

Haar 함수를 이용한 대수적 미지입력관측기 설계

안비오†, 강기원††, 김민형§, 김종부§
 † 중소기업진흥공단, ††정보통신연구진흥원, §인덕대학

Algebraic approach for unknown inputs observer via Haar function

P. Ahn, K. W. Kang, M. K. Kim, J. B. Kim

†Small Business Corp., ††Inst. of Information Technology Assessment, §Induk Inst. Tech.

Abstract - This paper deals with an algebraic approach for unknown inputs observer by using Haar functions. In the algebraic UIO(unknown input observer) design procedure, coordinate transformation method is adopted to derive the reduced order dynamic system which is decoupled unknown inputs and Haar function and its integral operational matrix is applied to avoid additional differentiation of system outputs.

1. 서 론

직교함수의 역사는 1910년 A. Haar이 하일함수로 불리는 주기적이며, 정규직교(orthonormal)한 완전집합함수를 발표하면서부터이다. Haar 함수를 시작으로 직교함수는 불완전한 Rademacher 함수를 거쳐 Walsh 함수로 발전하였으며, 시스템 제어분야의 응용은 1973년 M. S. Corrington이 Walsh 함수의 적분연산자를 제안하고, Walsh 함수와 그 적분연산자를 이용하여 미분 및 적분 방정식을 선형대수방정식으로 변환하여 그 해를 구할 수 있음을 보이고 부터이다[1,2]. 일반적으로 미지입력이 포함된 동적 시스템의 미지입력 추정방법은 좌표변환 방법을 통하여 미지입력이 배제된 축차된 동적 시스템을 유도하고, 축차된 동적 시스템에 대한 Luenberger 관측기를 설계한 후 좌표변환 상관식을 이용하여 전체 상태를 추정하는 방식을 주로 사용하여 왔다. 그러나 여기서 유도된 미지입력 추정식에는 항상 출력의 미분항을 포함하는 단점을 갖는다[3,4]. 따라서, 좌표변환 방법을 이용하여 이산 시스템의 미지입력 추정을 할 경우에는 초기에 deadbeat 현상이 생기고, 연속 시스템의 경우 추가의 미분기를 필요로 하여 출력 측 잡음에 민감하고 시스템의 비용이 증가하게 된다[5]. 따라서 본 논문에서는 Haar 함수를 이용하여 미지입력 관측기를 대수적으로 설계 할 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 제안된 방법은 좌표변환을 이용하여 축차된 동적 시스템을 유도한 후 하일 함수변환과 하일 함수 적분연산행렬의 역행렬을 이용하여 미지입력 관측기를 대수적으로 설계할 수 있음을 보였다. 여기서 설계된 미지입력 관측기는 추정된 상태와 시스템 출력 값의 하일함수 계수 값의 대수적 연산만으로 미지입력을 추정할 수 있음을 보였다.

2. Haar 함수와 적분연산행렬

하일함수는 다음의 식(1)과 같이 정의되는 불연속의 완전 정규직교함수이다.

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= 1 \\ \psi_1(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (1)$$

$$\psi_{2^g+t}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^g}, & \frac{g}{2^g} \leq t < \frac{(g+1/2)}{2^g} \\ -\sqrt{2^g}, & \frac{(g+1/2)}{2^g} \leq t < \frac{(g+1)}{2^g} \\ 0, & \text{그 외 구간} \end{cases}$$

여기서, $p=0,1,\dots, \log_2 \frac{m}{2}$ 이고, $g=0,1,\dots, 2^p-1$ 이다. 다음의 그림1은 하일함수 8항 전개식의 그림이고 식(2)와 같은 행렬로 표현 가능하다.

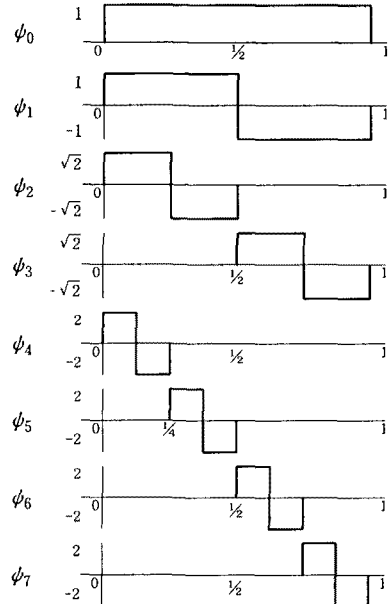


그림1. 하일함수 8항 전개 그림

구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 완전적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 는 time-scaling을 하여 구간 $\tau \in [0, 1]$ 에서 하일함수 m 항 전개를 통하여 식(3)과 같이 근사화할 수 있다.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} F_i \psi_i(\tau) \quad (3)$$

여기서, $\tau = \frac{t}{t_f}$ 이고 $\tau \in [0, 1]$ 이다.

