

인벌류트 커브와 트로코이드 필렛 커브의 자동생성에 관한 연구

김민주*, 박진형*, 김태호*, 이승수*, 전언찬**

A study on Auto-drawing for Involute Curve and Trochoidal fillet curve

M. J. Kim*, J. H. Prak*, T. H. Kim*, S. S. Lee*, E. C. Jeon**

Key Words: Camus's theory(카뮈의 정리), Involute curve(인벌류트 곡선), Trochoidal fillet curve(트로코이드 필렛 곡선), Interference(간섭)

Abstract

Gear is general mechanical elements that used for power transmission between two shafts that interval is comparatively short, and it delivers big power as accurate ratio of speed.

The profile of Spur gear which is the most basic factor is divided into Trochoidal fillet curve and Involute curve. Involute curve is used a lot of a shaped curve of machine parts such as a gear, a scroll compressor and a collar of centrifugal pump.

However, It is poor to study the modeling of Trochoidal fillet curve and the three dimensions model shaped mathematical curve.

This paper describes a mathematical model of profile shifted involute gear, and this model is based on Camus's theory. We draw three dimensions gear have accurate mathematical function using ADS, VisualLISP, and To check accuracy and perfection, we make a program of checking Interference, and use for this study.

기호설명

- α : 압력각 (Pressure angle)
- m : 모듈 (Module)
- C : 클리어런스 (Clearance)
- R_a : 이끝원의 반지름
- R_d : 이뿌리원의 반지름
- R_e : 유효 이뿌리원의 반지름
- R_p : 피치원의 반지름

1. 서 론

현재 많은 생산 현장에 도입되어 사용되는 CAD/CAM시스템은 3차원 모델을 사용한다. 이러한 3차원 모델은 CAD, MDT 및 CATIA, 그리고 Solid edge등에서 제공된다.

다양한 모델러를 이용한 3D 모델링은 모델링 시간의 과다, 이를 수행하는 전문인력의 부재 등의 문제점을 안고 있다. 이를 해결하기 위한 방법의 일환으로 최근 ADS(Automatic drawing system)가 각광받고 있다. ADS는 설계에 필요한 몇 가지 요소를 DCL창에서 입력받아 2차원 및 3차원 모델을 생성하는 프로그램의 통칭으로, 일반적으로 CAD나 MDT기반의 VisualLISP이 주로 사용된다. 그리고 ADS는 3D 모델링 전문가가 아니더라도 기계공학적인 지식을 가진 유저(User)라면 누구나 쉽게 사용할 수 있는 장점을 가지고 있다. 그리고 ADS 라이브러리(Library)를 구축함으로써 모델의 디스플레이 및 NC-code 생성에 의한

* 동아대학교 대학원 기계공학과

** 동아대학교 기계·산업시스템 공학부

가공, 비용계산과 같은 포괄적인 작업이 가능하다. 이러한 ADS에 관한 연구는 국내외에서 활발히 이루어지고 있다.1,2,3) 하지만 3차원 자동 모델링 및 복잡한 요소들의 모델링에 대한 연구는 아직 미흡한 실정으로 대표적 기계요소인 기어의 자동 모델링은 완벽히 구현되지 않고 있다.

기어는 동력전달의 한 방법으로서 큰 힘을 정확한 속도비로 전달할 수 있어 비교적 축간 거리가 작은 두 축사이의 동력전달에 널리 사용되고 있다. 최근에는 소비자의 요구에 맞추어 제품이 소형화, 정밀화되는 추세에 있으며, 이러한 과정에서 소형으로서 큰힘의 전달이 가능한 기어전동이 보다 중요한 동력전달 수단이 되고 있다.

기어중에서도 가장 기초가 되는 스퍼기어(Spur gear)의 형상곡선(Profile)은 크게 인벌류트 곡선(Involute curve)과 트로코이드 필렛곡선(Trochoidal fillet curve)으로 구분할 수 있는데, 인벌류트 곡선은 기어를 비롯하여 스크롤 압축기, 원심펌프의 안내 깃 등 기계부품의 형상곡선에 많이 사용되어지고 있으며4,5,6), 기어의 인벌류트 곡선에 대한 연구는 국내외에서 많이 진행되고 있다.7,8,9) 하지만 수학적으로 규명된 인벌류트 곡선을 이용하여 3차원 기어 형상곡선을 모델링 하는 연구 및 트로코이드 필렛곡선의 모델링에 관한 연구는 미흡한 실정이다.

