

형상최적화 향상을 위한 유한요소의 개선에 관한 연구

성진일* · 유정훈**

A Study on the Modification of a Finite Element for Improving Shape Optimization

Jinil Sung*, Jeonghoon Yoo**

Key Words : Shape Optimization(형상최적화), Finite Element Method(유한요소법), Shear Locking Phenomenon(전단고착현상), Dummy Load Method(가상하중법)

Abstract

In the shape optimization based on the finite element method, the accuracy of finite element analysis of a given structure is important to determine the final shape. In case of a bending dominant problem, finite element solutions by the full integration scheme are not reliable because of the locking phenomenon. Furthermore, in the process of shape optimization, the mesh distortion is large due to the change of the structure outline: therefore, we cannot guarantee the accurate result unless the finite element itself is accurate. We approach to more accurate shape optimization to diminish these inaccuracies by improving the existing finite element. The shape optimization using the modified finite element is applied to a two-dimensional simple beam. Results show that the modified finite element have improved the optimization results.

1. 서론

기계공학적인 문제에서, 문제가 선형이 아니거나 매우 복잡하여 이론적으로 원하고자 하는 해를 구하기 어려운 경우, 유한요소법을 이용하여 정확도가 충분한 해를 얻는 것이 가능하다.

Zienkiewicz와 Campbell 등에 의해 개발된 유한요소법(Finite Element Method)과 수치적 최적화(Numerical Optimization)를 결합한 형상최적화⁽¹⁾ 이후, 유한요소를 기반으로 한 형상최적화에 관한 많은 연구들이 진행되어 왔다^(2,3).

이러한 유한요소를 기반으로 하는 형상최적화 과

정에서 주어진 구조물에 대한 유한요소 해석(변위, 응력, 민감도 계산 등)의 정확도는 전체 최적화 과정에 영향을 미치게 되는 매우 중요한 부분이다. 특히 해석하려는 구조물이 굽힘을 지배적으로 받을 경우는 전단고착현상으로 인하여 물리적으로 아무런 의미도 없게 되는 해를 얻을 수 있으며, 비록 구조물의 최종 형상을 얻을지라도 신뢰도가 떨어지게 된다. 또한 형상최적화 과정에서 구조물 외형의 변형에 따른 유한요소의 찌그러짐으로 인하여 정확한 해석을 할 수 없게 된다.

이러한 문제점들을 해결하기 위한 방법으로 무요소법(Meshless Method)⁽⁴⁾이나 요소의 재생성을 통한 형상최적화의 수행이 주로 연구되어지고 있으나 큰 찌그러짐에도 정확한 해석을 수행할

* 회원, 연세대학교 대학원

** 회원, 연세대학교 기계전자공학부

수 있는 개선된 유한요소를 형상최적화에 접목하면 정확한 해석을 통하여 향상된 최적화를 수행할 뿐만 아니라 요소를 다시 생성해야 하는 과정을 줄일 수 있다.

본 연구에서는 구조물의 형상을 결정짓기 위해서 이러한 개선된 유한요소를 이용하여 가상하중법(Dummy Load Method)을 적용한 형상최적화를 수행한다. 최적화의 과정은 FDM(Feasible Direction Method)으로 이루어지며 체적을 최소화시키는 목적함수를 설정하여 설계에 적용시킨다.

2. 유한요소법

각 요소에 대한 강성행렬은 유한요소법에 있어서 격자모델의 해의 정확도를 결정짓는다. 이에 따라 요소강성행렬(Element Stiffness Matrix)의 정확한 계산을 위한 개선이 계속해서 연구되어 왔다. 완전적분법(Full Integration, FI)에 의한 Gaussian 적분법을 사용한 2차원 요소강성행렬의 기본식은 다음과 같다.

$$K_e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B J d\xi d\eta = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 B^T D B |_{(\xi, \eta) = (a_i, a_j)} \quad (1)$$

여기에서 D 는 $\sigma = D \epsilon$ 으로 표시되는 변형률과 응력간의 물질특성 행렬이며 B 는 $B = \partial^T N$ 로 계산되며 유한요소의 형상함수를 미분하여 얻어지는 행렬이다. 완전적분법은 안정성 및 수렴성의 보장으로 인해 폭넓게 사용되어 왔다. 그러나 요소강성행렬을 구성하기 위해 많은 연산이 필요하며, 급힘을 받는 것과 같은 제한적인 문제에 대하여 고착현상으로 인하여 해의 정확도가 떨어지게 된다.

