

## 근접방어무기체계에 대한 함대함 유도탄의 최적회피기동

황익호

국방과학연구소

### Optimal Evasive Maneuver for Sea Skimming Missiles against Close-In Weapon System

Ik Ho Whang

Agency for Defense Development

**Abstract** - In this paper, the optimal evasive maneuver strategies for typical subsonic ASM(anti-ship missile) to reach its target ship with high survivability against CIWS(close in weapon system) are studied. The optimal evasive maneuver input is defined by the homing command optimizing the cost function which takes aiming errors of CIWS into account. The optimization problem for the effective evasive maneuver is formulated based on a simple missile dynamics model and a CIWS model. By means of solving the problem, a multiple hypotheses testing method is proposed. Since this method requires generation of too many hypotheses, the hypothesis-pruning technique is adopted. The solution shows that the optimal evasive maneuver is a bang-bang shaped command whose frequency is varied by the aimpoint determination strategy in CIWS.

구간은 근접방어무기체계의 사거리를 고려하여 선정되며, 이 구간에서 유도탄은 생존성을 향상시키기 위한 회피기동을 수행하고, 근접방어무기체계는 유도탄의 위치를 예측하여 조준점을 결정하고 함포를 발사하게 된다. 따라서, 회피기동을 수행하기 위해서는 회피기동 개시시점에서 유도탄이 가지고 있어야 할 위치, 속도 및 회피기동 구간내에서의 기동가속도 profile을 가지고 있어야 한다.

#### 2.1 교전상황 모델링

그림 1과 같은 교전상황을 모델링하려면, 유도탄의 운동모델 및 근접방어무기체계에 대한 모델이 필요하다. 유도탄의 운동은 2차원상에서 down range와 cross range 각각에 대하여 독립적이라 가정하였으며, down range 방향의 유도탄의 운동은 등속직선운동을 상정하였으며, cross range 방향의 운동은 유도탄의 기동가속도에 의하여 변화되는 궤적을 모사할 수 있도록 다음과 같이 모델링하였다.

### 1. 서 론

근접방어무기체계(CIWS: Close-In-Weapon System)는 함정의 대공방어체계의 마지막 방어선을 형성하는 무기체계로서 함정에 접근하는 유도탄을 자동으로 포착/추적하여 고발사율의 함포로써 요격하는 장비이다. 해면을 저고도로 비행하여 호밍하는 sea skimming 함대함 유도탄의 경우 유도탄의 호밍은 2차원 수평면에 대해서만 이루어지게 되며, 수직면에서의 운동은 해상상태에 따라 적절한 고도를 유지하며 비행하는 것이 된다. 본 논문에서는 전형적인 sea skimming 함대함 유도탄이 근접방어무기체계의 위협을 회피하기 위한 수평면 최적 회피기동 알고리즘에 대하여 연구하였다.

일반적으로 회피기동문제는 유도탄의 공격을 받고 있는 항공기의 회피기동에 관련된 내용이 많이 연구되었으나 근접방어무기체계에 대하여 호밍하는 유도탄의 회피기동문제에 대한 이론적 연구 결과는 거의 발표되지 않았으며, 근접방어무기체계에 대한 software 모델을 이용한 시뮬레이션을 통하여 경험적으로 문제에 접근하고 있는 상황이다.

본 논문에서는 근접방어무기체계의 조준오차와 유도탄의 호밍성능을 모두 고려하여 최적화문제를 만들고 그 해를 구함으로써 최적회피기동 명령을 제시하였다. 최적화 문제는 유도탄 및 근접방어무기체계에 대하여 간단히 모델링하고, 조준오차를 고려한 비용함수를 선정함으로써 구성되었다. 최적화문제의 해는 유도탄이 호밍하기까지의 유도명령궤적에 대한 가설을 세우고 이들 가설 중에서 비용함수를 최적화 할 수 있는 유도명령가설을 선정하는 방식으로 얻어졌으며, 이 과정에서 가설 수의 급격한 증가를 억제하기 위한 가설 가지치기 기법이 도입되었다.

### 2. 최적 회피기동 문제

본 절에서는 유도탄의 운동, 근접방어무기체계(CIWS) 조준점 결정, 함포 및 탄환의 운동 등을 모델링하고, 이 모델에 기초하여 최적 회피기동문제를 정의하였다. 이를 위하여 그림 1과 같은 2차원 교전상황을 생각해 보자. 유도탄은 회피기동에 적합한 초기속도와 위치를 얻기 위한 Initial Adjusting 구간을 거쳐 CIWS 함포의 사거리 내로 진입하게 된다. 회피기동

$$\dot{r} = -V_x = \text{const.} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v \\ \dot{v} &= a \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $r$ 는 down range이고,  $V_x$ 는 유도탄의 ground speed이다.  $y$ 와  $v$ 는 유도탄의 cross range 및 그 변화율이며  $a$ 는 유도탄에 인가되는 기동가속도이다.