따라서 본 연구에서는 수학적인 알고리즘을 이용하여 기어의 형상곡선인 인벌류트 곡선과 트로코이드 필렛 곡선을 자동-모델링하는 프로그램을 작성하여 와이어 컷이나 레이저 컷 및 창성법에 응용할 수 있는 3차원 기어 모델을 완성하고자 한다. 그리고 모델링의 완성도 및 정확도를 확인하기 위하여 간섭체크 프로그램을 개발하여 본 연구에 적용하고자 한다.

2. VisualLISP을 이용한 자동설계(ADS)

ADS를 구현하는 프로그램을 작성하기 위하여 CAD를 기반으로 하는 프로그램 언어인 VisualLISP을 사용하였다. Fig.1은 VisualLISP을 사용하여 가스킷과 플랜지 커플링 및 라쳇 휠을 자동설계할 수 있도록 한 프로그램과 그 결과를 나타낸 것이다. Fig. 1에서 보느냐와 같이 대화상자(DCL)안에 있는 몇 가지 수치를 사용자가 입력함으로써 간단하게 3D 모델을 얻을 수 있다. 그

리고 가스킷, 플랜지 커플링과 라쳇 휠을 설계하는데 사용되는 요소는 내경, 외경 및 두께 등이다.

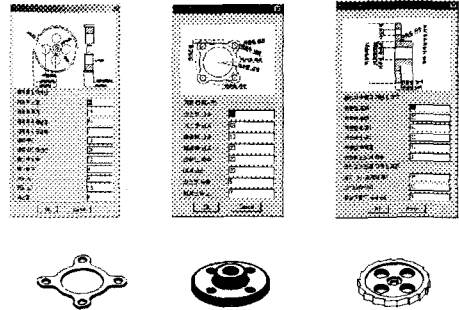


Fig. 1 A Gasket, Flange coupling and Ratchet wheel modeling using visualLISP

Fig. 1에 나타난 요소들은 각각의 실행 프로그램을 가진다. 이를 조합하여 자동설계 라이브러리를 구축함으로써 신속한 모델링 작업 및 NC-code 생성에 의한 가공, 비용계산과 같은 포괄적인 작업이 가능하다. 하지만 이는 지속적이고, 장기적인 작업을 필요로 하며, 본 연구에서는 간단한 모델의 라이브러리 구축이 아닌 복잡한 형상의 모델링을 선행적으로 연구하여 라이브러리 구축에 필요한 기술력을 배양하고자 한다.

3. 기어의 설계 방법

3. 1 스퍼기어의 치형

기어의 치형은 모듈과 압력각 그리고 백래쉬 및 클리어런스 등으로 구성되며, 이러한 값들을 자동설계 프로그램에서는 유저가 선정하는 입력 값으로 한다.

KS규격에서는 압력각을 14.5° 와 20° 로 선정하고 있으며, ISO에서는 KS규격에 25° 를 추가적으로 규정하고 있다.

일반적으로 인벌류트 치형을 갖는 기어의 경우에는 압력각과 치의 크기, 즉 모듈이 같아야 상호운동이 가능하다. 그리고 치형 곡선을 생성하기 위한 기구학적 조건은 2개의 기어가 모든 물림위치에서 일정한 각속도비를 가져야 한다는 것이다. 이러한 조건을 만족하기 위하여 맞물려 들

아가는 두 이의 접촉면사이에 접선방향의 속도차이는 있어도 되지만(접선방향의 속도차는 두 치면 사이의 미끄럼으로 나타남), 법선 방향의 속도가 같아야 한다. 치면에 대해 법선방향의 속도차이가 있다면 두 치면이 서로 떨어지게 되거나 한 개의 치면이 다른 쪽 치면을 파고 들어간다는 것을 의미한다. 따라서 두 접촉면에 대한 법선방향의 속도가 일정하게 유지되어야 한다.