감소적분법(Reduced Integration, RI)은 위의 완전적분법이 갖는 제한적인 문제 해결에 가장 효과적이며, 계산이 효율적이나, 요소강성행렬의 계수결손(Rank Deficiency)에 의해서 발생하는 'Hourglassing' 이라는 불안정성을 갖는다.

선별적 감소적분법>Selective Reduced Integration, SRI)은 감소적분법의 계수결손을 극복하기 위해 개발되었으며, hourglass를 제어하기 위한 부분과 결합되어, 완전적분법이 가지는 제한된 문제에

대한 근사해의 정확도를 개선하였으나 계산효율이 개선되지는 않았다.

방향적 감소적분법(Directional Reduced Integration, DRI)은 좌표계가 회전되었을 경우(요소의 회전) 선별적 감소적분법이 가지는 고착현상으로 인한 부정확한 해석을 방지하기 위하여 개발되었다.⁽⁵⁾

본 연구에서는 형상최적화의 향상을 위한 유한요소의 개량을 위하여 위의 방법에 Bubble Function(BUB) 또는 Hourglass Control(HGC)을 부가하여 유한요소 해석의 정확도를 검증하고 이에 따른 형상최적화 결과의 상호 연관성을 검토한다.

3. 형상최적화

형상최적화란 주어진 구속조건(Constraint)에 대하여 목적함수(Objective Function)를 만족시킬 수 있는 구조물의 최적의 외형 형상(outline 또는 shape)을 찾는 것이다. 여기서 사용되는 형상최적화 방법은 가상하중법을 이용하였다.^(6,7) 구조물의 형상을 정의하는 설계변수는 구조물에 적용되는 가상하중의 크기이다. 이러한 가상하중들에 의해 생기는 변위들(Natural Shape Function 또는 Velocity Field)이 초기 형상에 더하여져 새로운 형상을 얻게된다. 즉, 유한요소 해석을 통하여 절점의 위치의 변화와 설계변수사이에 다음과 같은 선형적인 관계가 성립된다.

$$G(X) = G^0 + \sum_{i=1}^{NDV} x_i q^i = G^0 + [Q]X \quad (2)$$

G^0 는 현재의 형상, X 는 설계변수, NDV 는 설계변수의 개수, $[Q]$ 는 속도장(Velocity Field) 행렬을 나타낸다.

3.1 최적화 문제의 정식화

최적화를 위한 목적함수와 구속조건을 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(x) = \sum_e v_e \\ \text{subject to} \quad & g(x) = \sigma_{vm} / (\sigma_{vm})_a - 1 \leq 0 \\ & x^L \leq x \leq x^U \end{aligned} \quad (3)$$

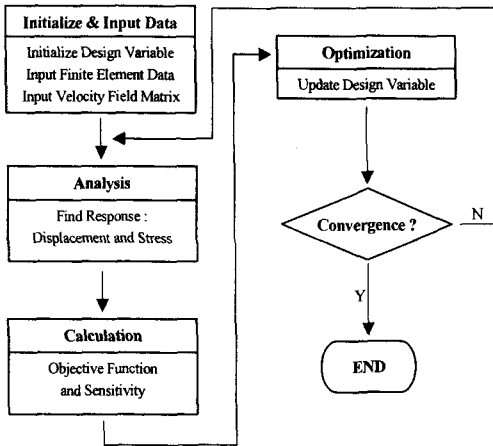


Fig. 1 Procedure of Shape Optimization

최적화의 목적 $f(x)$ 는 체적을 최소화시키는 것이며, 구속조건은 Von Mises Stress (σ_{vm})가 주어진 허용응력 ($(\sigma_{vm})_a$)을 넘지 않고, 설계변수 x 는 주어진 상·하 한치 (x^U, x^L)를 가지는 것이다.

