대한기계학회 2001년도 추계학술대회논문집 A pp. 3~8 KSME 01F001

X방향의 선형함수구배인 재료에서 전파하는 균열의 동적응력확대계수 K_{IIID}

이 광 호*

Dynamic Stress Intensity Factor K_{IIID} for a Propagating Crack in Liner Functionally Gradient Materials Along X Direction

Kwang Ho Lee

Key Words: Liner Functionally Greadient Materials (선형함수구배재료), Propagating Crack (전파균열), Nonhomogeneous Fields (비 균질장), Stress Intensity Factor (응력확대계수)

Abstract

Dynamic stress intensity factors (DSIFs) are obtained when a crack propagates with constant velocity in rectangular functionally gradient materials (FGMs) under dynamic mode III load. To obtain the dynamic stress intensity factors, it is used the general stress and displacement fields of FGMs for propagating crack and the boundary collocation method (BCM). The stress intensity factors and energy release rates are the greatest in the increasing properties ($\zeta>0$), next constant properties ($\zeta=0$) and decreasing properties ($\zeta<0$) under constant crack tip properties and crack tip speed.

1. 서 론

일반적으로 용광로에 대한 재료는 고온 및 부식 그리고 열전도에 대한 높은 저항성이 요구된다. 그리고 기어, 베어링, 금형과 같은 재료는 높은 내마모성과 파괴인성이 요구된다. 그러하여 용광로에는 열과 부식성에 저항성이 높은 재료를 내벽재료로 하여 사용하고 있으며, 금형 및 베어링등은 내마모성과 파괴인성이 강한재료로 도금하여 사용한다. 그러나 내벽 또는 도금부의 경계면은 응력의 불연속, 잔류응력, 취약한 강도로 인하여 균열 및 도금 탈쇄현상이 자주발생 한다. 이러한 단점을 보완하기 위하여 함수구배재료(FGM)가 개발되었다. 일반적으로 함수구배재료는 분말야금, 화학도금, 원심주조의 방법으로 개발되며, 재료성분이 요구조건에 맞게 공간적으로 변화한다. 이러한 이유로 FGM은 탄성과 물리적인 특성이 공간적으로 변화하며, 따라서 이러한 재료에 대한 파괴역학적인 해석이 절실히 요구된다. 지금까지 FGM의 파괴에 대한 해석은 거의 정적 또는 유사 정적 파괴조건하에 대하여 연구되었다[1-4].

최근에 Parameswaran[5]등이 FGM에서 동적으로 전파하는 균열에 대한 모드 III 응력장과 변위장에 대하여 연구한 바가 있다. 본 연구에서는 Parameswaran 등의 연구를 바탕으로 모드 III 응력장과 변위장에 대한 일반적인 응력장 및 에너지 해방률등을 구하고 경계다점선점법으로 FGM의 응력확대계수 및 에너지 해방률 그리고 그 특성을 연구하는 것이 본 연구의 목적이다.

* 회원, 상주대학교 기계공학부

2. FGMs에서 전파하는 균열선단부근의 일반적인 응력장과 변위장

면외문제에 대한 동적 평형방정식은 식 (1)과 같다.

$$\frac{\partial \sigma_{XZ}}{\partial X}+\frac{\partial \sigma_{YZ}}{\partial Y}=\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{1}$$

여기서 ρ는 밀도, W는 면외 변위, X, Y는 고정좌표계, σ_{ij}는 응력성분을 나타낸다. FGM에서 변화하는 탄성성질은 방정식 (2)와 같다.

$$\mu = \mu_o(1+\zeta X) \tag{2}$$

여기서 ζ는 FGM상수, μ_o는 X=0에서 전단탄성계수이다. FGM의 탄성성질이 방정식 (2)와 같을 때 응력-변형률의 관계는 방정식 (3)과 같다.

$$\tau_{XZ} = \mu_o(1+\zeta X)\frac{\partial W}{\partial X}, \quad \tau_{YZ} = \mu_o(1+\zeta X)\frac{\partial W}{\partial Y} \tag{3}$$

방정식 (3)을 방정식 (1)에 대입하면 식 (4)를 얻을 수 있다.

$$\mu_o(1+\zeta X)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}\right)+\mu_o\zeta\frac{\partial W}{\partial X}=\rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \tag{4}$$

그리고 고정 좌표계(X, Y)와 균열선단의 동좌표계(x, y)와의 관계는 방정식 (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$x = X - ct\ ,\quad y = Y \tag{5}$$

