

와법에 사용되는 2가지 점성모델의 비교

정재훈* · 윤진섭** · 진동식* · 안철오*** · 이상환****

Comparison of Two Viscous Models for Vortex Methods

Jaehoon Jung, Jinsup Yoon, Dongsik Jin, Cheol-O Ahn and Sanghwan Lee

Key Words: Vortex method(와법), Viscous model(점성 모델), Vorticity redistribution(와도재분배), Particle strength exchange(입자강도교환), Impulsive start(급 출발)

Abstract

Vortex methods were originally conceived as a tool to model the evolution of unsteady, incompressible, high Reynolds number flows of engineering interest. Recently various methods have been proposed for simulating the diffusion in vortex methods for two-dimensional incompressible flows. We test the diffusion schemes of vortex methods. In this paper we directly compare the particle strength exchange scheme with the vorticity redistribution scheme in terms of their accuracy and computational efficiency. Comparisons between both viscous models described are presented for short-time runs of impulsively started flows past a circular cylinder for Reynolds number of 60. The particle strength exchange scheme has been shown more accurate and efficient than the vorticity redistribution scheme.

1. 서론

비압축성 유체운동학에서 라그랑지적(Lagrangian)방법인 와법은 비점성유동을 해석하는데 효과적이다. 유체운동은 와도장의 전개에 의해 정해지며, 와법은 오일러적(Eulerian) 격자에 의해 나타나는 평균화와 평활화(smoothing)를 사용하지 않고, 계산 요소들이 자동적으로 와도영역을 분할하도록 고안된 것이다. 그러나, 이 방법으로 Navier-Stokes 방정식을 풀기 위해서는 점성 효과를 고려할 수 있도록 개선되어야만 한다. 이는 대류에 의하여 이동된 라그랑지 연산요소로부터 얻은 정보를 가지고 확산 연산자를 근사화하

려는 것이다.

와법의 종류는 보통 확산항의 모델로 대별된다. Chorin⁽¹⁾은 랜덤워크(Random walk)방법을 제안하였다. 이 방법은 입자들을 랜덤워크기법을 사용해서 통계적으로 취하여 이 입자들의 위치를 이용해서 적분을 근사화하였다. Leonard⁽²⁾는 점성핵성장(Core expansion)법을 제안하였다. 이 방법은 격자는 없으나, 입자의 계속된 팽창은 대류항에 위배되는 단점이 있다⁽³⁾. 이후 Rossi⁽⁴⁾는 수정점성핵성장(Corrected core expansion)법을 제안하였는데, 이 방법은 어느 일정길이 이상으로 입자의 핵이 성장하면 여러 개의 작은 와로 분리하여 Navier-Stokes 방정식에 수렴하도록 한 방법이다. Degond & Mas-Gallic⁽⁵⁾은 입자강도교환(Particle strength exchange ; PSE)법을 제안했는데, 이 방법은 한 입자를 기준으로 주변 입자에 강도를 서로 교환함으로써 확산방정식을 만족시킨다. 이 방법은 높은 수렴율을 가지고 있으나, 와도재배치(Remeshing)를 필요로 한다. 최근 입자강도교환법은 고해상도모사(High-resolution simulation) 혹은

* 한양대학교 대학원

** 한국타이어 중앙연구소

*** LG전자 디지털어플라이언스연구소

**** 한양대학교 기계공학부

E-mail : shlee@hanyang.ac.kr

Tel. : (02)2290-0445 Fax : (02)2290-0445

입자 직접수치모사(Particle DNS ; Particle direct numerical simulation)로서 스펙트럴법(Spectral method)과 같은 정도의 해를 제시하고 있음으로 증명되었다^(6,7). Ogami & Akamatsu⁽⁸⁾는 확산속도(Diffusion velocity)법을 제안하였다. 대류항과 마찬가지로 확산항도 속도를 이용하여 계산하는 방법이다. 와도재분배(Vorticity redistribution ; VR)법⁽⁹⁾은 Van Dommelen에 의해 제안된 방법으로, 위에서 언급한 입자강도교환법과 비슷하나 근본적으로 와도재배치를 행하지 않는다는 점이 가장 큰 차이점이다.

