

난류 캐스케이드 기술에 있어서 Friedrich와 Peinke가 사용한 Fokker-Planck 방정식의 완전해에 관하여

최연택* · 손창현** · 김호일*** · 조상규****

On the exact solution of Fokker-Planck equation used by Friedrich and Peinke for description of a turbulent cascade

Choi, Y.T. Sohn, C.H. Kim, H.I. and Jo, S.K

Key Words: Turbulence(난류), Fokker-Planck Equation(Fokker-Planck 방정식), Diffusion(확산), Markovian Process(마르코프 과정)

Abstract

Some multidimensional generalizations of the Fokker-Planck Equation used by Friedrich and Peinke for description of a turbulent cascade was solved by A.A.Donkov, A.D.Donkov, and G.I.Grancharova. The solutions are two types, isotropic and anisotropic diffusion case. We introduce their methods to solve the Equation and solutions. Furthermore we get the more generalized exact solution as combination of two cases and plot to compare those to experimental results for the isotropic case.

기호설명

$W(x, t)$: Probability Density Function

$D^{(n)}$: Krammers-Moyal Coefficients

\hat{I} : Identity matrix

Δ : Laplacian

$p(x, t; x', t')$: 결합확률

$p(x, t | x', t')$: 조건부 확률

$\exp_+ \int_0^t \hat{\alpha}(s) ds$: Voltera ordered exponential

$[a, b] \equiv ab - ba$: 교환자(Commutator)

S^{n-1} : n차원 상의 구

$\widehat{\Delta}_\theta$ 는 S^{n-1} 상의 Laplace-Beltrami 작용소

$Y_{l,n}^{(k)}$: S^{n-1} 상의 구면조화함수

$Y_l^m(\theta, \varphi)$: 3차원 구면조화함수

1. 서론

Fokker-Planck 방정식은 분자의 브라운 운동 혹은 요동과 관련된 분야에서 다양하게 이용되는 방정식이다. Fokker-Planck 방정식은 분자의 브라운 운동을 기술하기 위해 사용한 운동 방정식에서 비롯되었다.⁽¹⁾

일차원 변수 v 의 시간 t 에 대한 Fokker-Planck 방정식은 식 (1)

* 경북대 대학원 산업응용수학과

** 경북대 공과대 기계공학부

*** 경북대 사범대 수학교육과

**** 경북대 자연대 물리학과

$$\frac{\partial W(v, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial v} D^{(1)}(v) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} D^{(2)}(v) \right] W(v, t) \quad (1)$$

과 같이 쓰여진다.⁽²⁾ 여기서 $W(v)$ 는 확률밀도 함수이며 $W(v)dv$ 는 구간 $(v, v+dv)$ 에서 입자를 발견할 확률이 된다. 그리고 식 (1)은 시간 t 와 초기 조건에 의존하는 확산방정식이며 $D^{(1)}$ 과 $D^{(2)}$ 는 각각 유동계수 (Drift Coefficient) 및 확산계수 (Diffusion Coefficient)이다. Fokker-Planck 방정식이 N 개 변수인 경우는 다음과 같이 쓸 수 있다.⁽³⁾

$$\frac{\partial W(\vec{v}, t)}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial v_i} D_i^{(1)}(\vec{v}) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} D_{ij}^{(2)}(\vec{v}) \right] W(\vec{v}, t) \quad (2)$$

그런데 $v_1 < v_3 < v_2$ 인 경우에 조건부 확률 함수가 Chapman-Kolmogorov 방정식

$$p(v_2, t_2 | v_1, t_1) = \int dv_3 p(v_2, t_2 | v_3, t_3) p(v_3, t_3 | v_1, t_1)$$