방정식 (5)의 관계를 이용하면 방정식 (4)는 방정식 (6)으로 나타낼 수 있다.

$$\beta_s^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\beta\alpha\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+\beta\frac{\partial W}{\partial x}=0 \tag{6}$$

여기서 $\beta_s=\sqrt{1-(c/c_s)^2}$이고 c와 $c_s(=\sqrt{\mu_c/\rho})$는 균열전파속도 및 균열선단의 전단응력파의 속도를 나타낸다. 그리고 $\mu_c=\mu_o(1+a\zeta)$로서 균열선단에서 전단탄성계수이며, μ_o는 $x=-a$에서 전단탄성계수이다. 균열선단부근($r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$)에서 응력장과 변위장의 근접해를 얻기 위하여 균열선단부근의 좌표를 관측할 수 있는 범위로 상사시킨다[6]. 이를 위하여 새로운 좌표계 $\eta_1=x/\varepsilon$, $\eta_2=y/\varepsilon$를 도입한다. 이때 ε은 작은 양수 값을 가진다. 상사된 좌표계에서 방정식 (6)은 방정식 (7)의 형태를 가진다.

$$\beta_s^2\frac{\partial^2 W}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \eta_2^2}+\varepsilon\beta\eta_1\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \eta_1^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \eta_2^2}\right)+\varepsilon\beta\frac{\partial W}{\partial \eta_1}=0 \tag{7}$$

여기서 $\beta(a,\zeta)=\dfrac{\zeta}{(1+a\zeta)}$이다. 방정식 (7)에서 W의 일반해는 ε의 멱급수열로서 방정식 (8)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(x,y)=W(\varepsilon\eta_1,\varepsilon\eta_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{n/2}W_n(\eta_1,\eta_2) \tag{8}$$

방정식 (8)을 방정식 (7)에 대입하므로 방정식 (9)를 얻을 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\varepsilon^{n/2}\left(\beta_s^2\frac{\partial^2 W_n}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2 W_n}{\partial\eta_2^2}\right)+\varepsilon^{(n+2)/2}\left[\beta\eta_1\left(\frac{\partial^2 W_n}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2 W_n}{\partial\eta_2^2}\right)+\beta\frac{\partial W_n}{\partial\eta_1}\right]\right\}=0 \tag{9}$$

방정식 (9)가 임의의 ε에 대하여 성립하기 위하여 ε의 각 미분방정식을 0으로 두어야 한다. 그리하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\beta_s^2\frac{\partial^2 W_n}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2 W_n}{\partial\eta_2^2}=0 \qquad : n=1,2 \tag{10-a}$$

$$\beta_s^2\frac{\partial^2 W_n}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2 W_n}{\partial\eta_2^2}+\beta\eta_1\left(\frac{\partial^2 W_{n-2}}{\partial\eta_1^2}+\frac{\partial^2 W_{n-2}}{\partial\eta_2^2}\right)+\beta\frac{\partial W_{n-2}}{\partial\eta_1}=0 \qquad : n\geq 3 \tag{10-b}$$

먼저 $n=1,2$에 대한 W_n의 일반해는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W_n = 2Re\{\Omega_n(z_s)\} \tag{11}$$

그리고 변위 포텐셜 $\Omega_n(z_s)$를 다음과 같이 멱급수열로 나타내면

$$\Omega_n(z_s)=\sum_{n=1}^{2}A_n z_s^{\lambda_n} \tag{12}$$

여기서 A_n는 복소상수이다. 방정식 (12)을 방정식 (11)에 대입한 후, 균열면에서 표면력이 0인 조건을 적용하면 전파하는 균열에 대한 변위장은 방정식 (13)와 같이, 그리고 방정식 (13)을 방정식 (3)에 대입하므로 응력장은 방정식 (14)와 같이 얻어진다.

$$W_n^o=\sum_{n=1}^{2}\frac{K_n^+}{\mu_c\beta_s}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,r_s^{n/2}\begin{cases}\sin\dfrac{n}{2}\theta_s : n=odd\\ \cos\dfrac{n}{2}\theta_s : n=even\end{cases} \tag{13}$$

$$\tau^{o}_{yzn}=\sum_{n=1}^{2}\frac{K_n^{+}}{\sqrt{2\pi}}(1+\beta x)nr_s^{\frac{n}{2}-1}\begin{cases}\cos(\frac{n}{2}-1)\theta_s: & n=odd\\ -\sin(\frac{n}{2}-1)\theta_s: & n=even\end{cases}$$

$$\tau^{o}_{xzn}=\sum_{n=1}^{2}\frac{K_n^{+}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1+\beta x}{\beta_s}nr_s^{\frac{n}{2}-1}\begin{cases}\sin(\frac{n}{2}-1)\theta_s: & n=odd\\ \cos(\frac{n}{2}-1)\theta_s: & n=even\end{cases} \tag{14}$$

여기서 K_1^{+}는 응력확대계수 K_{III}이다.