최근 들어 와법에 사용되는 여러 확산항의 모델 중에서 어떤 방법이 정확하며 계산이 용이한가가 중요한 쟁점이 되고 있다. 그러나 비교·분석연구로는 Takeda 등⁽¹⁰⁾의 연구이외에는 전무한 실정이다. 그들은 랜덤워크법, 확산속도법, 수정점성핵성장법 그리고 와도재분배법에 대하여 논하였다. 그들의 결론에 의하면 위의 네 가지 방법중 와도재분배법이 가장 우수하다고 평가하였다. 하지만, 여타의 연구결과들에 의하면 입자강도교환법 또한 아주 고정도의 해를 제시하고 있음을 알 수 있다. 따라서 본 연구에서는 참고문헌 (10)에서 가장 정확하다고 제안한 와도재분배법과 입자강도교환법의 직접적인 비교를 통하여 두 방법의 강건성과 정확도를 비교하여 본다.

2. 수치해석

2.1 지배방정식

유동을 묘사하는 비압축성 Navier-Stokes 방정식은 일반적으로 압력-속도의 형태로 표현되고, Navier-Stokes 방정식의 와도형은 컬(curl)을 취하여 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla \omega + \nu \nabla^2 \omega \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{\psi}_z = \vec{u} \quad (3)$$

여기서, $\vec{u}(\vec{x}, t)$ 는 위치 \vec{x} 에서 시간 t 에서의 속도장, $\psi(\vec{x}, t)$ 은 유동함수, 그리고 속도평면에 수직한 방향 단위벡터 \vec{k} 에 의한 $\omega \vec{k} = \nabla \times \vec{u}$ 로 정의되는 $\omega(\vec{x}, t)$ 은 와도이다.

유동함수 ψ 의 해는 2차원에 대한 합성적분(convolution integral)으로 얻는다.

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}, t) &= \int \int G(\vec{x}, \vec{x}') \omega(\vec{x}', t) dx' dy' \\ &\equiv G * \omega \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 *는 선화적분 연산자이고 G는 Laplace 방정식의 자유공간 Green 함수이다.

이 식은 $\vec{u} = \vec{K} * \omega$ 와 같은 Biot-Savart 적분을 이용해서 와도의 항으로 속도를 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}, t) &= \int \int \vec{K}(\vec{x}, \vec{x}') \omega(\vec{x}', t) dx' dy' \\ &\equiv \vec{K} * \omega \end{aligned} \quad (5)$$

와도장을 공간적으로 이산화시키면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\omega(\vec{x}, t) = \sum_i \Gamma_i \phi_\delta(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \quad (6)$$

여기서, $\vec{x}_i(t)$ 는 t 에서 i 번째 와의 위치이고, Γ_i 는 와의 강도이다. 그리고, ϕ_δ 는 $\vec{x}_i(t)$ 에서 i 번째 입자와의 와도 분포이다.

근사된 와도 식(6)을 이용하면 식(5)로부터 와블랍(vortex blob) 속도로 근사된 식을 얻을 수 있다.

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_i \vec{K}_\delta \Gamma_i(\vec{x} - \vec{x}_i(t)) \quad (7)$$

여기서, $\vec{K}_\delta = \vec{K} * \phi_\delta$ 이다. \vec{K}_δ 의 smoothness는 와의 분포 ϕ_δ 에 종속되어 있다는 점에 주의해야 한다. 입자와법은 입자위치에서의 특이점 때문에 수치적으로 불안정하다. 이를 피하기 위해 입자와법에서는 다음과 같은 smoothness함수 ϕ_δ 를 사용한다.

$$\phi_\delta(\vec{x}) = \frac{1}{\delta^n} \phi\left(\frac{\vec{x}}{\delta}\right) \quad (8)$$

일반적으로 δ 는 함수 ϕ_δ 에서의 절단(cutoff) 반경으로 결정된다.

2.2 점성 모델(Viscous models)

2.2.1 입자강도교환법

입자강도교환법은 유동을 묘사하는 입자들의 강도를 조절해서 확산방정식을 만족시키는 것이다. 일반적으로 이 방법은 최소의 입자 중복이 유지되어 확산과정을 정확하게 나타낼 수 있다. 그러나, 대부분의 유동의 경우 대류로 인해 입자의 위치가 변하게 되어 정확한 결과를 얻을 수 없다. 그러므로, 정확한 결과를 얻기 위해서는 입자를 재배치시켜주는 알고리즘 기법을 사용해야 한다. 박외철⁽¹¹⁾은 이에 관한 문제를 논하였다.