을 만족하는가는 중요한 문제다. 이 방정식은 난류 캐스케이드가 마르코프 과정(Markovian Process)이기 위한 필요조건이다. 즉 t_1 에서 t_2 로의 전이확률(Transition Probability)은 t_1 에서 t_3 , t_3 에서 t_2 로의 전이확률의 곱으로 나눌 수 있다는 의미다. 이것은 난류 캐스케이드가 국소적인 전이 과정(Transfer Mechanism)으로 설명된다는 사실과 관련이 있다. n 개 변수의 마르코프 과정에서 조건부 확률은 n 개 점들의 결합 확률 분포를 결정한다.

n 차원 Chapman-Kolmogorov 방정식의 미분형

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(\vec{v}_2, t_2 | \vec{v}_1, t_1) = & \left[-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} A_i(\vec{v}, t) + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} B_{ij}(\vec{v}, t) \right] \\ & \times p(\vec{v}_2, t_2 | \vec{v}_1, t_1) \\ & + \int dx [V(\vec{v} | \vec{x}, t) - V(\vec{x} | \vec{v}, t)] \\ & \times p(\vec{v}_2, t_2 | \vec{v}_1, t_1) \end{aligned}$$

에서 조건부 확률 $p(\vec{v}_2, t_2 | \vec{v}_1, t_1)$ 에 대한 확산방정식이 유도될 수 있다. $n \geq 3$ 인 경우 Krammers-Moyal 계수

$$D^{(n)}(v_2, t_2) = \frac{1}{n!} \lim_{t_3 \rightarrow t_2} \frac{1}{t_3 - t_2} \times \int [dv_3 (v_3 - v_2)^n p(v_3, t_3 | v_2, t_2)]$$

가 영이 된다면 Chapman-Kolmogorov 방정식은 다음과 같은 Fokker-Planck 방정식이 된다.^(4,5,6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(v_2, t_2 | v_1, t_1) = & \left[-\frac{\partial}{\partial v_i} D^{(1)}(v_2, t) + \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} D^{(2)}(v_2, t) \right] \\ & \times p(v_2, t_2 | v_1, t_1) \end{aligned} \quad (3)$$

이것은 식 (1)의 $W(v, t)$ 가 조건부 확률 혹은 전이확률 $p(v_2, t_2 | v_1, t_1)$ 에 해당하는 경우이다.

Friedrich와 Peinke는 난류 캐스케이드의 자유분류(Turbulent Free Jet) 실험에서 속도

$$\tilde{v} = v_i (L_i / L_{ref})^{-\frac{1}{3}}$$

와 로그를 취한 길이 성분 $\lambda_i = \ln(L_{ref} / L_i)$ 을 새로 도입한 후, 서로 다른 길이 성분 L_1, L_2 와 그것들의 두 속도 성분 v_1, v_2 에 대한 실험에서 얻은 조건부 확률 분포

$p_{ca}(v_2, \lambda_2 | v_1, \lambda_1)$ 가 Chapman-Kolmogorov 방정식에서 구한 조건부 확률 $p_{ca}(v_2, \lambda_2 | v_1, \lambda_1)$ 과 일치한다는 것을 확인하였다. 그리고 Krammers-Moyal 계수도 $n \rightarrow \infty$ 일 때, $n \geq 3$ 에서 소멸되는 것을 $D^{(n)}(v_2, t_2)$ 의 정의에 따른 계산으로 확인하였다. 아울러 유동계수 D^1 과 확산계수 D^2 는 $D^1 = -av$, $a > 0$ 와 $D^2 = cv^2$, $c > 0$ 임을 확인하였다.^(7,8) 식 (3)은 확률밀도함수 $P(\lambda, \vec{v})$ 로 표현할 수 있다. 식 (4)는 식 (1)과 같은 Fokker-Planck 방정식이 되고 확률밀도함수 $W(t, v)$ 는 $p(v_2, \lambda_2 | v_1, \lambda_1)$ 로 주어진다.