이러한 사항을 구체적으로 Fig. 2에 나타내었다.

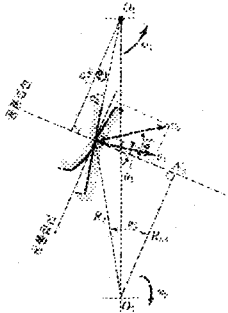


Fig. 2 Necessary condition of Involute curve

두 기어의 법선방향의 속도는 같아야 되므로

$$v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2 \quad (1)$$

속도는 회전 반지름과 회전각속도의 곱으로 표현한다.

$$v_1 = R_1 \omega_1 \quad (2)$$

$$v_2 = R_2 \omega_2 \quad (3)$$

식 (2), (3)을 식 (1)에 대입하여 두 기어간의 각속도비를 구하면 식 (4)와 같다.

$$\epsilon = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1 \cos \alpha_1}{R_2 \cos \alpha_2} \quad (4)$$

두 직각 삼각형 $\triangle O_1N_1P$ 와 $\triangle O_2N_2P$ 에서 닮은꼴의 원리를 이용하면

$$\epsilon = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1 \cos \alpha_1}{R_2 \cos \alpha_2} = \frac{R_{b1}}{R_{b2}} \quad (5)$$

식 (5)로부터 알 수 있는 바와 같이 치면에 대해 법선방향의 속도가 같으면서 일정한 각속도비를 갖기 위해서는 두 기어의 접촉점에서 치

면에 수직인 법선이 하나의 일정한 점을 통과하여야 한다. 이러한 점을 피치점이라고 하고, 기어 중심으로부터 피치점까지의 반경을 피치원이라고 한다.

이상의 내용을 함축적으로 정리한 것이 카뮈의 정리(Theory of Camus)로서 '맞물려 돌아가는 한 쌍의 기어가 일정한 각속도비를 가지고 회전하려면 접촉점에서의 공통법선은 일정한 점을 통과해야 한다. 역으로 접촉점에서의 법선이 일정한 점을 통과하는 곡선은 치형곡선으로 된다' 라는 것이다.

3. 2 인벌류트 곡선의 수학적 알고리즘

Fig. 3에서 보는바와 같이 기초원 역할을 하는 원통에 감겨져 있는 실을 팽팽하게 잡아 당기면서 점 P에서 점 P'까지 풀어갈 때 실의 한 점이 그리는 궤적이 인벌류트 곡선이다. 원통면을 기초원이라고 하고 인벌류트 곡선을 따라 형성된 이가 인벌류트 치형이다.

실을 푼 후 실의 길이 $\overline{PB'}$ 는 실을 풀기 전에 기초원에 감겨져 있었던 실의 길이인 원호 \overline{PB} 와 같다.

$$R_b(\varphi + \alpha) = R_b \tan \alpha \quad (6)$$

위의 식 (6)을 정리하면 다음과 관계식을 얻는다. 각 ϕ 를 공구 압력각(α)의 인벌류트 함수라고 하며 $inv \alpha$ 로 표시한다. 따라서

$$\varphi = inv \alpha = \tan \alpha - \alpha \quad (7)$$

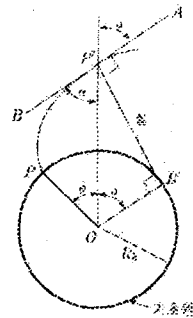


Fig. 3 Involute function

Fig. 4에서 보는바와 같이 이의 접촉점에서 세운 공통법선은 서로 만나며 피치점을 지나게 되므로 카뮈의 정리를 만족한다. 결국 인볼류트 치형을 갖는 기어는 압력각 및 치의 크기가 같아야 한다는 것을 알 수 있다

