

웨이블릿 신경 회로망을 이용한 혼돈 비선형 시스템의 모델링

\*박상우 \*최종태 \*\*윤태성 \*박진배 \*\*\*최윤호  
 \*연세대학교 전기전자공학과 \*\*창원대학교 전기공학과 \*\*\*경기대학교 전자공학과

The Modeling of Chaotic Nonlinear Systems Using Wavelet Neural Networks

\*Sang Woo Park \*Jong Tae Choi \*\*Tae Sung Yoon \*Jin Bae Park \*\*\*Yoon Ho Choi  
 \*Dept. of Electrical & Electronic Engineering, Yonsei Univ.  
 \*\*Dept. of Electrical & Electronic Engineering, Changwon Univ.  
 \*\*\*Dept. of Electronic Engineering, Kyunggi Univ.

**Abstract** - In this paper, we propose the modeling of a chaotic nonlinear system using wavelet neural networks. In our modeling, we used the parameter adjusting method as the training method of a wavelet neural network. The difference between the actual output of a nonlinear chaotic system and that of a wavelet neural network adjusts the parameters of a wavelet neural network using the gradient-descent method. To verify the efficiency of this paper, we perform the simulation using Duffing system, which is a representative continuous time chaotic nonlinear system.

1. 서 론

비선형 동역학 시스템에서 발생하는 혼돈(Chaos) 현상은 시스템의 상태 변수들 간의 비선형적 관계를 가지거나 내부적으로 결정론적 규칙을 가지는 현상으로서, 일반적으로 초기 조건에 민감하고 비주기적일 뿐만 아니라 예측 불가능한 특성을 갖기때문에 이러한 혼돈현상을 제어하고자 하는 연구들이 진행되고 있다[1]. 혼돈현상에 대한 기존의 제어 방법들(2,3,4)은 주로 정확한 시스템 모델이나 비선형 방정식을 필요로 하므로 실제 물리적으로 정확한 모델을 알 수 없는 혼돈 시스템에 대하여 적용이 어렵고 시스템의 구조를 선형화 하거나 변형하기 때문에 혼돈 특성을 정확히 고려하지 못한다는 단점이 있다. 따라서 이러한 한계를 극복하기 위하여 퍼지 제어나 신경 회로망 같은 지능 제어 기법이 사용된다[5,6]. 인간의 신경 계통을 모방한 신경 회로망은 수학적으로 명확하게 정의되지 않은 시스템을 학습 알고리즘을 통하여 모델링 및 제어를 할 수 있다는 장점을 갖고 있다. 하지만 신경 회로망 학습시 많은 시간이 요구되며, 학습하는 동안 국부 최솥치(local minima)에 빠질 수 있다는 단점을 가지고 있다. 본 논문은 이러한 단점에 대한 해결 방안으로 주파수와 시간 영역에서의 우수한 해석을 가지는 웨이블릿과 뛰어난 학습능력을 갖고있는 신경회로망을 결합한 웨이블릿 신경 회로망을 이용한 혼돈 비선형 시스템의 모델링 방법을 제안한다. 또한 모델링 방법을 대표적인 연속 시간 혼돈 비선형 시스템인 Duffing 시스템에 적용하여 본 논문에서 제안한 방법의 우수성을 검증한다.

2. 웨이블릿 신경 회로망

웨이블릿 이론은 최초 다중분해 해석 분야에서 제안되었으며, 이는 주로 영상과 신호처리의 분야에서 많이 적용, 발전되었다. 일반적으로 웨이블릿은 모체 웨이블릿(mother wavelet)에 대한 변형 인자(translation)  $m$ 과 확장 인자(dilation)

$d$ 로 구성되어 있다.