근접방어무기체계는 유도탄에 대한 검출/추적시스템, 함포 및 탄환의 운동 모델, 유도탄을 요격하기 위한 조준점을 결정하는 화기제어시스템이 결합된 시스템이라 할 수 있다. 본 논문에서는 함포 탄환의 운동 및 화기제어시스템의 조준점 결정 알고리즘 부분을 모델링하여 사용하였으며, 나머지 부분은 오차가 없다고 가정하였다.

함포 탄환의 운동은  $x$ 축(down range) 방향의 운동이  $y$ 축(cross range) 방향의 운동에 비하여 훨씬 주도적이므로  $x$ 축 방향에 대한 운동만을 고려하였으며, 함포를 발사한 경우  $y$ 축 방향에 대한 조준은 매우 정확하게 조준점의  $x$ 축 위치만 맞으면  $y$ 축 위치는 조준점으로 정확히 탄환이 도달한다고 가정하였다.  $x$ 축에서의 탄환은 일정한 항력계수(constant drag coefficient)를 가정하여 다음과 같이 고려하였다.

$$\ddot{x} = -\delta x^2 \quad (3)$$

식(3)에서  $x(0) = x_0$ ,  $\delta = C_D \frac{1}{2} \rho \alpha \left(\frac{d}{2}\right)^2 / m$ 이고,  $C_D$ 는 항력계수(drag coeff.),  $\rho$ 는 공기밀도,  $d$ 는 탄환의 직경,  $m$ 은 탄환의 무게,  $x_0$ 는 포구속도(muzzle velocity)이다. 보다 단순한 탄환 운동 모델을 얻기 위하여 식(3)의 해를 구하여 비행시간  $t$ 의 2차항까지만 고려하여 정리한 식(4)를 탄환의  $x$ 축 방향 비행거리의 모델로 이용하였다.

$$x(t) = x_0 t - \frac{1}{2} \delta x_0^2 t^2 \quad (4)$$

윗식은  $\dot{x} \geq 0$ , 즉  $t \in \left[0, \frac{1}{\delta x_0}\right]$ 인 구간에서만 유효하다.

조준점은 함포 탄환이 목표점까지 비행한 시간과 유도탄이 목표점에 도달할 때까지 소요되는 시간이 같은 지점으로 결정되며, 이 경우 유도탄의 운동은 등속직선운동, 등가속도 운동 등으로 가정하여 해를 구하게 된다. 그런데 앞에서 제시한 탄환의 운동 모델에서 x축 상에서의 탄환의 위치만 맞으면 y축 상에서의 위치는 모두 정확하게 도달하게 할 수 있다고 가정하였으므로, 현재시간 t에서 조준점 도달 예측시간(prediction interval)  $h(\tau(t))$ 는 x축상에서 (유도탄과 탄환간의 거리) = (CIWS 탄환 비행거리)를 만족하는 시간, 즉 식(5)를 만족하는 시간이 될 것이며, 그 결과는 식(6)과 같다.

$$\tau(t) - V_g h(\tau(t)) = \dot{x}_0 h(\tau(t)) - \frac{1}{2} \delta x_0^2 h(\tau(t))^2 \quad (5)$$

$$h(\tau(t)) = \frac{(V_g + \dot{x}_0) - \sqrt{(V_g + \dot{x}_0)^2 - 2\tau(t)\delta x_0^2}}{\delta x_0^2} \quad (6)$$

즉 근접방어시스템은 유도탄의 현재 위치, 속도, 가속도를 모두 아는 상황에서 식(6)으로 계산되는 예측시간을 이용하여 조준점을 계산하게 된다. 그런데 식(6)은 x축 방향의 조준오차를 0으로 만드는 조건에서 도출하였으므로, 최종 조준오차는 y축 방향에 대한 유도탄 운동의 예측위치와 조준점 도달 예측시간 후 유도탄의 실제 위치와의 차이로 계산된다.

## 2.2 근접방어무기체계에 대한 유도탄의 최적회피기동 문제

최적회피기동 문제는 2.1절에서 제시한 교전 모델 상에서 식(7)의 비용함수 J를 최소화하는 기동가속도 a(t)를 구하는 문제로 정의된다.

$$J = \int_0^{t_f} \alpha \left( 1 - \frac{e(t)}{Y_{\max}} \right)^2 + a_y \left( -\frac{y(t)}{Y_{\max}} \right)^2 + a_x \left( -\frac{x(t)}{V_{\max}} \right)^2 dt \quad (7)$$

식(7)의 비용함수에서 첫째항은 조준오차를 증대시켜 유도탄의 생존성을 향상시키기 위한 항이고, 둘째와 셋째항은 유도탄이 표적을 향하는 방향에서 지나치게 멀어지지 않도록 하여 효율적인 호밍 레적을 유지하도록 하기 위한 항이다. 식(7)에서 이용된 변수의 정의는 다음과 같다.