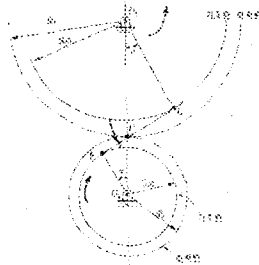


Fig. 4 Principle of action for Involute curve

Fig. 5에서 기초원(R_b)를 중심으로 실이 풀려나갈 때 곡선의 한 점이 그리는 좌표는

$\angle POQ$ 를 α , $\angle O'OP$ 를 ψ 라고 할때

$$\begin{aligned} x &= \overline{O'P}_x = \overline{OP}_x - \overline{OO'}_x \\ &= \overline{OQ}_x - \overline{PQ}\sin(\psi + \alpha) (\angle PQS = \psi + \alpha) \\ &= \overline{OQ}_x - O'Q\cos(\psi + \alpha) \\ &= R_b\sin(\psi + \alpha) - R_b(\psi + \alpha)\cos(\psi + \alpha) \\ y &= \overline{O'P}_y = \overline{OP}_y - \overline{OO'}_y \\ &= \overline{OQ}_y + \overline{PQ}_y - \overline{OO'}_y \\ &= \overline{OQ}_y + \overline{PQ}\sin(\psi + \alpha) - \overline{OO'}_y \\ &= \overline{OQ}_y + O'Q\sin(\psi + \alpha) - \overline{OO'}_y \\ &= R_b\cos(\psi + \alpha) + R_b(\psi + \alpha)\sin(\psi + \alpha) - R_b \end{aligned}$$

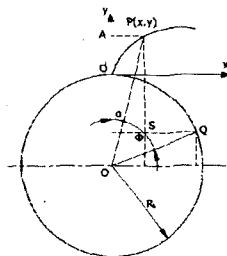


Fig. 5 Coordinate of Involute tooth

따라서 점 P의 (x, y)의 좌표는 식(8)과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} x &= R_b\sin(\psi + \alpha) - R_b(\psi + \alpha)\cos(\psi + \alpha) \\ y &= R_b\cos(\psi + \alpha) + R_b(\psi + \alpha)\sin(\psi + \alpha) - R_b \end{aligned} \quad (8)$$

3. 3 트로코이드 필렛 곡선의 수학적 알고리즘

트로코이드 필렛 곡선은 정확한 계산식이라기 보다는 근사식에 가깝다. 호브에 따라서 그 곡선의 형상이 달라지므로 트로코이드 필렛 곡선을 계산하기 위해서는 공구의 제원을 알고 있어야 한다.

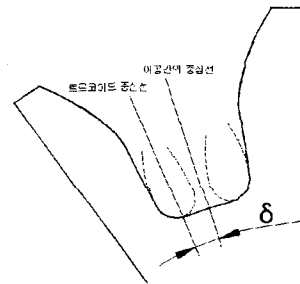


Fig. 6 Trochoidal fillet curve

Fig. 6에서 랙의 중심선과 이 끝 등글기의 중심선과의 거리를 B라 두고, 호브의 이 끝 등글기를 A, 그리고 트로코이드 반지름은 R_f 라고 하면

실제 필렛의 임의 점까지의 반경은

$$R_f = \sqrt{R_t^2 + A^2 - 2AR_t\sin(\varphi_t)} \quad (9)$$

이다.

여기서 실제 필렛되는 각도는

$$\theta_f = \theta_t + \cos^{-1}\left(\frac{R_t - A\sin(\varphi_t)}{R_f}\right) \quad (10)$$

식 (10)을 직교 좌표로 나타내면 식 (13)과 같다.

먼저 기준 중심선과 필렛의 벡터 각을 살펴

보면

$$\ddot{\theta}_f = \delta + \theta_f \quad (11)$$

여기서 δ 는 이의 중심선 혹은 이 공간과 트로코이드의 원점이 이루는 각도를 나타내며 이의 중심점이 Y라고 할 때

$$\delta = [\frac{p}{2} - B]/2 \quad (12)$$

p : Circular pitch of gear

라 정의한다.