웨이블릿 신경 회로망에서 웨이블릿 함수를 결정하는 몇가지 방법이 있다. 첫 번째 방법은 직교(orthogonal) 웨이블릿 분해 이론으로부터 적절한 모체 웨이블릿을 선택하고 이때 결정되는  $m, d$ 를 고정으로 두고 단지 웨이블릿 노드와 출력 노드 사이의 가중치만을 학습하여 갱신하는 방법[7]이 있다. 또 다른 방법으로는 데이터의 공간주파수 해석 방식에 따라 결정된  $m, d$ 를 가지고 웨이블릿 노드와 출력 노드간의 가중치를 학습, 갱신하는 방법으로, 이것은 웨이블릿 집합이 앞서 말한 방식처럼 반드시 직교성을 가질 필요는 없다[8]. 마지막 방법은  $m, d$ 를 임의의 실수로 두고 웨이블릿 노드와 출력 노드간의 가중치 학습시  $m, d$ 를 동시에 학습, 갱신 시키는 방법이 있다. 본 논문에서는 마지막 방법을 이용하여 모델링의 방법을 기술한다.

2.1 웨이블릿 신경 회로망의 구조

그림 1은  $N_i$ 개의 입력, 하나의 출력과 웨이블릿 층으로 구성된 웨이블릿 신경 회로망의 구조를 나타낸다.

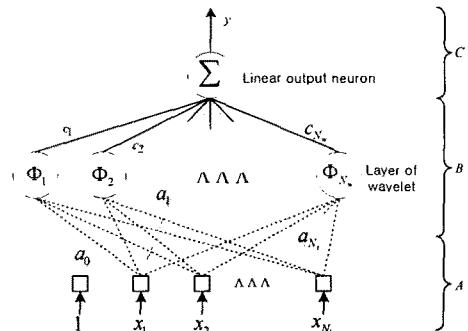


그림 1. 전방경로 웨이블릿 신경 회로망의 구조

그림 1에서 A층은 웨이블릿 신경 회로망의 입력을 나타내며, 입력은  $x = [x_1, \dots, x_{N_i}]^T$ 의 벡터로 표현된다. 또한 B층은 웨이블릿 함수층으로서 각 노드에 대한 웨이블릿 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$\phi_j(z) = \phi\left(\frac{x - m_j}{d_j}\right) \tag{1}$$

여기서  $m_j$ 와  $d_j$ 는 각각  $j$ 번째 웨이블릿 노드의 변형인자 및 확장 인자로서 실수값을 가지며  $d_j > 0$ 이다. 또한 모체 웨이블릿으로는 식 (2)와 같이 Gaussian 함수의 1차 미분값으로 선택하였다.

$$\phi(x) = -x \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) \tag{2}$$

B층에서 각 웨이블릿 노드에 대한 출력은 식 (3)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi_j(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^{N_j} \phi(z_{jk}) \text{ with } z_{jk} = \frac{x_k - m_{jk}}{d_{jk}} \quad (3)$$

여기서  $j=1, \dots, N_w$  이고,  $k=1, \dots, N_i$ 이며,  $N_i$ 는 입력의 수와 웨이블릿의 차원(dimension)을,  $N_w$ 는 B층의 웨이블릿 함수의 수를 의미한다.

그림 1에서의 C층은 웨이블릿 신경 회로망의 출력을 나타내며, 식 (4)과 같이 표현 할 수 있다.

$$y = \Psi(\mathbf{x}, \theta) = \sum_{j=1}^{N_w} c_j \Phi_j(\mathbf{x}) + a_0 + \sum_{k=1}^N a_k x_k \quad (4)$$

여기서  $\theta$ 는 웨이블릿 신경 회로망의 학습을 통하여 갱신되는 파라미터들의 집합으로서 다음과 같다.

$$\theta = \{m_{jk}, d_{jk}, c_j, a_k, a_0\} \quad (5)$$

식 (5)에서,  $a_0$ 와  $a_k$ 는 입력노드와 출력노드 사이의 가중치이며,  $c_j$ 는 웨이블릿 노드와 출력노드사이의 가중치이다.

### 3. 웨이블릿 신경회로망을 이용한 모델링

#### 3.1 Duffing 시스템

본 논문의 모델링 대상으로는 연속 시간 혼돈 비선형 시스템인 Duffing 시스템을 선정하였으며, Duffing 시스템의 시계열 방정식은 식(6)과 같다.

$$\ddot{x}(t) + p \dot{x}(t) + p_1 x(t) + x(t)^3 = q \cos(\omega t) \quad (6)$$

여기서  $t$ 는 시변수이고,  $p, p_1, q, \omega$ 는 실재수이다.

