

직교 이방성 탄성체에 접합된 압전 재료의 균열 전파 거동

김철곤* · 권순만** · 이강용***

Crack Propagation in a Piezoelectric Layer Bonded between Two Orthotropic Layers

Chuel Gon Kim*, Soon Man Kwon** and Kang Yong Lee***

Key Words: Moving Crack(전파균열), Piezoelectric Material(압전재료), Intensity Factor(세기계수), Dynamic Energy Release Rate(동적 에너지해방률), Branch Angle(분기각)

Abstract

In this paper, we examine the steady state dynamic electromechanical behavior of an eccentric Yoffe crack in a piezoelectric ceramic layer bonded between two orthotropic elastic layers under the combined anti-plane mechanical shear and in-plane electrical loadings. We adopted permeable crack face condition. Numerical values on the dynamic energy release rate are obtained. The initial crack propagation orientation for PZT-5H piezoceramic is also predicted by maximum energy release rate criterion.

기호설명

- E_{ki} : 전기장 성분
- D_{ki} : 전기변위 성분
- $G(v), G(v, \theta)$: 동적 에너지해방률
- $K^D(v)$: 동적 전기변위 세기계수
- $K^T(v)$: 동적 응력세기계수
- M : Mach수
- v : 균열전파속도
- w_i : 변위 성분
- ψ_i : Bleustein 함수
- θ_b : 분기각(branch angle)
- τ_{ij} : 응력 성분

1. 서론

최근, 압전 재료(piezoelectric material)의 균열거동에 대한 관심의 증가로 수많은 연구가 수행되었다. 하지만, 압전 재료에서의 균열전파(crack propagation) 문제는 기계·전기적 연성(electromechanical coupling) 문제로 인하여 그 연구가 거의 수행되어 있지 않은 상태이다.

본 논문에서는 균열면 도전(permeable) 경계조건을 사용하여 기계적 면외 전단(anti-plane)하중과 전기적 면내(in-plane)하중을 동시에 받으며 유한한 탄성체 사이에 접합된 압전 세라믹 띠(strip)에 존재하는 Yoffe형 편심균열(eccentric crack) 문제를 고려한다. 세기계수(intensity factor) 및 동적 에너지해방률(dynamic ERR : DERR)들이 결정되며, 균열전파속도 및 균열전파방향에 대한 기계·전기적 영향을 알아보기 위해 PZT-5H 압전 세라믹에 대해 수치적 해석을 수행한다.

2. 문제기술

Fig. 1과 같이 기계·전기적 복합하중을 받으며,

* 회원, 연세대학교 기계공학과 대학원

** 회원, 연세대학교 기계공학과

*** 회원, 연세대학교 기계공학과

Email : fracture@yonsei.ac.kr

Tel & FAX : 02-2123-2813

적층 구성된 직교 이방성 탄성체 사이에 접합된 압전 띠 내부에 존재하는 Yoffe형 등속 전파 편심균열(길이 $2a$, 균열 전파속도 v)을 고려한다. 균열 중앙에 고정 직교 좌표계 (X, Y, Z) 가 위치하며, 분극(poling)의 방향은 Z -축이다. Fig. 1과 같이 균일한 전단응력 τ_0 와 균일한 전기변위 D_0 가 작용한다. 편의상 압전 스트립을 윗 부분 ($Y \geq 0$, 두께 h_1)과 아래 부분($Y < 0$, 두께 h_2)의 두 영역으로 나누어 생각한다.