결국, 필렛의 직교좌표는

$$\begin{aligned} X_f &= R_f \sin(\ddot{\theta}_f) \\ Y_f &= R_f \cos(\ddot{\theta}_f) \end{aligned} \quad (13)$$

3. 4 스퍼기어 자동설계 프로그램

위에서 언급된 스퍼기어 치형, 인벌류트 곡선 및 트로코이드 필렛 곡선의 수학적 알고리즘을 이용하여 3차원 스퍼기어 모델을 자동생성하는 프로그램을 작성하였다. 이 프로그램은 CAD기반의 프로그램 언어인 VisualLISP을 사용하여 작성하였는데 Fig. 7에 제원을 입력받을 대화상자를 나타내었다.

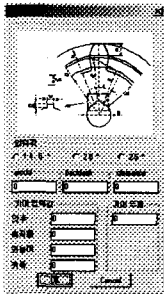


Fig. 7 Dialog box of gear

대화상자에서 보는 바와 같이 스퍼기어의 3차원 모델링에 필요한 요소들은 다음과 같다.

- 1) 압력각
- 2) 모듈(치의 크기)
- 3) 백래쉬
- 4) 클리어런스
- 5) 이의 두께
- 6) 중심 축의 크기 및 키 홈의 규격
- 7) 톨의 제원

사용자가 입력한 데이터를 토대로 모델링되며, 그 결과를 Fig. 8에 나타내었다. 그림상의 (a)와 (b)는 모듈은 같고, 잇수가 다른 모델링의 결과를 나타낸 것이다. 사용자가 'OK'버튼을 클릭한 후 모델링까지 걸리는 시간은 10초이내이며, 자동설계 프로그램의 최대 장점인 모델링 시간단축의 단적인 예를 나타낸다.

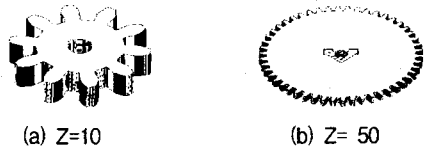


Fig. 8 Modelling of Spur gear using VisualLISP

4. 기어의 간섭체크 프로그래밍

4. 1 스퍼기어 모델링의 검증 알고리즘

자동설계 프로그램을 이용한 스퍼기어의 모델링을 Fig. 8에서 나타내었다. 그리고 스퍼기어 모델링의 정확성을 검증하기 위하여 치의 간섭을 확인할 필요성이 있다.

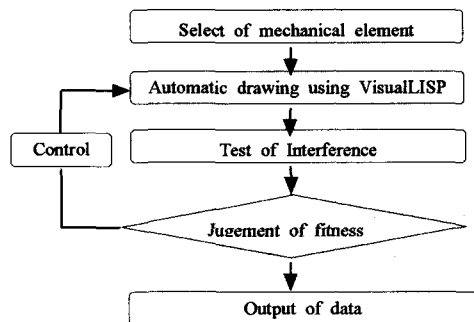


Fig. 9. Algorithm of modeling test for spur gear

Fig. 9는 기어 간섭을 검증하는 프로그램을 이용하여 기어 모델링의 정확성을 확인하고, 간섭 현상이나 치면의 분리현상이 나타날 때 자동 설계 프로그램으로 정보를 피드백하여 이를 수정할 수 있는 알고리즘을 나타내었다.

4. 2 기어 간섭 프로그래밍

기어 모델링을 검증하기 위한 기어 간섭 프로그램은 각각 임의의 잇수를 가진 기어를 두 개 그리고, 두 개의 기어가 서로 맞물리도록 Fig. 10의 대화상자에 있는 그림과 같이 배열 한다. 그리고 첫 번째 기어를 회전하면서 두 번째 기어가 따라갈 수 있도록 프로그래밍 하였다.

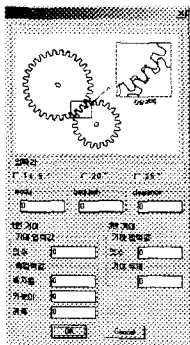


Fig 10. Dialog box of Interference check

기어의 중심을 동일 선상에 정렬하고, 피치원이 만나는 점에서 접촉하는 것으로 설정하였다. 그리고 회전방향은 접촉, 반대 방향은 비 접촉을 유지하여 실제 백래쉬에 의한 영향을 고려하여 프로그래밍하였다.