3.2 형상최적화 절차

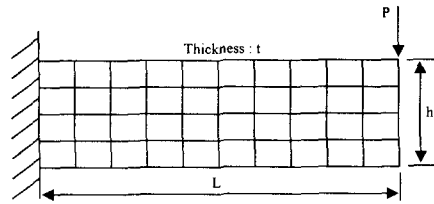
Fig. 1은 형상최적화의 기본적인 절차를 나타내고 있다. Input Data에서 속도장 행렬은 상용패키지(NASTRAN)를 이용하여 구하였으며, 실제 NASTRAN에서 사용되는 속도장과 같은 행렬을 이용함으로써 결과 비교에서 유한요소법이 최적화에 미치는 영향을 고려하였다.

4. 수치해석 예

4.1 유한요소의 검증

먼저, 간단한 형상의 구조물을 이용하여 요소의 종횡비(width/height 또는 aspect ratio)에 대한 해석의 정확도를 각 유한요소별로 비교하여 본다.

Fig. 2는 일정한 두께 t 를 가지며 굽힘 하중 P 를 지지하고 있는 2차원 보(beam)에 대해서 요소의 개수를 일정하게 하며 (10×4), 종횡비의



E	ν	P	t	L	h
$10 \times 10^6 \text{ psi}$	0.3	60 lb	0.1 in	10 in	2 in

Fig. 2 Analysis Model

변화 (h 값 변화)와 사용된 유한요소수에 따른 결과의 변화를 검토한다. 위의 모델을 이용하여 각각의 유한요소법에 대하여 해석한 결과를 Table 1과 Fig. 3에 나타내었다. 해석 결과로부터 방향적 감소적분법에 hourglass를 제어할 수 있는 부

종류 w/h	SRI	SRI+BUB	DRI	DRI+BUB	DRI+HGC	NASTRAN	이론해
2	0.030511 (1.703%)	0.030707 (2.357%)	0.030499 (1.663%)	0.030705 (2.350%)	0.030747 (2.490%)	0.030707 (2.357%)	0.03
8	1.8929 (1.411%)	1.9051 (0.776%)	1.8928 (1.417%)	1.9045 (0.807%)	1.9052 (0.771%)	1.9051 (0.776%)	1.92
32	120.93 (1.587%)	121.71 (0.952%)	120.93 (1.587%)	121.67 (0.985%)	121.83 (0.854%)	121.71 (0.952%)	122.88
80	1889.4 (1.594%)	1901.6 (0.958%)	1889.4 (1.594%)	1901.0 (0.990%)	1903.5 (0.859%)	1901.6 (0.958%)	1920
200	29522 (1.593%)	29708 (0.973%)	29519 (1.603%)	29701 (0.997%)	29741 (0.863%)	29707 (0.977%)	30000
500	458320 (2.225%)	461950 (1.451%)	460170 (1.830%)	460630 (1.732%)	464150 (0.981%)	463470 (1.126%)	468750
800	1.7595E6 (8.354%)	1.7570E6 (8.490%)	1.7776E6 (7.417%)	1.8553E6 (3.370%)	1.9413E6 (1.109%)	1.8627E6 (2.984%)	1.92E6

* ()안은 에러율을 표시

Table 1. Analysis results

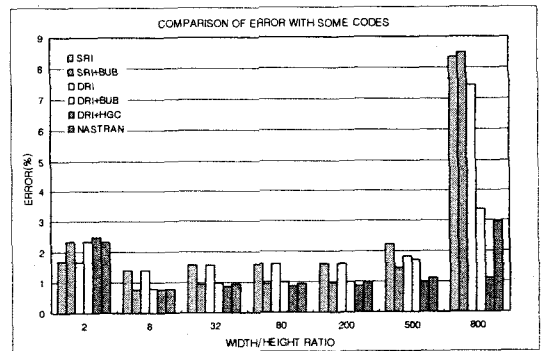


Fig. 3 Comparison of error with some codes

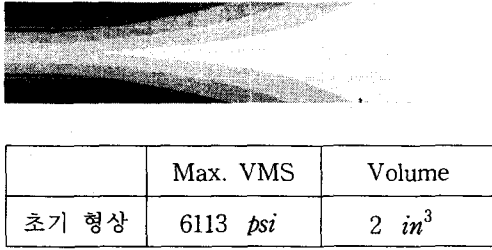


Fig. 4 Von Mises Stress of Initial Model

분을 넣은 유한요소 해석이 전반적으로 가장 정확도가 높음을 알 수 있다.