$$\frac{\partial P(\lambda, \vec{v})}{\partial \lambda} = \left[-\frac{\partial}{\partial v} D^{(1)}(\lambda, \vec{v}) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} D^{(2)}(\lambda, \vec{v}) \right] P(\lambda, \vec{v}) \quad (4)$$

한편 Donkov 등은 Friedrich와 Peinke의 실험 결과를 바탕으로 식 (4) 에서 코오시 문제에 대한 완전 해를 구하였다.⁽⁹⁾ 이들은 Feynman의 적분 방법(Disentangling Technique)⁽¹⁰⁾과 의미분 작용소(Pseudo-Differential Operator)의 방법을 결합하여 사용하였다.^(11,12) 그리고 이들은 현실적인 근사를 위하여 양 계수를 $-a(\lambda)$, $c(\lambda)$ 과 같이 λ 에 의존하는 양으로 취하였다.

본 논문에서는 먼저 Donkov와 Grancharova가 행한, N차원 Fokker-Planck 방정식의 두 가지 형태의 확산계수 텐서에 관한 코오시 문제의 완전해와 그것의 특수한 경우로서 삼차원의 완전해를 소개한다. 그런 다음 이들의 결과를 바탕으로 두 가지 경우의 일반형으로서 선형 결합된 확산계수 텐서 형태의 경우에 대한 완전 해를 구하고자 한다. 그리고 1차원 속도의 등방적, 비등방적 그리고 일반적인 경우의 속도분포를 도시하여 Friedrich 와 Peinke 실험 결과와 비교하고자 한다.

2. 등방적인 경우와 비등방적인 경우에 대한 각각의 완전 해

식 (3)에서 N 차원의 Fokker-Planck 방정식은 식 (5)가 된다.

$$\frac{\partial P(\lambda, \vec{v})}{\partial \lambda} = \left[-\nabla_{\vec{v}} \cdot D^{(1)}(\lambda, \vec{v}) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} D_{ij}^{(2)}(\lambda, \vec{v}) \right] P(\lambda, \vec{v}) \quad (5)$$

유동계수는 $D^{(1)} = -a(\lambda)\vec{v}$ 로 두고, 확산계수는 등방적인 경우는 $D^{(2)} = c_1(\lambda)v^2 \hat{I}$ 로 비등방적인 경우는 $D^{(2)} = c_2(\lambda)v_i v_j$ 로 각각 둔다. 확산계수는 $N \times N$ 의 행렬꼴이다. $D^1 = -a(\lambda)\vec{v}$ 와 $D^{(2)} = c_1(\lambda)v^2 \hat{I}$ 를 식 (4)에 대입해서 풀 후

$b_0 = N[a(\lambda) + 2c_1(\lambda)]$, $b_1 = a(\lambda) + 4c_1(\lambda)$ 로 두면 식 (6)이 된다.

$$\frac{\partial P(\lambda, \vec{v})}{\partial \lambda} = b_0(\lambda)P(\lambda, \vec{v}) + b_1(\lambda)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}} P(\lambda, \vec{v}) + c_1(\lambda)v^2 \Delta_{\vec{v}} P(\lambda, \vec{v}) \quad (6)$$

여기서, 초기치는 $P(0, \vec{v}) = \varphi(\vec{v})$ 이고 식 (6)은 N차원으로 확장된 등방적인 식이다.

그리고 $D^{(1)} = -a(\lambda)\vec{v}$ 와 $D^{(2)} = c_2(\lambda)v_i v_j$ 를 (5)에 대입한 후 b_0 는 $a(\lambda) + (N^2 + N)c_2(\lambda)$, $b_1 = a(\lambda) + (N+3)c_2(\lambda)$ 로 두면 다음 식 (7)이 나온다.

$$\frac{\partial P(\lambda, \vec{v})}{\partial \lambda} = b_0(\lambda)P(\lambda, \vec{v}) + b_1(\lambda)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}} P(\lambda, \vec{v}) + c_2(\lambda)(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}})^2 P(\lambda, \vec{v}) \quad (7)$$

$$P(0, \vec{v}) = \varphi(\vec{v})$$

이때 식 (7)은 각각 N차원으로 확장된 방정식의 비등방적인 경우이다.