각각의 두 기어 중심간의 거리는 두 피치원의 반지름의 합이므로

$$\text{두기어간의거리} = \frac{1}{2} (z_1 + z_2)m \quad (14)$$

그리고 기어의 회전각은 기어의 잇수에 따라서 물리는 이빨의 회전각이 달라진다. 따라서

첫 번째기어가 x° 만큼 회전하였을 경우 두 번째 기어의 회전각은

$$y^\circ = x^\circ \times \frac{z_1}{z_2} \quad (15)$$

로 나타낼 수 있다. 즉 잇수가 많은 기어는 적은 각도를 회전하지만 잇수가 적은 기어는 많이 회전하게 된다는 것이다.

이를 기초로 하여 첫 번째 기어의 중심을 기준으로 90° 회전시키고, 그 사이를 1° 간격으로 나누어 기어가 회전하면서 생기는 간섭부위를 AutoCAD상의 Interfere 명령으로 3차원 모델링하고, 이를 디스플레이 하도록 프로그래밍하였다.

그리고 Fig. 11에 기어 간섭을 수행하는 과정을 나타내었다. 자동 설계 프로그램에서 만들어진 모델을 간섭 체크해 본 결과 치면을 파고 들어가는 언더 컷이나 치면의 분리현상이 전혀 발생하지 않았다. 이는 AutoCAD 상의 Interfere라는 명령으로 생성된 아무런 요소가 없는 것에서 확인할 수 있다. 따라서 3차원 자동설계 프로그램의 신뢰성을 확인할 수 있었다.

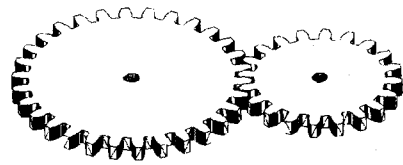


Fig 11. Process of Interference check for spur gear

5. 결 론

본 연구에서 수학적 알고리즘을 이용한 프로그램 개발과 모델링 및 이의 검증을 위한 프로그램을 개발 적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) AutoCAD상의 프로그램 언어인 VisualLISP을 이용하여 수학적 알고리즘에 기초한 3차원 기어 모델을 자동생성하는 프로그램을 개발하였다.

2) 기어 모델링 프로그램을 ADS Library에 추가함으로써 산업 전반에 활용할 수 있는 가능성을 제시하였다.

3) 기어 간섭체크 프로그램을 이용하여 기어 모델의 정확성 및 신뢰성을 확인하였다.

참 고 문 헌

- (1) 김영남, 이성수, 2000, "Visual-LISP을 이용한 마스터기어 자동설계 프로그램 개발", 한국공작기계학회 추계학술대회 논문집, pp.169-174
- (2) 조종규, 김종석, 2000, "Auto-LISP을 이용한 기어설계 프로그램 개발에 관한 연구", 한국공작기계학회 추계학술대회 논문집, pp.422-427
- (3) M. S. Tavakoli and D. R. Houser, 1986, "Optimum Profile Modifications for the Minimization of Static Transmission Errors of Spur Gears", *Journad of Mechanism in Design*, MARCH, Vol. 108, pp. 86-95
- (4) Colbourne, J. R., 1987, "The Geometry of Involute Gears", *SPringer-Verlag*, Woodbine, New Jersey, pp. 24~50
- (5) Hirano, T., Hagimoto, K., Maeda, M., 1990, "Scroll Profiles for Scroll Fluid Machines", *Mitsubishi Heavy Industries Ltd. Technical Review*, Vol. 27, No. 1, pp. 35~41
- (6) 응용기계설계연구회, 1981 "응용기계설계 2-펌프(송풍기편)", 동명사, pp. 24~27
- (7) 이성철, 권오관, 1995, "NC가공을 위한 인볼류트 곡선의 원호 근사화에 대한 연구", *대한기계학회논문집*, Vol. 19, No. 10, pp. 2475~2483
- (8) 한홍삼, 최종근, 이동주, 1999, "자유곡선 기어의 창성 알고리즘에 관한 연구", *한국공작기계학회지*, Vol. 8, No. 5, pp. 96~101
- (9) Faydor L. Litvin, 1994, "Gear Geometry and Applied Theory", *University of Illinois at Chicago*