시계열 방정식인 식 (6)을  $\dot{x} = y$ 로 두어 상태 방정식으로 표현하면 식 (7)과 같고, 스트레인지 어트랙터(strange attractor)는 그림2와 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ -p_1 x(t) - x^3(t) - p y(t) + q \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 사용된 파라미터의 값은 다음과 같다.

$p=0.4, p_1=-1.1, q=2.1, \omega=1.8$ 이다.

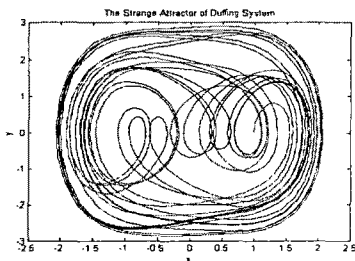


그림 2. Duffing 시스템의 스트레인지 어트랙터

#### 3.2 혼돈 시스템의 모델링

##### 3.2.1 시스템 모델링을 위한 신경 회로망의 구조

본 논문은 시스템 구조와 파라미터에 대해 수학적으로 명확하게 정의되지 않은 연속 시간 혼돈 비선형 시스템을 모델링 대상으로 한다. 본 논문에서 사용된 모델링의 목적은 시스템의 출력  $y(n)$ 과 웨이블릿 신경회로망의 출력  $\hat{y}(n)$ 사이의 오차를 이용하여 각 파라미터들을 학습시킴으로써, 주어진 시스템을 정확하게 모델링 하는 것이 목적이다. 그림 3은 모델링 오차를 이용하여 각 파라미터를 학습시키기 위한 구조를 나타낸다.

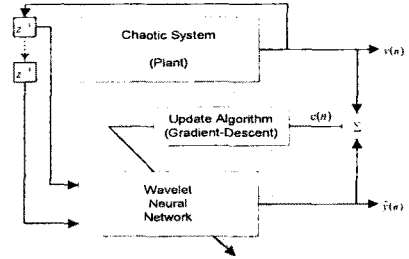


그림 3 시스템 모델링을 위한 신경 회로망의 구조

그림 3에서의 웨이블릿 신경 회로망은 입력, 출력, 웨이블릿의 3개층(layer)으로 구성되어있고, 신경회로망의 학습 알고리즘으로는 경사 하강법(Gradient-Descent Method)을 사용하며, 은닉층의 활성화 함수로 웨이블릿 함수를 이용한다. 미지의 시스템에 대한 웨이블릿 신경회로망의 모델은 다음과 같이 나타낼 수 있다[9].

$$\hat{y}(n) = f(y(n-1), y(n-2), \dots, y(n-N_s)) \quad (8)$$

여기서  $\hat{y}(n)$ 은  $n$ 번째 웨이블릿 신경회로망의 출력이고,  $f$ 는 실제 시스템의 비선형 함수이다. 그리고 웨이블릿 신경 회로망의 입력  $x$ 는 다음과 같다.

$$x_k = y(n-k), k=1, \dots, N_s \quad (9)$$

여기서  $N_s$ 는 상태 입력의 수를 의미한다.

##### 3.2.2 웨이블릿 신경 회로망의 학습 방법

본 논문에 사용된 학습 방법으로는 기본적으로 다음의 비용 함수를 최소화하는데 있다.

$$J = \frac{1}{2} (y(n) - \hat{y}(n))^2 = \frac{1}{2} e^2(n) \quad (10)$$

최소화의 과정은 반복적인 경사 하강법을 따른다. 식 (4)에서 파라미터의 집합  $\theta$ 는 학습을 통해 갱신되며, 식 (11)로 표현 가능하다.

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \Delta\theta(n) = \theta(n) + \eta \frac{\partial J}{\partial \theta(n)} \quad (11)$$

여기서  $\eta > 0$ 는 학습률을 나타내고,  $\theta(n)$ 은  $n$ 번째 파라미터 값이다.

각 파라미터 집합인  $\theta$ 에 대한 비용 함수의 편미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial J}{\partial \theta(n)} = -e(n) \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \theta(n)} \quad (12)$$

각 파라미터 벡터는 다음과 같다.