Feynman의 방법을 이용하여 식 (6)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P(\lambda, \vec{v}) = \left(\exp + \int_0^\lambda [b_0(s) + b_1(s)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}} + c_1(s)v^2 \Delta_{\vec{v}}] ds \right) \varphi(\vec{v}) \quad (8)$$

$\beta_i(\lambda)$ 와 $\gamma(\lambda)$ 를 각각 $\int_0^\lambda b_i(s) ds$, $\int_0^\lambda c_1(s) ds$ 로 두면 식 (8)은 식 (9)가 된다.

$$P(\lambda, \vec{v}) = e^{\beta_0(\lambda)} e^{\beta_1(\lambda)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}}} e^{\gamma(\lambda)v^2 \Delta_{\vec{v}}} \varphi(\vec{v}) \quad (9)$$

$[\beta_0(\lambda)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}}, \gamma(\lambda)v^2 \Delta_{\vec{v}}] = 0$ 이므로 식 (9)은 식 (10)가 된다.

$$P(\lambda, \vec{v}) = e^{\beta_0(\lambda)} e^{\gamma(\lambda)v^2 \Delta_{\vec{v}}} e^{\beta_1(\lambda)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}}} \varphi(\vec{v}) \quad (10)$$

그리고 의미분 작용소에 대한 결과와 구면조화함수를 이용하여 식 (6)에 대한 완전 해를 찾으

$$P(\lambda, \vec{v}) = \frac{e^{\beta_0(\lambda)}}{\sqrt{4\pi\gamma(\lambda)}} e^{\gamma(\lambda)\pi_0} \quad (11)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-s^2}{4\gamma(\lambda)}} \varphi(\vec{v} e^{\beta_1(\lambda) + (n-2)\gamma(\lambda)s}) ds$$

$$= \frac{e^{\beta_0(\lambda)}}{\sqrt{4\pi\gamma(\lambda)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-s^2}{4\gamma(\lambda)}} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l e^{-\gamma(\lambda)l} \right. \quad (12)$$

$$\left. \times Y_{l,m}^{(k)}(\theta) \varphi_{l,m}(\vec{v} e^{\beta_1(\lambda) + (n-2)\gamma(\lambda)s}) \right] ds$$

특히, $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ 일 때, $\theta_1 \equiv \theta$, $\theta_2 \equiv \varphi$ 로 정의하면,

$$\widehat{A}_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

이 되므로 이것을 식 (11)과 식 (12)에 대입하면 식 (13)과 식 (14)를 얻을 수 있다.

$$P(\lambda, \vec{v}) = \frac{e^{\beta_0(\lambda)}}{\sqrt{4\pi\gamma(\lambda)}} e^{\gamma(\lambda)\widehat{A}_{\theta}} \quad (13)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-s^2}{4\gamma(\lambda)}} \varphi(\vec{v} e^{\beta_1(\lambda) + \gamma(\lambda)s}) ds$$

$$= \frac{e^{\beta_0(\lambda)}}{\sqrt{4\pi\gamma(\lambda)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-s^2}{4\gamma(\lambda)}} \quad (14)$$

$$\times \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-\gamma(\lambda)l(l+1)} Y_{l,m}^m(\theta, \varphi) \right. \\ \left. \times \varphi_{l,m}(\vec{v} e^{\beta_1(\lambda) + \gamma(\lambda)s}) \right] ds$$

확산계수 텐서가 비등방적으로 주어지는 경우에 대한 해를 구하는 과정은 위에서 확산계수 텐서가 등방적으로 주어진 경우와 동일하게 적용하여 다음과 같은 해를 얻는다.

