항 즉, 비점성항에 의해 일어나게 된다. 연속적으로 변화시키는 것은 결국 그 변화율이 크든 작든 기존의 계단상의 각속도 변화가 무한개 있는 것과 마찬가지로이다. 따라서 무한개 층에 하나하나의 변

화가 기존의 스핀업에서처럼 Coriolis 항에 의해 스핀업 되기 때문에 전체적으로도 이 항에 의해서 내부유동이 스핀업 된다.

비선형 스핀업의 경우에는 각속도 변화율이 작을수록 front가 내부로 늦게 전파된다. 그리고 그 변화율이 상당히 작게 되면 초기에 점성의 영향이 내부로 침투해서 아주 작은 값이지만 방위각 성분의 속도가 나타나다. 그러나 이 속도는 점성에 의한 영향이기 때문에 내부 유체를 스핀업 시키는 데는 크게 영향을 주지 못한다. 그리고 시간이 어느정도 흐른 다음에는 내부로 front가 진행되어 와서 유체가 스핀업 되는데 점성보다는 비점성에 의해서 일어나게 된다.

#### 후기

본 연구는 한국과학재단에서 지원하는 2000년도 한국, 독일 국제공동과제에 의해 수행되었으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

#### 참고문헌

- (1) H. p. Greenspan & L. N. Howard, 1963, "On a time-dependent motion of a rotating fluid", J. Fluid Mech., Vol. 17, 385.
- (2) A. Warn-Varnas, W. W. Fowlis, S. Piacsek & S. M. Lee, 1978, "Numerical solutions and laser-Doppler measurements of spin-up", J. Fluid Mech., Vol. 85, 609.
- (3) J. M. Hyun, W. W. Fowlis & A. Warn-Varnas, 1983, "Numerical solutions for spin-up from rest in a cylinder", J. Fluid Mech., Vol. 127, 263.
- (4) S. V. Pantankar, 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere/McGraw, New York
- (5) H. P. Greenspan, 1968, *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge University Press, Cambridge
- (6) E. H. Wedemeyer, 1964, "The unsteady flow within a spinning cylinder", J. Fluid Mech., Vol. 20, 383
- (7) P. D. Weidman, 1976, "On the spin-up and spin-down of a rotating fluid. Part1.", J. Fluid Mech., Vol. 77, 685