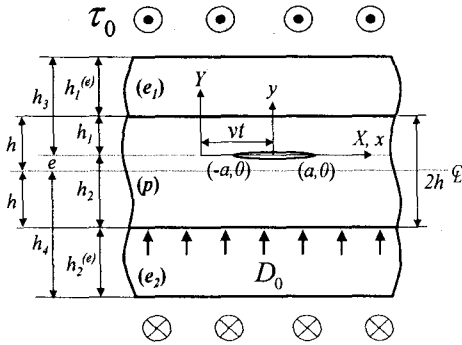


Fig. 1 A piezoelectric ceramic layer with an eccentric moving crack bonded between two orthotropic elastic layers

고려된 정상 상태(steady state)의 균열전파 문제는 다음과 같이 단순화될 수 있다.

$$u_{Xi}^{(p)} = u_{Yi}^{(p)} = 0, \quad u_{Zi}^{(p)} = w_i^{(p)}(X, Y, t), \quad (1)$$

$$\Phi(X, Y, t) = \phi(x, y),$$

$$E_{Xi}(X, Y, t) = -\partial\phi_i/\partial x,$$

$$E_{Yi}(X, Y, t) = -\partial\phi_i/\partial y, \quad (2)$$

$$E_{Zi} = 0, \quad (i = 1, 2),$$

$$u_{Xj}^{(e)} = u_{Yj}^{(e)} = 0, \quad (3)$$

$$u_{Zj}^{(e)}(X, Y, t) = w_j^{(e)}(x, y), \quad (j = 1, 2),$$

$$x = X - vt, \quad y = Y, \quad (4)$$

여기서 u_k , E_k ($k = X, Y, Z$)와 ϕ_i 는 변위, 전기장과 전위 (electric potential)를, 상첨자 p 와 e 는 압전 띠와 두 탄성 영역을, 하첨자 $i = 1, 2$ 는 압

전 띠의 위와 아래 영역을 $j = 1, 2$ 는 압전 띠 위, 아래의 탄성체를 각각 의미한다. (x, y) 는 전파 균열을 고려한 이동 좌표계이다.

이동 좌표계에서 압전체와 탄성체의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\alpha^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_i^{(p)}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_i^{(p)}(x, y) = 0, \quad (5)$$

$$\beta_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_j^{(e)}(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_j^{(e)}(x, y) = 0, \quad (6)$$

$$\nabla^2 \psi_i(x, y) = 0, \quad (7)$$

여기서

$$\alpha = \sqrt{1 - M^2}, \quad \beta_j = \lambda_j \sqrt{1 - (M/C_T^* \lambda_j)^2},$$

$$\phi_i \equiv \phi_i - \frac{e_{15}}{d_{11}} w_i^{(p)}, \quad C_T = \sqrt{\mu/\rho},$$

$$M = v/C_T, \quad C_T^* = C_{Tj}^{(e)}/C_T = \sqrt{c_{44j}^*/\rho_j^*}, \quad (8)$$

$$C_{Tj}^{(e)} = \sqrt{c_{44j}^{(e)}/\rho_j^{(e)}}, \quad \lambda_j = \sqrt{c_{55j}^{(e)}/c_{44j}^{(e)}},$$

$$c_{44j}^* = c_{44j}^{(e)}/\mu, \quad \rho_j^* = \rho_j^{(e)}/\rho, \quad \mu = c_{44} + e_{15}^2/d_{11}.$$

c_{44} , d_{11} , e_{15} , $c_{44j}^{(e)}$ 와 $c_{55j}^{(e)}$ 는 균일한 전기장에서 측정된 압전 재료의 전단계수, 균일한 변형률에서 측정된 유전률 (dielectric permittivity), 압전 상수 (piezoelectric constant), 탄성체의 전단계수이다. 또한 C_T , $C_{Tj}^{(e)}$, M , μ , ρ 와 $\rho_j^{(e)}$ 는 압전 재료의 횡파속도, 탄성체의 횡파속도, Mach 수, 압전 재료의 탄성 계수, 압전 재료의 밀도 그리고 탄성체들의 밀도이다.