4.2 형상최적화의 수치해석 예

Fig. 1에 표시된 모델에 대하여 형상최적화를 수행한다. NASTRAN을 이용하여 초기형상에 대한 해석을 수행하여 해석에 필요한 초기 값들을 구하고 이 값들을 이용하여 주어진 최대 허용응력을 구속조건으로 하는 형상최적화를 수행한다.

최종형상	SRI	SRI+BUB	DRI	DRI+BUB	DRI+HGC	NAS
Volume (감소율%)	1.21318 (39.341)	1.21784 (39.108)	1.21317 (39.342)	1.21485 (39.258)	1.22063 (38.698)	1.21581 (39.210)
해석(NAS)	10097	99287	10097	10035	96394	

(a) $(\sigma_{vm})_a = 10000$ psi

최종형상	SRI	SRI+BUB	DRI	DRI+BUB	DRI+HGC	NAS
Volume (감소율%)	1.04185 (47.908)	1.04899 (47.551)	1.04185 (47.908)	1.04225 (47.888)	1.04910 (47.545)	?
해석(NAS)	15279	14726	15280	15184	14789	

(b) $(\sigma_{vm})_a = 30000$ psi

최종형상	SRI	SRI+BUB	DRI	DRI+BUB	DRI+HGC	NAS
Volume (감소율%)	X	1.02431 (48.784)	X	X	1.02804 (48.598)	?
해석(NAS)		46842			43585	

(c) $(\sigma_{vm})_a = 45000$ psi

최종형상	SRI	SRI+BUB	DRI	DRI+BUB	DRI+HGC	NAS
Volume (감소율%)	X	X	X	X	1.02335 (48.833)	?
해석(NAS)					48255	

(d) $(\sigma_{vm})_a = 50000$ psi

Table 2. Results of shape optimization for 10x4 model

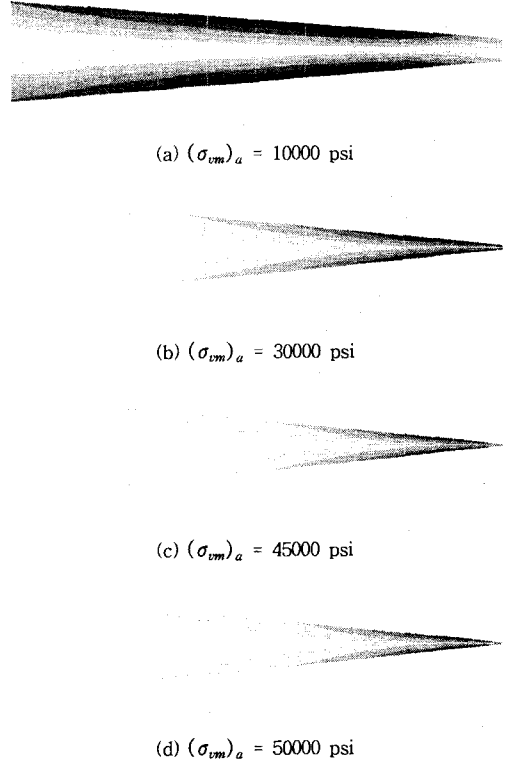


Fig. 5 Optimal shape and stress distribution

Table 2와 Fig. 5는 각 구속조건에 대해 각 방법에 따른 결과와 최종형상을 보여준다. Fig. 5에 표시된 최종형상은 DRI+HGC에 계산된 유한요소를 이용하여 얻어진 형상이며 진하게 표시될 수록 큰 응력을 나타낸다. 위의 표들에서 '해석(NAS)'는 각 경우에서 최종형상을 NASTRAN으로 해석하여 얻어진 가장 큰 Von Mises Stress

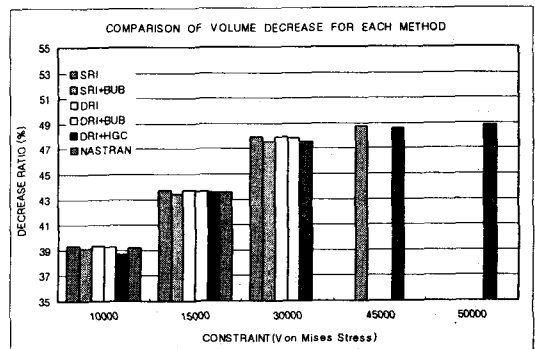


Fig. 6 Comparison of volume decrease for each method

최종형상	SRI	SRI+BUB	DRI	DRI+BUB	DRI+HGC	NAS
Volume (감소율%)	1.04632 (47.684)	1.04780 (47.600)	1.04632 (47.684)	1.04642 (47.679)	1.04896 (47.552)	?
해석(NAS)	45834	44565	45834	45754	43585	