입자강도교환법은 Degond와 Mas-Gallic⁽⁵⁾에 의해 소개되었다. 이 방법은 Laplacian 연산자 Δ 와 적분연산자 Δ^ϵ 을 근사하는데 근거하고 있다.

확산방정식은 와도에 대한 적분-미분방정식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\nu}{\delta^2} \int_{R^3} [\omega(\vec{y}) - \omega(\vec{x})] \phi_\delta(\vec{x} - \vec{y}) d\vec{y} \quad (9)$$

알고리즘으로 표시하면 다음과 같다.

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \frac{\nu h^2}{\delta^2} \sum_{j=1}^N (\Gamma_j^{m-1} - \Gamma_i^{m-1}) \phi_\delta(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \quad (10)$$

이 방법의 특징은 미분연산자를 적분연산자로 대체한다는 점이다. 적분연산자의 사용에 대한 이점은 안정성과 효율에 있다. 다만, 이 방법의 정확도는 적당히 뿌려진 입자들의 위치가 구적법에 합당한가에 좌우된다. 따라서 이 방법은 와도 재배치의 과정을 필요로 한다^(6,7,11).

2.2.2 와도 재분배법

와도재분배법^(8,9)의 목적은 시간전진동안 각각의 와도 확산을 묘사하기 위한 것이다. 한 와도의 순환의 일부를 이웃한 와도 분배해서 와도를 재분배한다. 어떻게 이웃해 있는 와도들을 선택하는가와 정확한 확산을 위해 어떤 비율을 선택하는가가 중요한 문제이다. 만약 먼저 주어진 i 와와 다른 하나의 와와의 거리를 미리 측정할 수 있

고, 그 거리가 일정한 범위 안에 있다면 주어진 i 와 j 의 근처에 있다고 생각할 수 있다. 이러한 거리는 대략의 시간간격동안 대표적인 확산거리이다. 일반적인 확산거리를 정의해 보면 다음과 같다.

$$h_\nu \equiv \sqrt{\nu \Delta t} \quad (11)$$

여기서, Δt 는 시간간격이고 ν 는 동점성계수이다. 만약 j 와 i 와 근처에 있으면 다음 식이 성립한다.

$$|\vec{x}_j - \vec{x}_i| \leq R h_\nu \quad (12)$$

여기서, R 은 정해진 상수이며, 이 논문에 있는 모든 계산에서 사용되는 최대거리로서 $\sqrt{12}$ 를 취한다.

와도분배는 확산방정식에 만족되기 위해 식(13)에서 식(14)으로 변환된다.

$$\omega^n = \sum_i \Gamma_i^m \phi_\delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (13)$$

$$\omega^{n+1} = \sum_i \sum_j f_{ij}^m \Gamma_i^m \phi_\delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (14)$$

여기서 f 는 재분배되기 위한 순환의 일부이다. f_{ij}^m 의 값은 다음과 같이 스케일된 상호간 와 위치의 향으로 표현된 선형방정식들을 풀어서 얻을 수 있다.

$$\xi_{ij} \equiv \frac{x_j - x_i}{h_\nu} \quad (15)$$

여기서 ξ_{ij} 는 $|\xi_{ij}| \leq R$ 인 이웃 반지름에 구속되어 있다.

2차수의 정확도를 가지는 f_{ij}^m 을 구하기 위한 재분배 방정식은 다음과 같다.

$$O(1) : \sum_j f_{ij}^m = 1; \quad (16)$$

$$O(\Delta t)^{1/2} : \sum_j f_{ij}^m \xi_{1ij} = 0; \quad \sum_j f_{ij}^m \xi_{2ij} = 0; \quad (17)$$

$$O(\Delta t) : \sum_j f_{ij}^m \xi_{1ij}^2 = 2; \quad \sum_j f_{ij}^m \xi_{2ij}^2 = 2; \quad (18)$$

$$\sum_j f_{ij}^m \xi_{1ij} \xi_{2ij} = 0;$$

$$f_{ij}^n \geq 0 \quad (19)$$

이 방정식들은 Simplex 알고리즘 등과 같은 선형프로그래밍 기술로 풀 수 있다. 본 논문에서는 ADS(Automated design synthesis)⁽¹²⁾의 기법을 이용해서 풀었다. 이 기법을 사용하면 기존 Simplex 알고리즘을 사용했을 때 나타날 수 있는 에러 값들을 최소화 할 수 있을 뿐만 아니라 목적함수에 의해서 최적화된 값을 얻을 수 있다.