압전 재료 및 탄성체에서의 구성관계식은 다음과 같다.

$$\tau_{kzi}^{(p)} = \mu w_i^{(p)},_{,k} + e_{15} \phi_{i,k}, \quad D_{ki} = -d_{11} \phi_{i,k},$$

$$\tau_{xzi}^{(e)} = c_{55j}^{(e)} w_j^{(e)},_{,x}, \quad \tau_{yzi}^{(e)} = c_{44j}^{(e)} w_j^{(e)},_{,y}, \quad (9)$$

$$(k = x, y), \quad (i, j = 1, 2).$$

여기서, $\tau_{kzi}^{(p)}$, $\tau_{kzi}^{(e)}$ 와 D_{ki} 는 응력 및 전기변위 성분들이다.

전기적 연속 도전조건을 갖는 Yoffe형 균열 경계 조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\tau_{yz1}^{(b)}(x, 0) = 0, \quad (0 \leq x < a), \quad (10)$$

$$w_1^{(b)}(x, 0) = w_2^{(b)}(x, 0), \quad (a \leq x < \infty), \quad (11)$$

$$D_{y1}(x, 0^+) = D_{y2}(x, 0^-), \quad (0 \leq x < a), \quad (12)$$

$$E_{x1}(x, 0^+) = E_{x2}(x, 0^-), \quad (0 \leq x < a), \quad (13)$$

$$\phi_1(x, 0) = \phi_2(x, 0), \quad (a \leq x < \infty), \quad (14)$$

$$\tau_{yz1}^{(b)}(x, 0) = \tau_{yz2}^{(b)}(x, 0), \quad (a \leq x < \infty), \quad (15)$$

$$D_{y1}(x, 0) = D_{y2}(x, 0), \quad (a \leq x < \infty), \quad (16)$$

$$\tau_{yz1}^{(b)}(x, h_1) = \tau_{yz2}^{(e)}(x, h_1), \quad (17)$$

$$\tau_{yz2}^{(b)}(x, -h_2) = \tau_{yz2}^{(e)}(x, -h_2), \quad (18)$$

$$w_1^{(b)}(x, h_1) = w_1^{(e)}(x, h_1), \quad (19)$$

$$w_2^{(b)}(x, -h_2) = w_2^{(e)}(x, -h_2), \quad (20)$$

$$\tau_{yz1}^{(e)}(x, h_3) = \tau_{yz2}^{(e)}(x, -h_4) = \tau_0, \quad (21)$$

$$D_{y1}(x, h_1) = D_{y2}(x, -h_2) = D_0. \quad (22)$$

3. 세기계수 및 에너지 해방율

동적 응력세기계수 (dynamic SIF : DSIF) $K^\sigma(v)$ 및 동적 전기변위 세기계수 (dynamic EDIF : DEDIF) $K^D(v)$ 는 다음과 같이 정의되어지며 결정된다.

$$K^T(v) \equiv \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(x-a)} \tau_{yz}(x, 0) = \tau_0 \sqrt{\pi a} \Omega(1),$$

$$K^D(v) \equiv \lim_{x \rightarrow a^+} \sqrt{2\pi(x-a)} D_y(x, 0) = \frac{e_{15}}{\gamma} K^T(v). \quad (23)$$

여기서 $\Omega(1)$ 은 경계조건 식 (10)~(22)에 적분변환(integral transform) 방법을 적용하여 얻어진 다음의 제 2종 Fredholm 적분방정식으로부터 구할 수 있다.

$$\Omega(\xi) + \int_0^1 L(\xi, \eta) \Omega(\eta) d\eta = \sqrt{\xi}, \quad (24)$$