식(3)의 하일함수 계수 F_i 는 식(4)의 최소자승 오차를 최소화하는 필요조건으로부터, 식(5)와 같이 결정된다.

$$\epsilon = \frac{1}{t_f} \cdot \int_0^1 \left[f(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} F_i \psi_i(\tau) \right]^2 d\tau \quad (4)$$

$$F_i = \frac{1}{t_f} \cdot \int_0^1 f(\tau) \psi_i(\tau) d\tau \quad (5)$$

여기서, $i=0,1,\dots,m-1$

$$\Psi_8 = \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

하알함수의 계수 값 F_i 는 이산하알함수 변환으로부터 세부구간에서의 샘플 값 혹은 평균 값 F^* 를 이용하여 식(6)과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$F_i = \frac{t_f}{m} \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \psi_i(z) \cdot F^* \quad (6.a)$$

$$F^* = \frac{m}{t_f} \int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} f(z) dz = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{t_f}{m} i\right) + f\left(\frac{t_f}{m} (i+1)\right) \right] \quad (6.b)$$

여기서, $i=0, 1, \dots, m-1$

또한, m항 전개된 하알함수의 적분은 식(7)과 같이 적분 연산행렬로 표현된다.

$$\int_0^1 \Psi(z) dz = P \cdot \Psi(z) \quad (7)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} P_{\frac{m}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} m^{-\frac{2}{3}} \cdot \Psi_{\frac{m}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} m^{-\frac{2}{3}} \cdot \Psi_{\frac{m}{2}} & 0_{\frac{m}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{여기서, } P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

3. 대수적 미지입력관측기 설계

3.1 좌표변환과 축차된 동적시스템

다음의 식(8)과 같이 미지입력이 포함된 선형 동적 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t) \quad (8.a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (8.b)$$

여기서, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^b$, $y \in \mathbb{R}^m$, $d \in \mathbb{R}^q$ 으로 각각 동적시스템의 상태, 입력, 출력, 미지입력이고, $\rho(C) = m$, $\rho(D) = q$, $m \geq q$ 을 만족하면 식(9)을 만족하는 정칙좌표 변환행렬 T_1 이 존재한다.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix} d(t) \quad (9.a)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \quad (9.b)$$

여기서, $x = T_1 \bar{x} = T_1 \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$, $T_1^{-1} A T_1 = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix}$

$T_1^{-1} D = \begin{bmatrix} 0 \\ I_q \end{bmatrix}$, $C T_1 = \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{bmatrix}$ 이고, $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{(n-q)}$, $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^q$ 이다.

식(9.a)에서 $\dot{z}(t) \triangleq \dot{\bar{x}}_2(t) - \bar{A}_{22} \bar{x}_2(t) - d(t)$ 라고 하면, 식(9)에서 다음의 식(10)의 행렬군(matrix pencil)이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 & \vdots & -I_m & 0 \\ \bar{A}_{21} & 0 & \vdots & 0 & -I_q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{여기서, } \bar{y}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

식(10)의 좌변 행렬군이 전열계수 $m+q$ 를 항상 만족하므로, 식(11)를 만족하는 정칙의 좌표변환 행렬 $T_2 \in \mathbb{R}^{(m+q) \times (m+q)}$ 는 항상 존재한다.

$$T_2 \cdot \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{C}_2 & \vdots & -I_m & 0 \\ \bar{A}_{21} & 0 & \vdots & 0 & -I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \vdots & N_1 & N_2 \\ M_2 & I_q & \vdots & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (11)$$

이제, 식(11)의 좌표변환행렬 T_2 을 이용하여, 식(9)로부터 다음의 식(12), (13)을 구할 수 있다.

$$(M_1 + N_2 \bar{A}_{21}) \bar{x}_1(t) + N_1 y(t) = 0 \quad (12)$$

$$\dot{\bar{x}}_2(t) = -(M_2 + N_4 \bar{A}_{21}) \bar{x}_1(t) - N_3 y(t) \quad (13)$$

식(13)을 식(9.a)에 대입하고 식(12)에서

$$\hat{y}(t) \triangleq -N_1 y(t) \text{ 라고 정의하면, 다음의 식(14)와 같이 상태 } \bar{x}_1(t) \text{ 만으로 이루어진 } (n-q) \text{ 차 동적 시스템이 유도된다.}$$

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A^* \bar{x}_1(t) - \bar{A}_{12} N_3 y(t)$$

$$\hat{y}(t) = (M_1 + N_2 \bar{A}_{21}) \bar{x}_1(t) \quad (14)$$

$$\text{여기서, } A^* = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} (M_2 + N_4 \bar{A}_{21})$$

동적시스템 식(9)이 가관측하면, 좌표변환행렬을 이용하여 유도된 축차된 동적시스템 식(14)는 가관측하다.