$$P(\lambda, \vec{v}) = \left(\exp + \int_0^{\lambda} [b_0(s) \right. \quad (15)$$

$$\left. + b_1(s)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}} + c(s)v^2(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}})^2] ds \right) \varphi(\vec{v})$$

$$= \left(\exp \int_0^{\lambda} b_0(s) ds \right) \left(\exp \int_0^{\lambda} b_1(s)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}} ds \right) \quad (16)$$

$$\times \left(\exp \int_0^{\lambda} c(s)(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}})^2 ds \right) \varphi(\vec{v})$$

$$= e^{\beta_0(\lambda)} e^{\beta_1(\lambda)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}}} e^{\gamma(\lambda)(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}})^2} \varphi(\vec{v}) \quad (17)$$

또한 $[\beta_0(\lambda)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}} + \gamma(\lambda)(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}})^2] = 0$ 이므로 식 (17)은 다음처럼 쓸 수 있다.

$$P(\lambda, \vec{v}) = e^{\beta_0(\lambda)} e^{\gamma(\lambda)(\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}})^2} e^{\beta_1(\lambda)\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{v}}} \varphi(\vec{v}) \quad (18)$$

이 된다. 따라서, 식 (7)에 대한 완전 해는

$$P(\lambda, \vec{v}) = \frac{e^{\beta_0(\lambda)}}{\sqrt{4\pi\gamma(\lambda)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-s^2}{4\gamma(\lambda)}} \quad (19)$$

$$\times \varphi(\vec{v} e^{\beta_1(\lambda)s}) ds$$

이 된다.

이제까지 Donkov 등은 N차원 Fokker-Planck 방정식의 두가지 형태에 관한 코오시 문제의 완전해를 등방성인 경우와 비등방성인 경우를 분리하여 구하였으나 본 연구에서는 두가지 확산계수 텐서의 일반형으로서 선형결합된 형태의 경우에 대한 완전해를 구해보고자 한다.

3. 등방적인 경우와 비등방적인 경우가 결합된 N차원 Fokker-Planck 방정식의 완전 해

확산계수가 $c_1(\lambda)v^2\hat{I} + c_2(\lambda)v_i v_j$ 로 주어지는 경우, Fokker-Planck 방정식의 N차원 확장은 식 (20)와 같이 된다.

$$\frac{\partial P(\lambda, \vec{v})}{\partial \lambda} = \{ \nabla_{\vec{v}} \cdot a(\lambda)\vec{v} \quad (20)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial v_i \partial v_j} [c_1(\lambda)v^2 \delta_{ij} + c_2(\lambda)v_i v_j] \} P(\lambda, \vec{v})$$

그리고 식 (6)과 (7)의 해를 얻는 과정과 동일한 순서를 밟아 식 (20)을 정리하면 완전 해 식 (21)을 얻을 수 있다.

$$P(\lambda, \vec{v}) = \frac{e^{\beta_0(\lambda)}}{\sqrt{4\pi\gamma_1(\lambda)}} e^{\gamma_1(\lambda)\pi_0} \quad (21)$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-s^2}{4\gamma_1(\lambda)}} \varphi(\vec{v} e^{\beta_1(\lambda) + (n-2)\gamma_1(\lambda)s}) ds$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma_2(\lambda)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-s^2}{4\gamma_2(\lambda)}} \varphi(\vec{v} e^{ts}) ds$$

이때의 초기조건은 $P(0, \vec{v}) = \varphi(\vec{v})$ 로 앞에서와 같이 준다.

식 (21)은 확산계수를 $c_1(\lambda)v^2\hat{I} + c_2(\lambda)v_i v_j$ 로 정하였으므로 등방적인 항과 비등방적인 항을 동시에 포함하는 일반적인 경우의 해라고 할 수 있다. 즉, $c_2(\lambda)$ 를 영으로 두게 되면, 식 (20)은

식 (6)이 되어서 등방적인 경우와 일치하며, $c_1(\lambda)$ 를 영으로 둔다면 식 (21)은 식 (7)의 등방적인 경우와 일치하게 되므로 식 (21)이 등방적인 경우와 비등방적인 경우를 포함하는 일반해 (General solution)라고 할 수 있다.