2.3 경계조건

고체의 경계는 유체에서 와도가 생기는 원천이 된다^(6,7). 그리고, 와도는 속도 구배로 암시된 유체 요소의 회전과 같다고 고려할 수 있다. 표면에서 멀리 떨어진 속도는 그에 의해 직접적으로 영향을 끼치지 않기 때문에 속도 구배는 유체에 와도가 생성되는 결과로 생각할 수 있다. 하지만 Navier-Stokes 방정식의 와도 형태에 의존하는 수치적 기법에는 와도장에 상응하는 경계조건이 필요하다. 그와 같은 경계조건은 와도장과 속도장에 관련된 운동학과 같아야 하고 경계에서의 와도 생성의 물리적 메커니즘이 모델링 되어야 한다^(6,7).

3. 결과 및 고찰

3.1 Lamb vortex의 확산

2차원 구속되지 않은 영역에서의 Lamb vortex의 확산문제는 엄밀해가 있고 Navier-Stokes 방정식의 해를 필요로 하는 경우에 검증문제로서 사용된다.

$$\omega(x, y, \nu t=0) = \frac{2}{\pi} e^{-2(x^2+y^2)} \quad (20)$$

$$\Gamma(x_i, y_i, \nu t=0) = h^2 \omega(x_i, y_i, \nu t=0) \quad (21)$$

여기서, h^2 은 각 격자셀의 면적이다.

Table 1에 계산에 사용된 입자의 수와 연산시간을 표로 나타내었다. 입자강도교환법의 경우 와도가 존재하는 영역 근방에 새로운 입자를 필요로 하므로 전체적인 입자의 개수는 변하지 않는다. 반면 와도재분배법은 자동적으로 입자를 생성시키기 때문에 입자의 수가 자동적으로 증가

Table 1 Problem size and computational time for diffusing Lamb vortex at $t=0.375$ with $\delta t=0.0075$

Viscous model	Number of initial vortices	Number of final vortices	CPU time (s)
Particle strength exchange	10000	10000	39134
Vorticity redistribution	3247	10302	33994

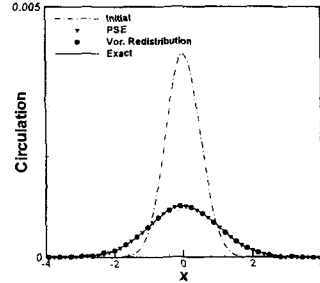


Fig. 1 Diffusing Lamb vortex(circulation plots with $\nu=0.5$, $t=0.375$ and $dt=0.0075$).

하나, 부가적으로 선형프로그래밍에 많은 연산시간이 필요하기 때문에 전체적인 연산시간은 입자강도교환법과 비슷하다. Fig. 1에 엄밀해와 수치해를 비교하였다. 두 방법 모두 만족할 만한 해를 제시하고 있음을 알 수 있다. 결과적으로 고체경계가 존재하지 않는 영역에서의 두 방법의 효율은 큰 차이가 없는 것을 알 수 있다.

3.2 급 출발하는 실린더 주위의 유동

실린더 직경 (D), 물체의 병진 속도 (U), 그리고 동점성계수 (ν)에 따른 레이놀즈(Reynolds) 수는 다음과 같고, 시간은 물체의 병진속도 (V_0)와 실린더 반경 (R)으로 무차원화하였다.

$$Re = \frac{UD}{\nu} \quad (22)$$

$$t^* = tV_0/R \quad (23)$$

본 논문에서는 비교적 점성의 효과가 큰 층류영역, 즉 $Re=60$ 에서 유동양상을 비교하였다.