• 파라미터  $a_0$  :

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_0(n)} = 1, \quad (13)$$

• 직접 연결 파라미터  $a_k$  :

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial a_k(n)} = x_k, k=1, \dots, N_i \quad (14)$$

• 하중  $c_j$  :

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial c_j(n)} = \Phi_j(\mathbf{x}), j=1, \dots, N_w \quad (15)$$

• 변형 인자  $m_{jk}$  :

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial m_{jk}(n)} = -\frac{c_j}{d_{jk}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z_{jk}}, k=1, \dots, N_i; j=1, \dots, N_w \quad (16)$$

여기서  $\frac{\partial \Phi_j}{\partial z_{jk}} = \phi(z_{j1}), \phi(z_{j2}) \dots \phi'(z_{jk}) \dots \phi(z_{jN_i})$ 이며,  $\phi'(z_{jk})$ 은  $z_{jk}$ 에서의 스칼라 모체 웨이블릿의  $z$ 에 대한 미분값을 의미하며  $\phi'(z_{jk})$ 는 식 (17)과 같다.

$$\phi'(z_{jk}) = (z_{jk}^2 - 1) \exp(-\frac{1}{2} z_{jk}^2) \quad (17)$$

· 확장 인자  $d_{jk}$  :

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial d_{jk}(n)} = -\frac{c_j}{d_{jk}} z_{jk} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z_{jk}}, k=1, \dots, N_j; j=1, \dots, N_u \quad (18)$$

각 파라미터는 (11)식에 의해 반복적으로 변형된다.

#### 4. 모의 실험

본 논문에서의 모델링은 대표적인 연속 시간 혼돈 시스템 중의 하나인 Duffing 시스템을 적용하였다. 모의 실험을 위한 파라미터의 초기화로  $c_j, a_k, a_0$ 는 임의의 실수로 주었으며,  $m$ 과  $d$ 는 Duffing 시스템의 데이터 분포 값에서 최소  $\alpha$ , 최대  $\beta$ 의 범위내의 값으로 다음과 같이 초기화 하였다.

$$m = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (19)$$

$$d = 0.2(\beta - \alpha) \quad (20)$$

또한 모의 실험에 사용된 시스템의 조건은 식 (7)에서 주어진 상태 방정식을 이용하였고 각 파라미터의 초기값으로  $p=0.4, p_1=-1.1, q=2.1, w=1.8$ 의 값을 설정 하였으며, 학습을 위한 샘플링 주기로는 0.01초로 설정하였다. 또한 웨이블릿 신경회로망은 그림 1과 같이 1개의 은닉층을 갖는 구조를 사용하였으며, 웨이블릿 신경회로망의 입력은 Duffing 시스템 모델을 동정하기 위하여 2개로 하였고, 학습 방법으로는 경사 하강법 알고리즘을 사용하였다.

모의 실험 조건에서 모체 웨이블릿의 수를 5개로 하고, 학습율은 0.2, 그리고 학습 반복수를 5000회로 설정하여 모의 실험한 결과, 그림 4와 같이 시스템에 대해 정확한 동정의 결과를 보인다. 이때의 오차는 시간이 지남에 따라 0으로 수렴함을 알 수 있으며, 평균 제곱 오차 (Mean Square Error)는  $9.4254 \times 10^{-4}$ 의 값을 갖는다.