즉, $\rho \begin{bmatrix} -sI_{n-q} + A^* \\ C \end{bmatrix} = n$ 이면, $\rho \begin{bmatrix} -sI_{n-q} + A^* \\ M_1 + N_2 \bar{A}_{21} \end{bmatrix} = n-q$ 임을 알 수 있다(6). 여기서, $\forall s \in \mathbb{C}$ 이고 $Re(s) \geq 0$ 이다.

3.2 Haar 함수를 이용한 대수적 미지입력관측기

이제, 축차된 동적시스템 식(14)을 이용하여 동적시스템 식(8)에 대한 $(n-m)$ 차 최소차수관측기를 설계하자. 식(15)과 같이 $(n-m)$ 차 상태조합벡터 $w(t)$ 를 정의하자.

$$\sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(z) \approx w(z) = T_3 \cdot \bar{x}_1(z) \quad (15)$$

여기서, $w(t) \in \mathbb{R}^{n-m}$, $T_3 \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-q)}$

식(16)은 정규직교함수인 하알함수를 이용하기 위해서 $\tau = \frac{t}{t_f}$, $\tau \in [0, 1)$ 로 time scaling 한 것이다.

식(15)은 식(16)의 관계이고,

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau) \\ \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau) \end{bmatrix} = T_4 \cdot \bar{x}_1(\tau) \quad (16.a)$$

$$\bar{x}_1(\tau) \approx [V, Q] \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau) \\ \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau) \end{bmatrix} \quad (16.b)$$

$$\text{여기서, } \hat{y}(\tau) \approx \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau), T_4 = \begin{bmatrix} M_1 + N_2 \bar{A}_{21} \\ T_3 \end{bmatrix}$$

$$[V, Q] = (T_4^T \cdot T_4)^{-1} \cdot T_4^T \text{ 이다.}$$

T_3 는 $\rho \left(\begin{bmatrix} M_1 + N_2 \bar{A}_{21} \\ T_3 \end{bmatrix} \right) = n-q$ 가 되도록 선정된 변환행렬이다.

$e(\tau) \triangleq \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau) - T_3(\tau) \bar{x}_1(\tau)$ 의 관계로부터, 동적시스템 식(8)에 대해 설계된 $(n-m)$ 차의 최소차수관측기는 식(17)과 같다.

$$\sum_{i=0}^{m-1} \bar{W}_i \psi_i(\tau) = \frac{t_f}{m} \cdot [T_3 A^* Q \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau) + T_3 A^* V \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau) - T_3 \bar{A}_{12} N_3 \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau)] \quad (17)$$

$$= \frac{t_f}{m} \cdot [T_3 A^* Q \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau) - (T_3 A^* V N_1 + T_3 \bar{A}_{12} N_3) \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau)]$$

$$= \frac{t_f}{m} \cdot [F_1 \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau) + F_2 \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau)]$$

여기서, $F_1 = T_3 A^* Q$ 이고

$F_2 = -(T_3 A^* V N_1 + T_3 \bar{A}_{12} N_3)$ 이다.

이제, 식(9), (13), (16)의 관계에서 동적시스템 식(8)의 추정된 상태는 식(18)의 관계이다.

$$\hat{x}(t) = T_1 \begin{bmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\hat{x}(t) = \begin{bmatrix} -VN_1 & Q \\ (M_2 + N_4 \bar{A}_{21})VN_1 - N_3 & (-M_2 - N_4 \bar{A}_{21})Q \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau) \\ \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau) \end{bmatrix}$$

미지입력은 식(9.a)에서 식(19)와 같고,

$$d(t) = \bar{x}_2(t) - \bar{A}_{21} \bar{x}_1(t) - \bar{A}_{22} \bar{x}_2(t) \quad (19)$$

추정식은 식(18)의 관계로부터 식(20)와 같이 표현된다.

$$\hat{d}(t) = f(W_i, Y_i, \bar{Y}_i, \Psi(t))$$

$$= \frac{1}{m} (F_4 F_1 - \bar{A}_{21} Q - \bar{A}_{22} F_4) \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau)$$

$$+ \frac{1}{m} (F_4 F_2 + \bar{A}_{21} V N_1 - \bar{A}_{22} F_3) \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau)$$

$$+ \frac{1}{m \cdot t_f} F_3 \sum_{i=0}^{m-1} \bar{Y}_i \psi_i(\tau) \quad (20)$$

$$= \frac{1}{m} (F_4 F_1 - \bar{A}_{21} Q - \bar{A}_{22} F_4) \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau)$$

$$+ \frac{1}{m} (F_4 F_2 + \bar{A}_{21} V N_1 - \bar{A}_{22} F_3) \sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau)$$

$$+ \frac{1}{m \cdot t_f} F_3 \left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} Y_i \psi_i(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} G_i \psi_i(\tau) \right) \cdot P^{-1} \right]$$

여기서, $F_3 = (M_2 + N_4 \bar{A}_{21}) V N_1 - N_3$

$F_4 = -(M_2 + N_4 \bar{A}_{21}) Q$

$G^T = [y(0), 0, \dots, 0]$ 이다.