그리고 식 (21)의 3차원에서 완전 해는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}
 P(\lambda, \vec{v}) &= \frac{e^{\beta_0(\lambda)}}{\sqrt{4\pi\gamma_1(\lambda)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4\gamma_1(\lambda)}} \\
 &\times \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e^{-\gamma_1(\lambda)l(l+1)} \right. \\
 &\times Y_l^m(\theta, \varphi) \varphi_{l,m}(\vec{v} e^{\beta_1(\lambda)+\gamma_1(\lambda)s}) \Big] ds \\
 &\times \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma_2(\lambda)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4\gamma_2(\lambda)}} \varphi(\vec{v} e^{s}) ds
 \end{aligned} \quad (22)$$

삼차원 완전 해에서 Friedrich 와 Peinke의 실험결과와 비교하기 위해 L 을 24, 54, 144, 224, 424로 변화시킬 때 $P_L(v)$ 를 그려보면 Fig. 1과 같다. Fig. 2는 $\text{Log}P_L(v)$ 대 v 의 관계를 나타낸 것이다. Fig. 2는 Fig. 3의 Friedrich와 Peinke의 실험에 의해 확인된 결과와 일치함을 알 수 있다.

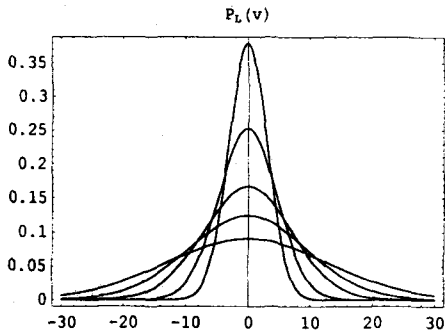


Fig. 1 $P_L(v)$ for isotropic case on $L=24, 54, 144, 224, 424$

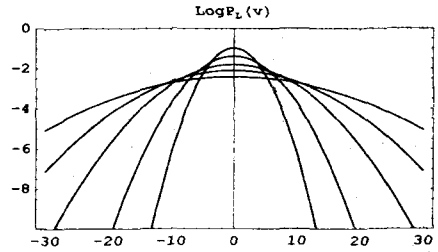


Fig. 2 $\text{Log}P_L(v)$ for isotropic case on $L=24, 54, 144, 224, 424$

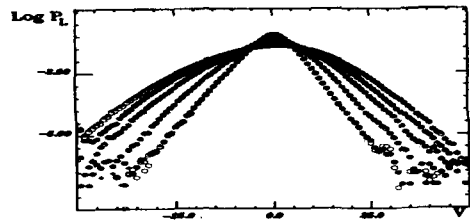


Fig. 3 $\text{Log}P_L(v)$ for isotropic case on $L=24, 54, 144, 224, 424$ (Friedrich & Peinke)

한편 등방적인 경우와 같은 초기조건 $\varphi(\vec{v})$ 하에서 $P_L(v)$ 대 v , $\text{log}P_L(v)$ 대 v 그래프를 그려보면 비등방적인 경우는 Fig. 4, 5와 같이 그려지며 일반적인 경우는 Fig. 6, 7과 같다.