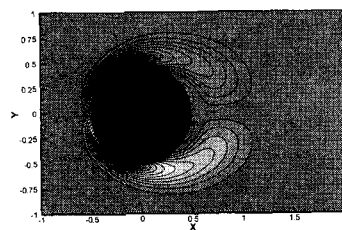
Fig. 2에서 (a)와 (b)는 각각 입자강도교환법과

와도재분배법에 따른 와도장을 나타낸 그림이다. 두 방법 모두 급 출발하는 실린더 주위의 초기 거동을 잘 예측하고 있음을 알 수 있다. 다만, 입자강도교환법의 경우 위면과 아래면의 대칭이 비교적 잘 유지되고 있음에 반해, 와도재분배법은 대칭이 조금 깨지고 있음을 알 수 있다. 와도장의 질적인 면에서 입자강도교환이 정확한 해를 제시하고 있음을 알 수 있다. Fig. 3는 급 출발하는 실린더 주위의 유선을 나타낸 그림이다. 이를 보면 두 방법 모두 시간이 진전됨에 따라 실린더 뒤쪽에 일차와류(primary vortex)가 성장됨을 정확히 묘사한 것을 알 수 있다. 이 결과에서도 입자강도교환법이 좀더 나은 결과를 제시하고 있음을 알 수 있다.

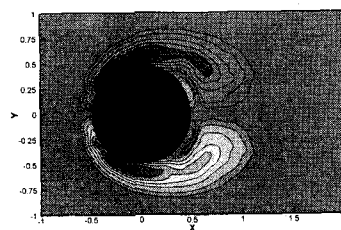
원형실린더가 급 출발하는 문제는 비교적 짧은 시간에 엄밀해가 존재한다. 대표적인 연구들로는 Bar-Lev & Yang⁽¹³⁾과 Koh⁽¹⁴⁾를 들 수 있다. Fig. 4에 이 엄밀해와 두 가지 점성 모델을 이용하여 계산한 해를 나타내었다. 결과그림에서 볼 수 있듯이 두 방법 모두 엄밀해에 일치하는 결과를 보이고 있다. 초기에 차이가 조금 있는 것을 볼 수 있는데, 이것은 시간 $t=0^+$ 일 때 무한대 값을 수치적으로 나타내지 못하기 때문이며, 이 정도의 해는 상당히 정확하게 묘사되었다고 판단할 수 있다. δt 는 두 방법 모두 0.01을 사용하여 계산하였다. t^* 가 대략 0.25일 때까지만 엄밀해와 일치하고 이후에는 조금 다른 양상을 보이고 있음을 알 수 있는데, 이는 비교한 엄밀해는 박리가 일어나기 전 까지만 유효하고 이 이후는 잘 맞지 않는다는 가정을 내포하고 있기 때문이다. 따라서 대략 그 시간대에서 실린더 뒤쪽에 와류가 발달되기 시작하는 것으로 판단된다. 참고로 이 급 출발하는 문제는 단지 정확도만 비교하였다. 왜냐하면 두 방법의 연산시간 효율은 이미 Lamb vortex문제에서 다룬 것으로 충분하였기 때문이다. 결과적으로, 두 방법 모두 항력을 예측하는데는 같은 정도를 보이고 있으나, 와도장과 유선을 보았을 때 입자강도교환법이 훨씬 더 강건하고 우수함을 알 수 있다.

4. 결론

입자강도교환법과 와도재분배법의 직접적인 비교를 통하여 두 점성모델의 정확도와 연산시간의

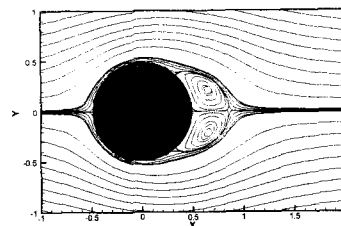


(a)

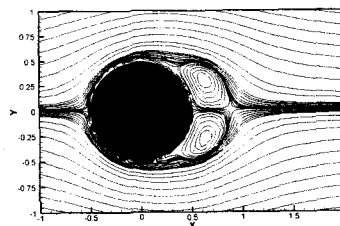


(b)

Fig. 2 Instantaneous vorticity contours (a)PSE, $t^*=2$, (b)VR, $t^*=2$.



(a)



(b)

Fig. 3 Instantaneous streamlines (a)PSE, $t^*=2$, (b)VR, $t^*=2$.