다음에 $n\geq 3$의 W_n의 일반해는 방정식 (11)을 방정식 (10-b)의 우편항에 대입하므로 얻어진다. 해의 복잡성 때문에 본 연구에서는 $n=3$ 대하여만 얻도록 한다. 그리하여 $n=3$에 대한 일반해는 방정식 (15)와 같이 나타낼 수 있다.

$$W_3^{f}=2Re\left\{\Omega_3(z_s)+\beta[\frac{(1-\beta_s^2)}{\beta_s^2}\eta_1 r_s^2 a_j\Omega_1''(z_s)-\frac{r_s^2}{2\beta_s^2}\Omega_1'(z_s)]\right\} \tag{15}$$

여기서 $a_j=\begin{cases}\frac{1}{4}\ ;\ \sin\frac{5}{2}\theta_s\\ -\frac{1}{2}\ ;\ \sin\frac{1}{2}\theta_s\end{cases}$ 이다.

방정식 (15)의 우측 첫 번째항은 균질재료에 해당되며, 이어서 비 균질 파라메타 β의 영향으로 비 균질재료에 해당되는 항이 부가되어 있음을 알 수 있다. 그리하여 $n=3$에 대한 변위장은 방정식 (16)과 같이 얻을 수 있다.

$$W_n^{f}=\frac{K_3^{+}}{\mu_c\beta_s}\sqrt{\frac{2}{\pi}}r_s^{\frac{3}{2}}\sin\frac{3}{2}\theta_s+\frac{K_{III}}{\mu_c\beta_s}\sqrt{\frac{2}{\pi}}r_s^{\frac{3}{2}}\beta\left\{\frac{3+\beta_s^2}{16\beta_s^2}\sin\frac{\theta_s}{2}+\frac{1-\beta_s^2}{32\beta_s^2}\sin\frac{5\theta_s}{2}\right\} \tag{16}$$

그리고 방정식 (16)을 방정식 (3)에 대입하므로 $n=3$에 대한 응력장 τ_{yz}, τ_{xz}를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\tau^{f}_{yz3}=\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}}(1+\beta x)r_s^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{K_3^{+}}{K_{III}}3\cos\frac{\theta_s}{2}+\beta\left[\frac{1-\beta_s^2}{32\beta_s^2}\times(4\cos\frac{3}{2}\theta_s+\cos\frac{7}{2}\theta_s)+\frac{3+\beta_s^2}{16\beta_s^2}(2\cos\frac{1}{2}\theta_s-\cos\frac{3}{2}\theta_s)\right]\right\} \tag{17}$$

$$\tau^{f}_{xz3}=\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(1+\beta x)}{\beta_s}r_s^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{K_3^{+}}{K_{III}}3\sin\frac{\theta_s}{2}+\beta\left[\frac{1-\beta_s^2}{32\beta_s^2}\times(4\sin\frac{3}{2}\theta_s-\sin\frac{7}{2}\theta_s)+\frac{3+\beta_s^2}{16\beta_s^2}(\sin\frac{3}{2}\theta_s-2\sin\frac{\theta_s}{2})\right]\right\} \tag{18}$$

따라서 FGM에 대한 응력장 및 변위장은 다음과 같다.

$$W=W_n^{o}+W_3^{f}\ ,\quad \tau_{ij}=\tau^{o}_{ijn}+\tau^{f}_{ij3} \tag{19}$$

그리고 FGM에서 전파하는 균열의 에너지 해방률은 방정식 (20)과 같이 나타낼 수 있다.

$$G=\frac{K_{III}^2}{2\mu_c}\frac{1}{\beta_s} \tag{20}$$

본 연구에서 얻어진 응력장은 균열면($\theta=\pm\pi$)에서 표면력은 0이며, FGM상수 ζ가 0인 경우에는 비 균질 파라메타 $\beta(a,\zeta)$가 0이 되어 등방성체의 응력장과 변위장으로 변환되며, $r\to 0$로 근접한 영역에서 응력성분과 변위성분도 등방성체의 응력성분 및 변위성분과 같다. 또한 응력확대계수 K의 지배항은 응력장에서는 $r^{-1/2}$ 뿐만아니라 $r^{1/2}$의 항에도 영향을 미치며 변위장에서는 $r^{1/2}$과 $r^{3/2}$ 항에 영향을 미치고 있음을 알 수 있다.