4. 적용예제

다음과 같은 동적시스템을 고려하자.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

주어진 조건에 따라 선택된 좌표변환 행렬은 다음과 같다.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

미지입력이 배제된 축차된 동적시스템은 다음과 같이 유도된다.

$$\bar{x}_1(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} y(t) \quad (23)$$

$$\hat{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}_1(t)$$

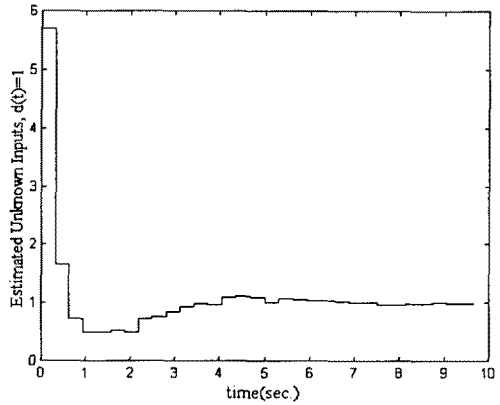
설계된 최소차수 관측기는 다음과 같다.

$$\sum_{i=0}^{m-1} \bar{W}_i \psi_i(\tau) = \frac{t_f}{m} \left[-\alpha \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau) - \beta \sum_{i=0}^{m-1} Y_{1i} \psi_i(\tau) + 4\alpha \sum_{i=0}^{m-1} Y_{2i} \psi_i(\tau) \right] \quad (24)$$

여기서 $T_3 = [\alpha \ \beta]$ 이고 $\alpha=5, \beta=1$ 를 선택하였다. 이 때 미지입력 추정식은 다음과 같다.

$$\hat{d}(t) = - \sum_{i=0}^{m-1} W_i \psi_i(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} Y_{1i} \psi_i(\tau) - 5 \sum_{i=0}^{m-1} Y_{2i} \psi_i(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} \bar{Y}_{1i} \psi_i(\tau) \quad (25)$$

그림2는 미지입력 $d(t)=1$ 일 때 제안된 방법에 의해 추정된 값을 보여준다.



5. 결 론

본 논문에서는 하알함수를 이용한 대수적 미지입력 관측기 설계에 대해서 다루었다. 제안된 방법은 좌표변환에 의해 설계된 미지입력관측기를 대수적으로 설계함으로써 출력 값의 미분치를 구하기 위해 추가의 미분기를 사용하지 않고도 미지입력을 추정할 수 있음을 보였다. 그러나 본 논문에서 사용된 하알함수 적분연산 행렬의 역행렬은 실질적인 미지입력 추정을 위해서 별도로 유도되어야 하며 향후 그 계산방법에 대한 알고리즘을 제시하여야 마땅하다. 또한 시스템 해석에 유용하게 사용되는 블럭펄스함수 및 월쉬함수와 같은 다른 직교함수와의 비교를 통해 직교함수간의 성능비교 또한 필요하다고 사료된다.

(참 고 문 헌)

- [1] K. B. Datta and B. M. Mohan, "Orthogonal functions in system and control," World Scientific Publishing, 1995.
- [2] F. Kraus and W. Schaufelberger, "Identification with block-pulse functions, modulating functions and differential operator," International Journal of Control, vol.51, pp.931-942, 1990.
- [3] Y. Guan and M. Saif, "A novel approach to the design of unknown input observer," IEEE Trans. Automatic Control, vol.36, pp.632-635, 1991.
- [4] J. H. Lee and Z. Bien, "Design of reduced-order observers for linear system with unknown inputs," Trans. KIEE, vol.43, no.1, pp.71-75, 1994.
- [5] J. H. Lee and Z. Bien, "Design of unknown input observers for linear discrete-time system," Trans. KIEE, vol.42, no.10, pp.107-111, 1994.
- [6] P. Ahn, M. K. Kim, and D. S. Ahn, "A novel approach to unknown input observer design via block pulse function's differential operation," Proc. of IFAC World Congress, vol. D, pp.255-260, 1999.