(a) $(\sigma_{vm})_a = 45000$ psi

최종형상	SRI	SRI+BUB	DRI	DRI+BUB	DRI+HGC	NAS
Volume (감소율%)	X	X	X	X	1.04510 (47.745)	?
해석(NAS)					46794	

(b) $(\sigma_{vm})_a = 50000$ psi

Table 3. Results of shape optimization for 20x8 model

값들이며 'X' 나 '?'는 요소나 상용코드의 한계로 인해 결과를 얻지 못함을 표시한다. Fig. 6는 위의 결과들에서 체적감소율을 도표로 나타내었다.

사용된 유한요소에 따른 각 구속조건에 대한 체적감소율을 비교하면 1%도 차이가 나지 않음을 볼 수 있다. 그러나 구속조건인 Von Mises Stress 값을 증가시킴에 따라 최종형상을 얻기 위해서는 더 많은 요소의 찌그러짐이 필요하며, 이에 따라 총횡비가 큰 요소에 대한 유한요소의 정확도가 형상최적화의 결과에 큰 영향을 미침을 볼 수 있다. 즉, 4.1절의 결과와 비교하여 보았을 때, 정확도가 우수한 유한요소를 사용할 경우에 형상최적화 과정에서도 좋은 결과를 가짐을 알 수 있다.

Table 3은 요소의 개수를 증가시켜(20×8)시켜 형상최적화를 수행한 결과를 나타낸다. 단, 모든 재원 및 조건은 위의 경우(10×4)와 동일하다. 요소의 개수를 증가시켰을 경우와 요소의 개수가 적을 때를 비교하면, 구속조건이 45000 psi에서도 모든 유한요소가 해석 결과를 보여주고 있다. 비록 최종결과의 해석에 오차는 있으나, 요소 개수의 증가로 인하여 요소의 찌그러짐이 감소함으로써 해석이 가능함을 볼 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 형상최적화의 결과에 영향을 미치는 여러 가지 요인 중에서, 유한요소의 정확성이 형상최적화에서 차지하고 있는 중요성을 확인하였다. 유한요소를 개선하여 급힘을 받는 구조물에 대해 전단고착현상으로 인한 해석의 부정확

도를 감소하였으며, 이에 따른 형상변화에 따른 요소의 찌그러짐에 대한 해석정확도를 개선함으로써 형상최적화 결과의 향상을 확인할 수 있었다.

후 기

본 연구는 2001년 산학연 컨소시엄 사업의 지원에 의해 이루어진 것으로서, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

- (1) Zienkiewicz, O. C. and Campbell, J. S., 1973, "Shape Optimization and Sequential Linear Programming," *John Wiley & Sons, New York*, pp. 109-126.
- (2) Haftka, R. T. and Grandhi, R. V., 1986, "Structure Shape Optimization-A Survey," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 91-106.
- (3) Ding, Y., 1986, "Shape Optimization of Structures : A Literature Survey," *Computers & Structures*, Vol. 24, pp. 985-1004.
- (4) Kim, N. H., Choi, K. K., and Chen, J. S., 2000, "Meshless Shape Design Sensitivity Analysis and Optimization for Contact Problem with Friction," *Computational Mechanics*, Vol. 25, No. 2/3, pp. 157-168.
- (5) Koh, B. C, and Kikuchi, N., 1987, " New Improved hourglass control for bilinear and trilinear elements in anisotropic linear elasticity," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 65, pp. 1-46.
- (6) Belegundu, A. D. and Rajan, S. D., 1988, " A Shape Optimization Approach Based on Natural Design Variables and Shape Functions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 66, pp. 87-106.
- (7) Zhnag, S. and Belegundu, A. D., 1992, " A Systematic Approach for Generating Velocity Fields in Shape Optimization," *Structure Optimization*, Vol. 5, pp. 84-94.