한편 $n=3$까지의 변위장 (19)를 평형방정식(6)에 적용하면 변위장(16)에서 비 균질파라메타 β 항 때문에 ε이 매우 작은 경우, 즉 x,y평면에서는 균열선단 가까이에서만 해석이 가능하다. 그리고 응력장과 변위장의 고차항($n>4$)을 계산하면 비 균질파라메타 β항은 매우 작은 값을 가진다. 그리하여 고차항에서는 β항을 무시할 수 있으며, 또한 $n=3$의 변위장의 $K\beta r_j^{3/2}f_{ij}(\theta_j)$의 항과 응력장의 $K\beta r_j^{1/2}g_{ij}(\theta_j)$항은 균열선단부근($r\to 0$)에 근접한 영역에서만 해석되어져야 하므로 FGM의 재료에 대한 일반적인 응력장 및 변위장은 근사적으로 방정식 (21)과 같이 나타낼 수 있다.

$$W\cong\sum_{n=1}^{\infty}W_n^{o}\ ,\quad \tau_{ij}\cong\sum_{n=1}^{\infty}\tau^{o}_{ijn} \tag{21}$$

일반적으로 응력장에 있어서 응력확대계수의 지배영역은 r가 매우 작은 경우 응력은 이론적으로 무한값을 가지나 실제로는 균열선단의 소성변위로 인하여 유한값을 가지므로 유효하지 않다. 그럼에도 불구하고 응력확대계수의 지배영역이 소성영역을 완전히 둘러싸고 있다면, 소성영역을 제외한 탄성영역에서 응력확대계수는 재료의 파괴특성을 결정한다고 여겨진다. 대개 평면응력상태에서 응

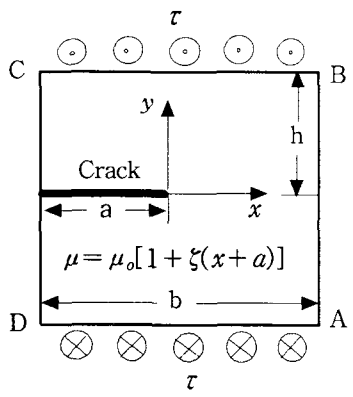

Fig. 1 Model of FGM.

력확대계수의 지배영역은 $r > h/2$ (h:판의두께)이다.[7]

3. 경계선점법에 의한 FGM전파 균열의 동적 응력확대계수 결정

본 연구에서 사용된 FGM의 모델은 Fig.1과 같다. 유한판의 위 경계면과 아래 경계면에서 모드 III 하중이 작용하고 있다. 이러한 경계조건에서는 AB의 경계와 CD의 경계에서는 전단응력 $\tau_{xz}=0$이고, BC와 DA의 경계를 따라서 전단응력 $\tau_{yz}=\tau$ 가 작용한다. 그리고 선택된 점의 수는 AB경계를 따라 30점, BC경계를 따라 25점, CD경계를 따라 30점, DA경계를 따라 25점을 선택하여 총 110개의 점을 선정하였다. 그리고 FGM의 일반적인 응력장을 사용하고 멱급수열 n항은 60개로 하여 미지의 K_n^+을 결정하였다. 균열선단에서 경계상의 임의 점까지의 거리 r_m와 θ_m를 응력장에 대입하고 경계조건을 적용하면 미지의 계수 K_n^+로 구성된 연립방정식을 얻을 수 있다. 미지수의 수와 방정식의 수가 일치하지 않으므로 최소자승법의 개념에 의해 경계조건을 만족하는 해를 구할 수 있다[8]

4. FGM 균열의 응력확대계수

FGM에서 전파하는 균열선단에서 균열의 전파 특성을 이해하기 위하여 사용된 FGM재료는 이미 Parameswaran and Shukla[9]등이 개발한 폴리 에스트러가 주성분인 FGM이며 기계적 성질은 Table 1과 같다. Table 1과 같은 FGM의 전단 탄성계수의

Table 1. Mechanical properties for Polyester FGM.