여기서

$$L(\xi, \eta) \quad (25)$$

$$= \sqrt{\xi\eta} \int_0^\infty s [f(s/a) - 1] J_0(s\eta) J_0(s\xi) ds.$$

$$f(s) = \frac{1}{\gamma} \left[\mu \alpha Q(s) - \frac{e_{15}^2}{d_{11}} R(s) \right], \quad (26)$$

$$Q(s) = \frac{(q_1^- - q_1^+ e^{-2sa h_1})(q_2^+ - q_2^- e^{-2sa h_2})}{q_1^- q_2^+ - q_1^+ q_2^- e^{-2sa(h_1 + h_2)}}, \quad (27a)$$

$$R(s) = \frac{(1 - e^{-2sh_1})(1 - e^{-2sh_2})}{1 - e^{-2s(h_1 + h_2)}}, \quad (27b)$$

$$q_j^\pm(s) = \mu [\alpha \mp c_{44j}^* \beta_j H_j(s)], \quad (j = 1, 2), \quad (28)$$

$$H_1(s) = -\tanh(s\beta_1 h_1^{(e)}), \quad (29a)$$

$$H_2(s) = \tanh(s\beta_2 h_2^{(e)}), \quad (29b)$$

$$\gamma = \mu \alpha - e_{15}^2/d_{11}, \quad (29c)$$

식 (24)는 몇 가지의 특별한 문제들을 고려함으로써 그 타당성을 검증할 수 있다. 우선, $v=0$ 인 경우 상응하는 모델에 대한 정적인 해를 얻을 수 있다. $v=0$, $h_1^{(e)}, h_2^{(e)} \rightarrow \infty$ 및 두 탄성체가 동일 재질인 경우, Shin과 Lee⁽¹⁾의 결과와 동일하게 된다. 접합되어 있는 두 탄성체를 무시하고 압전 스트립내의 균열 편심을 배제하면 Kwon 등⁽²⁾의 결과와 일치한다. 또, Shin과 Lee⁽¹⁾의 결과에서 $e=0$ 이면 Narita 등⁽³⁾이 제시한 모델의 결과를 얻을 수 있고, $e=0$ 이며 두 무한 탄성체가 동일 재질이고 $e_{15}=0$ 일 경우, Sih⁽⁴⁾의 결과와도 일치한다.

또, 응력, 변위 전기장 관계로부터 다음의 동적 에너지해방률(DERR)을 결정할 수 있다.⁽⁵⁾

$$G(v) = \frac{\mu \alpha [K^T(v)]^2}{2\gamma^2} - \frac{[K^D(v)]^2}{2d_{11}} \quad (30)$$

$$= \frac{[K^T(v)]^2}{2\gamma}.$$

즉, 압전재료에서 의미있는 파괴역학적 매개변수인 DERR은 DSIF의 항으로 표현되며, DERR, DSIF 및 DEDIF는 균열전파속도, 기하학적 형상 및 물성치에 의존함을 알 수 있다.

4. 결과 고찰

먼저, 두 탄성체를 무시하고 $h \rightarrow \infty$ 일 때, 즉, 무한 압전체를 고려하여 보자. 이 경우, 식 (23)의 $\mathcal{Q}(1) \rightarrow 1$ 이므로 DSIF 및 DEDIF는 다음과 같다.

$$K^T(v) = \tau_0 \sqrt{\pi a}, \quad K^D(v) = e_{15} K^T / \gamma. \quad (31)$$

즉, 무한 압전체에서의 DSIF는 균열전파속도에 무관하나, DERR은 균열전파속도에 의존하며 균열전파속도가 증가하면 DERR도 증가함을 알 수 있다. 이는 탄성의 결과⁽⁶⁾와 동일한 경향이다. 또, DSIF의 결과는 Chen과 Yu⁽⁷⁾의 결과와도 일치하는 것이다. 그렇지만, DEDIF는 균열전파속도 및 물성치에 의존적이며 이는 Chen과 Yu⁽⁷⁾의 결과와 상반되는 결론이다. 이러한 차이는 전기적 균열면 경계조건의 차이에서 기인된다.

Fig. 2는 $G^* (\equiv G(v)/G_\infty(v=0))$ 와 다양한 물체의 조합에 따른 M 과의 관계를 보여준다. 여기서 $G^* = \frac{C_{44}}{\gamma} \mathcal{Q}^2(1)$ 이다. G^* 는 물체의 조합과는 상관없이 M 의 증가에 따라 증가한다는 것을 알 수 있다.