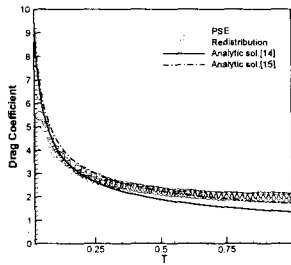


Fig. 4 Comparison of drag coefficients.

효율을 비교하였다. Lamb vortex의 확산문제와 급출발하는 실린더 주위의 유동장 계산을 통하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

계산 효율면에서 입자강도교환법과 와도재분배법과의 차이는 그다지 크지 않았다. 이는 와도재분배법의 경우 선형프로그램의 부가적인 연산이 필요하기 때문이다. 정확도면에서는 입자강도교환법이 좀 더 정확한 해를 제시하였다. 와도재분배법은 순수한 라그랑지적 관점의 해석으로 와법의 장점을 그대로 살리기는 하였지만, 와도장과 유선의 질적 수준은 조금 떨어지는 것으로 판단되었다. 결과적으로, 와도재배치라는 오일러적 관점의 해석을 도입한 입자강도교환법이 여러 점성 모델 중에 가장 우수하다고 판단되었다. 따라서 부분적으로 오일러적 관점의 해석이 라그랑지적 관점의 해석에 도입되는 것이 타당하다.

참고문헌

- (1) Chorin, A. J., 1973, "Numerical study of slightly viscous flow simulation," *J. Fluid mech.* Vol. 57, pp. 785~796.
- (2) Leonard, A., 1980, "Vortex methods for flow simulation," *J. of Comput. Phys.* Vol. 37, pp. 289~335.
- (3) Greengard, C., 1985, "The core spreading vortex method approximates the wrong equation," *J. Comput. Phys.* Vol. 61, pp. 345~348.
- (4) Rossi, L. F., 1996, "Resurrecting core spreading methods: A new scheme that is both deterministic and convergent," *SIAM J. Sci. Comp.* Vol. 17 No. 2, pp. 370~397.
- (5) Degond, P. and Mas-Gallic, S., 1989, "The weighted particle method for convection - diffusion equations, Part I : the case of an isotropic viscosity, Part II : the anisotropic case," *Math. Comp.*, Vol. 53, pp. 485-526.
- (6) Koumoutsakos., P. D., 1993, "Direct numerical simulations of unsteady separated flows using vortex methods," California Institute of Technology.
- (7) Koumoutsakos, P. and Leonard, A., 1995, "High-resolution simulations of the flow around an impulsively started cylinder using vortex methods," *J. Fluid Mech.* Vol. 296, pp. 1~38.
- (8) Ogami, Y. and Akamatsu, T., 1991, "Viscous flow simulation using the discrete model - The diffusion velocity method," *Computers and Fluids* Vol. 19, pp. 433~441.
- (9) Shankar, S. and Van Dommelen, L., 1996, "A new diffusion procedure for vortex methods," *J. Comp. Phys.* Vol. 127, pp. 88~109.
- (10) Takeda, K., Tutty, O. R., and Fitt, A. D., 1997, "A comparison of four viscous models for the discrete vortex method," 13th AIAA CFD Conference, Snowmass, Colorado, AIAA97-1977.
- (11) 박외철, 1999, "와류입자법에 의한 비정상 박리흐름의 전산 (II) - 안정성과 와류입자 재배열," 대한기계학회논문집 B권, 제23권 제10호, pp. 1223~1228.
- (12) Vanderplaats, G. N., 1984, "Numerical optimization techniques for engineering design," McGraw-Hill.
- (13) Bar-Lev, M. B. and Yang, H. T., 1975, "Initial flow field over an impulsively started circular cylinder," *J. Fluid Mech.* Vol. 72, pp. 625-647.
- (14) Yang-Moon, Koh, 1993, "The pressure distribution around unsteady boundary layers," *J. Fluid Mech.* Vol. 255, pp. 437~446.
- (15) 진동식, 이상환, 이주희, 2000, "개선된 입자 와법을 이용한 급출발하는 실린더 주위의 비정상 점성 유동 시뮬레이션", 대한기계학회 논문집 B권, 제24권 제5호, pp. 733~743.