Nonhomogeneous Shear'Modulus, $\mu(X)$	$\mu(X)=1.316(1+\zeta X)$, (GPa)
FGM constant, ζ	$\zeta=2.2857$ (m^{-1})
Poisson's ratio, ν	$\nu=0.33$
Density, ρ	$\rho=1200$ (Kg/m^3)

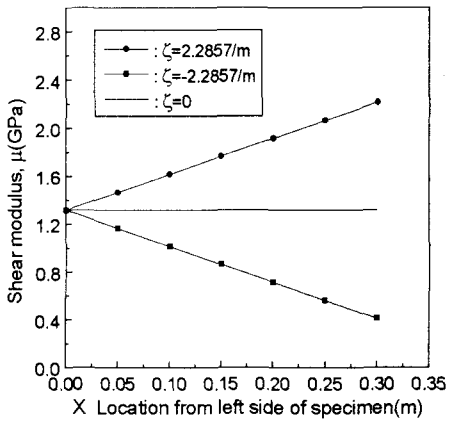

Fig. 2 Variation of shear modulus μ with X location.

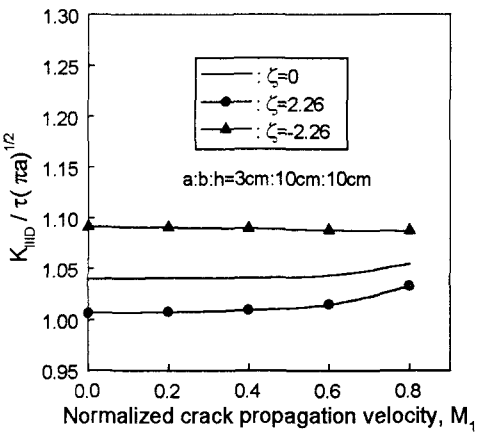

Fig. 3 $K_{IIID}/\tau\sqrt{\pi a}$ with $M_1(c/c_s)$ for a:b:h= 3cm:10cm:10cm.

변화는 Fig. 2와 같이 ζ가 +인 경우는 X가 증가할 수 록 전단탄성계수 μ는 증가하며 ζ가 -인 경우는 X가 증가할 수 록 감소한다.

Fig. 3은 a:b:h=3cm:10cm:10cm인 경우 균열전파속도에 대한 FGM의 무차원 응력확대계수를 나타내

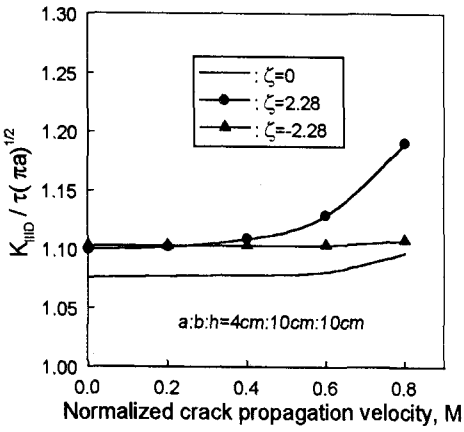

Fig. 4 $K_{IID}/\tau\sqrt{\pi a}$ with $M_1(c/c_s)$ for a:b:h= 4cm:10cm:10cm.

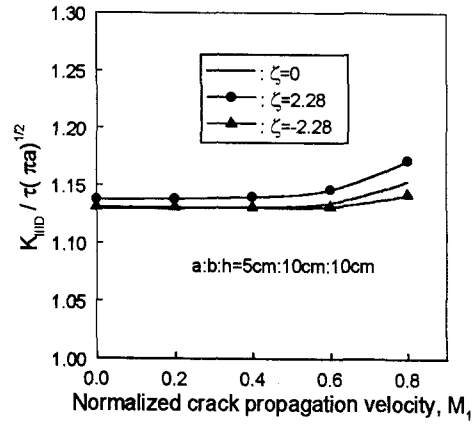

Fig. 5 $K_{IID}/\tau\sqrt{\pi a}$ with $M_1(c/c_s)$ for a:b:h= 5cm:10cm:10cm.