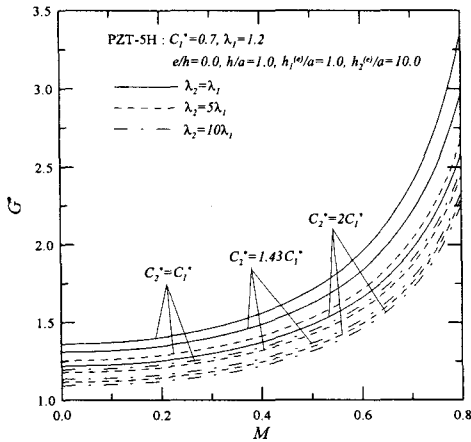


Fig. 2 G^* versus M for various material combinations

Fig. 3은 $h_1^{(e)}/a \rightarrow \infty$ 와 $h_2^{(e)}/a \rightarrow \infty$ 인 경우에서의 G^* 와 e/h 의 관계를 보여준다. λ_1 과 λ_2 가 같을 경우 G^* 는 e/h 에 대해 대칭적임을 알 수

있고, 또, G^* 의 값은 h/a 의 값이 커질수록 균열 편심량에 관계없이 거의 일정하다는 것을 알 수 있다.

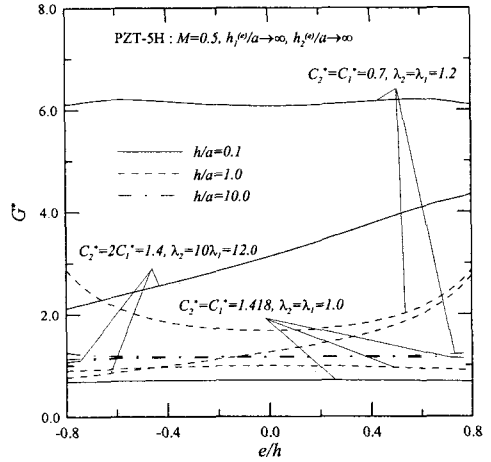


Fig. 3 G^* versus e/h

Fig. 4에서는 Graphite-Epoxy/PZT-5H/Aluminum

적층재인 경우 접합된 탄성체가 두꺼울수록 G^* 값이 작아짐을 보여준다.

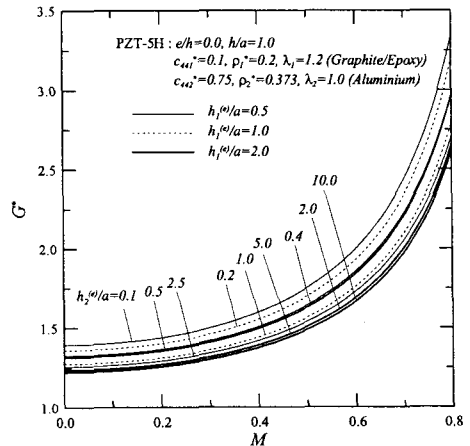


Fig. 4 G^* versus M with the variations of layer thickness

마지막으로 초기 균열진전방향을 예측하기 위하여 최대 에너지해방률 판정식(maximum ERR

criterion)을 고려하였고, 극좌표계에서 DERR을 다음과 같이 표현할 수 있다.⁽⁵⁾

$$G(v, \theta) = G(v)F(\theta), \quad (32)$$

여기서

$$F(\theta) = \frac{1}{\gamma} \left[\mu \alpha \theta^2(\theta) - \frac{e_{15}^2}{d_{11}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right], \quad (33a)$$

$$\theta(\theta) = \frac{1}{\gamma} \left[\mu \alpha R(\theta) \cos \theta \cos \frac{\theta_1}{2} + \mu R(\theta) \sin \theta \sin \frac{\theta_1}{2} - \frac{e_{15}^2}{d_{11}} \cos \frac{\theta}{2} \right], \quad (33b)$$

$$R(\theta) = 4 \sqrt{\frac{1 + \tan^2 \theta}{1 + \alpha^2 \tan^2 \theta}}, \quad (33c)$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}(\alpha \tan \theta). \quad (33d)$$

식 (33a)의 $F(\theta)$ 는 균열길이에겐 무관함을 알 수 있고, 이를 Fig. 5에 θ 에 따라 도시하였다.