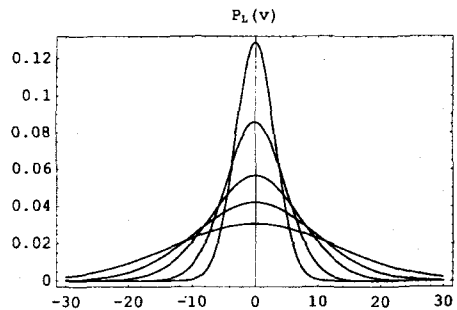


Fig. 4 $P_L(v)$ for anisotropic case on $L=24, 54, 144, 224, 424$

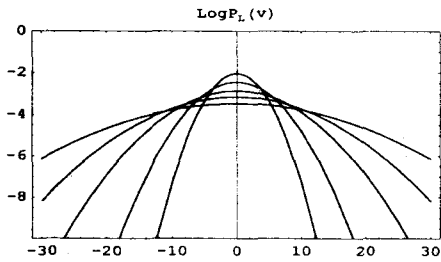


Fig. 5 $\text{Log}P_L(v)$ for anisotropic case on $L=24, 54, 144, 224, 424$

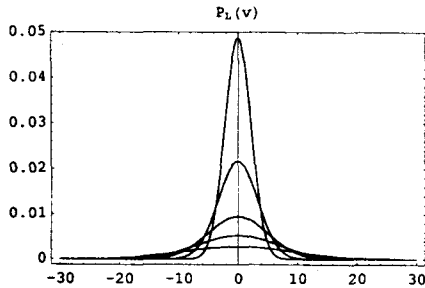


Fig. 6 $P_L(v)$ for general case on $L=24, 54, 144, 224, 424$

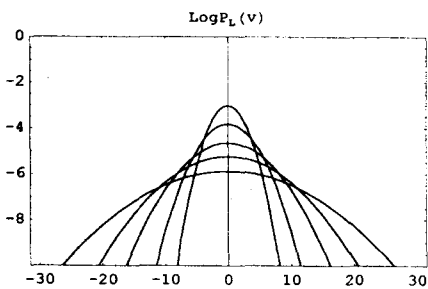


Fig. 7 $\text{Log}P_L(v)$ for general case on $L=24, 54, 144, 224, 424$

4. 결론

마르코프 과정이면서 Chapman-Kolmogorov 방정식을 만족하는 난류 캐스케이드는 Friedrich와 Peinke의 실험에 의해 확인된 바와 같이 λ 와 v 에 대한 관계는 Fokker-Planck 방정식을 만족

한다. 여기에 계수 $D^{(1)}$ 과 $D^{(2)}$ 를 각각 $-a(\lambda)\vec{v}$ 와 $c_1(\lambda)v^2\vec{I}+c_2(\lambda)v_i v_j$ 로 줄 때의 N차 Fokker-Planck 방정식의 등방적, 비등방적인 경우의 선형결합한 형태의 일반적 해를 구하였다.

방정식의 해 $P(\lambda, \vec{v})$ 를 1차원으로 국한하고, L 의 변화에 따른 $P_L(v)$ 개형을 그려보면, 등방적인 경우의 결과가 Friedrich와 Peinke의 실험에 의해 확인된 결과와 일치하는 경향을 나타내는 것을 확인할 수 있었다.

참고문헌

- (1) C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer, 1983, Berlin
- (2) H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer 2nd ed., 1989, Berlin
- (3) 위의 책
- (4) R. Friedrich and J. Peinke, *Physics Review Letter*, Vol.78, No.5 (1997)
- (5) H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer 2nd ed., 1989, Berlin
- (6) R. Friedrich and J. Peinke, *Physics Review Letter*, Vol.78, No.5 (1997)
- (7) 위의 논문
- (8) R. Friedrich and J. Peinke, *Physica D*, Vol.102, No.1-2 (1997)
- (9) A. A. Donkov, A. D. Donkov and E. I. Grancharova, *Preprints*
- (10) R. Feynman, *Physics Review*, Vol.84, No.1 (1951) p.108
- (11) M. Suzuki, *Physica*, A117(1983) p.103; *J. Math. Phys.*, 26 (1985) p.601
- (12) F. Trèves, *Introduction to Pseudo-differential and Fourier Integral Operators*, Vol.1-2, Plenum Press, N.Y., 1982
- (13) L. Hoermander, *Linear Partial differential Operators*, Springer, 1963