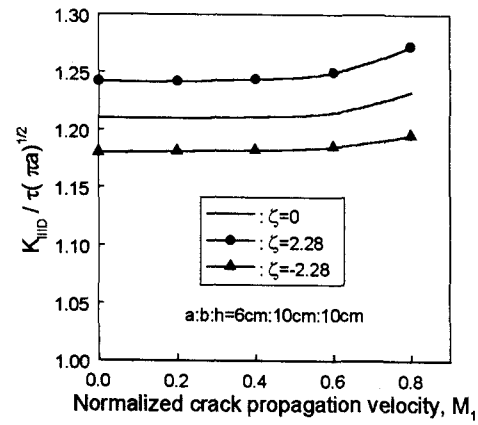

Fig. 6 $K_{IID}/\tau\sqrt{\pi a}$ with $M_1(c/c_s)$ for a:b:h= 6cm:10cm:10cm.

고 있다. $\zeta<0$인 경우의 응력확대계수가 가장 크며 다음에 $\zeta=0$(등방성체) 및 $\zeta>0$인 경우의 응력확대계수 순이다. 이것은 균열의 길이가 3cm인 균열선단부근에서 재료의 전단탄성계수의 값은 $\zeta<0$인 경우는 평균 전단탄성계수(a=5cm 위치)의 값보다 크며 $\zeta>0$인 경우는 반대로 평균 전단 탄성계수값 보다 작다. 균열선단부근에서 전단탄성계수값의 증가는 균열선단부근의 응력값을 증가시키므로 균균열의 길이가 3cm인 경우에는 $\zeta<0$인 경우가 가장 크며, 다음에 $\zeta=0$ 및 $\zeta>0$인 순으로 응력확대값의 순서를 가진다고 여겨진다.

Fig. 4는 a:b:h=4cm:10cm:10cm인 경우 균열전파속도에 대한 FGM의 무차원 응력확대계수를 나타내고 있다. 균열의 길이가 4cm인 경우의 균열선단부근에서 재료의 전단탄성계수의 값은 여전히 Fig.3의 경우와 같은 크기의 순서를 가지나 무차원 응력확대계수는 균열의 속도가 저속인 경우에는 $\zeta>0$인 경우와 $\zeta<0$의 응력확대계수가 비슷하며 $\zeta=0$인 경우가 가장 작다. 그러나 균열의 전파속도가 $M>0.3$의 고속인 경우는 $\zeta>0$인 경우가 가장 크며 다음에 $\zeta<0$ 및 $\zeta=0$인 경우의 응력확대계수 순이다. 이것은 균열의 길이가 4cm인 균열선단부근에서 재료의 전단탄성계수의 값은 $\zeta<0$인 경우는 평균 전단탄성계수의 값보다 큼에도 불구하고 $\zeta>0$인 경우의 응력확대계수가 더 큰 것은 균열이 전파할 때 균열선단에서 발생하는 에너지 해방률이 $\zeta>0$인 경우가 $\zeta<0$인 경우보다 더 크다고 여겨진다.

Fig. 5는 a:b:h=5cm:10cm:10cm인 경우 균열전파속도에 대한 FGM의 무차원 응력확대계수를 나타내고 있다. 균열의 길이가 5cm인 균열선단부근에서 재료의 전단탄성계수의 값은 $\zeta>0$, $\zeta<0$ 그리고 $\zeta=0$에 관계없이 균열선단에서 전단탄성계수값은 같은 평균 전단 탄성계수값을 가진다. 그러함에도 불구하고 $\zeta>0$인 경우의 응력확대계수가 가장 크며 다음에 $\zeta=0$ 및 $\zeta<0$인 경우의 응력확대계수 순이다. 이러한 현상은 앞에서 언급했드시 균열이 전파할 때 균열선단에서 발생하는 에너지 해방률이 $\zeta>0$인 경우가 가장 크며 다음에 $\zeta=0$ 및 $\zeta<0$인 순으로 여겨진다.

Fig. 6은 a:b:h=6cm:10cm:10cm인 경우 균열전파속도에 대한 FGM의 무차원 응력확대계수를 나타내고 있다. $\zeta>0$인 경우의 응력확대계수가 가장 크며

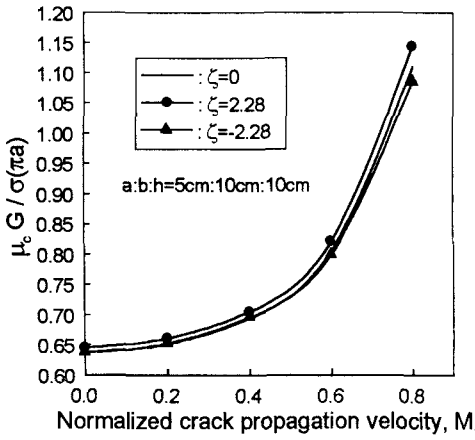

Fig. 7 $\mu_c G/\sigma(\pi a)$ with $M_1(c/c_s)$ for a:b:h= 5cm:10cm:10cm.