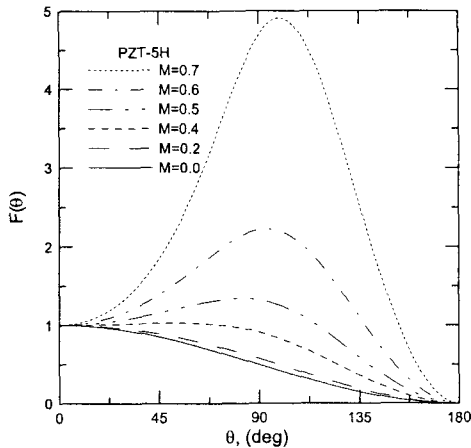


Fig. 5 $F(\theta)$ versus θ

$F(\theta)$ 의 극치값(extreme value)을 계산함으로써, 임계 Mach수, M_c 를 구할 수 있으며, PZT-5H 압전 세라믹의 경우 $M_c=0.36$ 이다. 즉, $M \leq M_c$ 일 경우, $\theta=0^\circ$ 에서 최대 DERR값을 가지므로 초기 균열진파방향은 원래 균열방향을 따라 진전될 것이라고 예측할 수 있다. 또, $M > M_c$ 일 경우에는 Fig. 5에서 알 수 있듯이, 각 Mach수에 따라

DERR을 최대가 되게 하는 각각의 분기각(branch angle), θ_b 가 존재하고 이 분기각 방향으로 균열이 진전될 것이라고 예측할 수 있다.

5. 결론

적층 구성된 직교 이방성 탄성체 사이에 접합된 압전 띠내의 Griffith 편심 균열이 기계적 면의 전단하중과 면내 전기적 하중을 복합적으로 받을 때 등속으로 전파하는 Yoffe형 문제에 대해 해석을 수행하였다. 동적 세기계수 및 동적 에너지해방률은 균열전파속도에 의존하며, 최대 에너지해방률 판정식에 의하여 분기각을 결정할 수 있었으며 초기균열 전파방향을 예측할 수 있었다. 그리고 PZT-5H 압전 세라믹 분기각의 수치적 결과를 제시하였다.

참고문헌

- (1) Shin, J.W., Lee, K.Y., 2000, "Eccentric Crack in a Piezoelectric Strip Bonded to Half Planes," *Eur. J. Mech. A/Solids* 19, 989~997.
- (2) Kwon, J.H., Lee, K.Y., Kwon, S.M., 2000, "Moving Crack in a Piezoelectric Ceramic Strip under Anti-Plane Shear Loading," *Mech. Res. Commun.* 27, 327~332.
- (3) Narita, F., Shindo, Y., Watanabe, K., 1999, "Anti-Plane Shear Crack in a Piezoelectric Layer Bonded to Dissimilar Half Spaces," *JSME Int. J. Ser. A.* 42, 66~72.
- (4) Sih, G., Chen, E.P., 1981, "Mechanics of Fracture 6, Cracks in Composite Materials," Martinus Nijhoff Publishers, The Hague.
- (5) Kwon, S.M., Lee, K.Y., 2001, "Constant Moving Crack in a Piezoelectric Block : Anti-Plane Problem," *Mech. Mater.*, in press
- (6) Freund, L.B., 1990, "Dynamic Fracture Mechanics," Cambridge Press, Cambridge.
- (7) Chen, Z.T., Yu, S.W., 1997, "Antiplane Yoffe Crack Problem in Piezoelectric Materials," *Int. J. Fract.* 84, L41~L45.