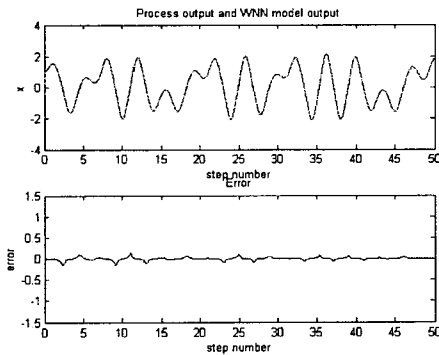


그림 4. 웨이블릿 신경 회로망을 이용한 모델링 결과

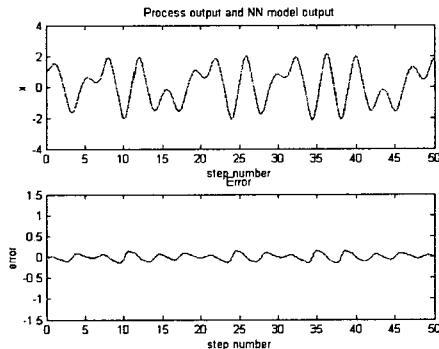


그림 5. 신경 회로망을 이용한 모델링 결과

동일한 조건하에 신경 회로망을 이용하여 시스템 동정한 결과는 그림 5와 같이 시스템의 동정에는 양호한 특성을 보이거나 평균 제곱 오차의 값이 0.0054로 웨이블릿 신경 회로망에 비해 약 5.73배 크게 나타나고, 또한 오차가 일정한 값에 수렴하지 않고 계속적으로 파문이 생김을 보인다.

이상의 결과에서 본 논문에서 제안한 웨이블릿 신경 회로망을 이용한 시스템 모델링 기법이 기존의 신경회로망 모델링 기법보다 전체적으로 우수한 성능을 보임을 알 수 있다.

표 1은 웨이블릿 신경 회로망과 신경회로망의 은닉층에서의 노드수의 변화와 학습율의 변화로 인한 결과를 나타낸 것으로써, 노드 수와 학습율이 증가될수록, 보다 정확한 모델링을 함을 알 수 있다.

표 1. 각 조건에 따른 모델링 결과

	웨이블릿 / 뉴론 노드 수	모델 학습율	MSE
NN	3	0.1	0.0464
	5	0.2	0.0054
WNN	3	0.1	0.0020
	5	0.2	0.00094

#### 5. 결 론

본 논문에서는 혼돈 비선형 시스템의 직접 적용 제어 방식에 기초한 웨이블릿 신경회로망을 이용한 시스템 모델링을 제안하였다. 모델링에 이용된 웨이블릿 신경회로망의 파라미터는 혼돈 시스템의 실제 출력과 WNN 모델의 출력의 오차에 의해 학습, 갱신되며, 경사 하강법에 의해 설계되었다. 또한, 본 논문에서 제안한 방법에 의해 대표적인 연속 시간 혼돈 비선형 시스템인 Duffing 시스템에 적용하여 모의실험을 수행한 결과 안정적이고 정확하게 모델을 동정함을 알 수 있다.

#### (참 고 문 헌)

- [1] G. Chen and X. Dong, "From Chaos to Order-Perspectives and Methodologies in Controlling Nonlinear Dynamical Systems," IJBC, vol. 3, no. 6, pp. 1363-1409, 1993
- [2] E. A. Jacson and A. W. Hubble, "Periodic Entrainment of Chaotic Logistic Map Dynamics," Phtsica D, vol. 44, pp. 407-420, 1990
- [3] E. Ott, C. Grebogi and J.A. Yorke, "Controlling Chaos," Physical Review Letter, vol. 64, no. 11, pp.1196-1199, 1990
- [4] G. Chen and X. Dong, "On feedback Control of Chaotic Contruuous-Time Systems," IEEE Trans. On Circuit and Systems, vol. 40, no.9, pp.591-601, 1993
- [5] G.Chen, "Intelligent Identification and Control of Chaotic Dynamics," IEEE Symp. Circuit and Systems, pp. 5-8, 1996
- [6] 김세민, 최윤호, 박진배, 주영훈 "신경회로망을 이용한 혼돈 시스템의 모델 예측제어," 대한 전기 학회 하계 학술대회 논문집, pp.933-935, 1999
- [7] J.Zhan,G. G. Walter, Y. Miao, W. N. Wayne Lee, "Wavelet Neural Networks for Function Learning", IEEE Trans. Signal Process, vol. 43, no. 6, pp. 1485-1497, 1995
- [8] Y. C. Pati, P. S. Krishnaparasad, "Analysis and Synthesis of Feedforward Neural Networks using Discrete Affine Wavelet Transformations", IEEE Trans. Neural Networks, vol. 4, no. 1, pp.73-85, 1993
- [9] Y. Oussar, I. Rivals, L. Personnaz, G. Dreyfus "Training Wavelet Networks for Nonlinear Dynamic Input-Output Modeling", Neurocomputing, vol 20, Issues 1-3, pp.173-188, 1998