다음에 ζ=0 및 ζ<0인 경우의 응력확대계수 순이다. 이러한 현상은 ζ>0인 경우의 전단탄성계수가 가장 크며 다음에 ζ=0 및 ζ<0인 경우의 순서이기 때문이다. 그리고 무차원 응력확대계수는 균열의 전파속도가 증가함에 따라 증가한다.

Fig.7은 a:b:h=5cm:10cm:10cm인 경우 균열전파속도에 대한 FGM의 무차원 에너지 해방률을 나타내고 있다. a=5cm인 경우는 ζ의 +, - 상태에 관계없이 균열선단에서 전단탄성계수 μ_c가 같다면 균열전파속도가 M_1<0.6인 경우는 ζ>0인 경우의 FGM재료의 에너지 해방률이 가장 크며 ζ=0 또는 ζ<0인 경우는 서로 비슷한 에너지 해방률을 나타내고 있다. 균열전파속도가 M_1>0.6인 경우는 ζ>0, ζ=0 그리고 ζ<0인 순서로 에너지 해방률을 나타내고 있다. 이러한 경향은 Fig.5의 균열전파속도에 따른 무차원 응력확대계수의 경향과 일치한다.

5. 결 론

본 연구에서는 시편의 기하학적인 조건인 b:h= 10cm:10cm인 FGM에 동적모드 III하중을 받아 외측균열이 전파할때 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) FGM에서 전파하는 균열선단부근의 응력장 및 변위장은 방정식(19)와 같이, 일반적인 응력장과 변위장은 방정식 (21)과 같이 나타낼 수 있다.

(2) 균열의 전파길이가 3cm 및 6cm인 경우: 균열선단의 전단탄성계수(μ_c)가 클수록 응력확대계수가 증가한다.

(3) 균열의 전파길이가 4cm 및 5cm인 경우: ζ>0인 경우가 ζ<0인 경우보다 응력확대계수가 크다.

(4)균열이 전파할 때 발생하는 에너지 해방률은 균열선단에서 물성치 및 균열전파속도가 같다면 ζ>0인 경우가 가장 많은 에너지를 방출하며 다음이 ζ=0, ζ<0순이다.

참고문헌

(1) Erdogan F., 1995, "Fracture Mechanics of Functionally Graded Materials", *Composite Engineering*, Vol.5, No. 7, pp. 753-770.

(2) Jin Z.H. and Batra, R.C., 1996, "Some Basic Fracture Mechanics Concept in Functionally Graded Materials", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.44, No.8, pp.1221-1235.

(3) Gu P. and Asaro R.J., 1997, "Cracks in Functionally Graded Materials", *Int. J. Solid Struct.*, Vol.34, No.1, pp.1-17.

(4) Butcher, R. J., Rousseau, C. E. and Tippur, H.V., 1999,"A Functionally Graded Particulate Composite: Preparation, Measurement, and Failure Analysis," *Acta mater.*, Vol. 47, No.1, pp.259-268.

(5) Parameswaran V. and Shukla A., 1999, " Crack-Tip Stress Fields for Dynamic Fracture in Functionally Gradient Materials", *Mechanics of Materials*, Vol.31, pp.579-596.

(6) Freund, L. B., 1990, "Dynamic Fracture Mechanics," Cambridge University Press, Cambrage.

(7) Rosakis, A.J. and Ravi-Chandar, K., 1986, "On Crack Tip Stress State : An Experimental Evaluation of Three-Dimension Effects," *Int. J. of Solid and Struct.*, Vol.22, pp.121-134.

(8) 이광호, 황재석, 최선호, 1995, "직교이방성 유한 사각판에 내재된 외부균열의 등속전파 응력확대계수 K_{III}", 대한기계학회논문집, 제 19권 제 11호, pp.2843-2852.

(9) Parameswaran V. and Shukla, A., 2000, " Processing and Characterization of a Model Functionally Gradient Material, *Journal of Materials Science*, Vol.35, pp.21-29.