$Y_{\max}$  = 유도탄 cross range의 한계,  $|y(t)| \leq Y_{\max}$

$V_{\max}$  = 유도탄 cross range rate의 한계,  $|v(t)| \leq V_{\max}$

$x(t)$  = (down) range from missile to target ship

$e(t)$  = 조준점 예측오차(prediction error)

조준오차(aiming error)  $e(t)$ 는 근접방어무기체계의 조준점 결정을 위한 유도탄 운동 예측방식에 따라 다르게 계산되며, 본 연구에서는 등속도 운동 예측과 등가속도 운동예측의 두 가지 방식을 고려하였다. 두 가지 방식에 대한 조준오차는 식(8)-(9)와 같다.

$$* \text{등속도운동예측: } e(t) = \int_0^{h(t)} \int_0^{t_1} a(t+\tau) d\tau dt_1 \quad (8)$$

\* 등가속도운동예측:

$$e(t) = \int_0^{h(t)} \int_0^{t_1} a(t+\tau) d\tau dt_1 - \frac{1}{2} a(t) h(t)^2 \quad (9)$$

마지막으로 식(7)의 비용함수는 유도탄의 호밍을 보장하기 위한 조건이 포함되어 있지 않으므로 종료시간에서의 종말조건을 식(10)과 같이 지정함으로써 유도탄의 호밍을 보장할 필요가 있다.

$$v(t_f) = 0 \quad (10)$$

위와 같이 모델링된 교전상황에 대하여 최적회피기동문제를 풀 정의하면 다음과 같다.

### ■ 최적 회피기동 문제

유도탄이 회피기동을 시작하는 거리  $r_0$ 가 주어지고, 유도탄의 운동이 식(1)-(2)로 표현된다고 가정하자.

도, 유도탄의 운동은 호밍을 위한 종말조건(10)을 만족한다고 가정하자. 이 경우 유도탄의 최적 회피기동 입력은 식(7)의 비용함수를 최소로 만드는 유도탄의 기동가속도  $\{a^*(t), t_0 \leq t < t_f\}$ 와 회피기동 개시시점의  $y^*(0)$  및  $v^*(0)$ 를 구하는 것이다.

## 3. 최적 회피기동 문제의 해

2장에서 제시한 최적회피기동 문제는 기존의 최적제어문제와 매우 다른 형태의 비용함수를 가지고 있다. 식(7)의 비용함수는 조준오차가 크고 유도탄의 cross-range 성분이 적을수록 최적이 되는 구조를 가지고 있다. 그러나 조준오차를 증대시키기 위해서는 유도탄의 기동이 요구되며 이는 cross-range 성분의 증대를 가져올 수 있으므로, 최적회피기동문제는 게임이론적인 최소-최대문제(min-max problem)의 성격을 내포하고 있다고 말할 수 있다.

한편, 최적회피기동문제는 그 해를 구하는 방법을 선택함에 있어서도 상당한 어려움이 있는 문제이다. 식(8),(9)의 조준오차는 이중적분을 포함하는 형태일 뿐 아니라 그 적분구간도 비선형 시변 함수로 주어지므로(식(6) 참조), 이러한 조준오차의 비선형 함수로 포함되는 비용함수를 해석적으로 다루는 것은 매우 어려운 일이다. 따라서 해석적인 방법이나 Gradient Method와 같이 도함수를 이용한 문제해결방식을 적용하는 것은 매우 어려운 것으로 생각된다.

마지막으로, 주어진 문제는 Principle of Optimality[4]를 만족하지 않는 특이한 형태의 문제임을 알 수 있다. 일반적으로 연속시스템에 관련된 문제를 Principle of Optimality의 개념을 이용하여 해결하고자 할 때에는 주어진 문제를 매우 짧은 시구간으로 나누고, 나누어진 각각의 시간 stage에서 다음 stage로 전이함에 따라 추가되는 비용함수의 증분을 고려하여 문제를 정립하게 된다. 여기서 유의할 점은 비용함수의 증분이 해당 stage에서의 입력 및 상태변수(state)에 의해서만 변화하여야 하지만 다른 stage의 입력이나 상태변수에 의하여 영향을 받아서는 안된다는 것이다. 그러나 식(8),(9)에서 볼 수 있듯이 조준오차  $e(t)$ 는 시구간  $[t, t+h(t)]$ 내의 입력에 의하여 계산되므로 비용함수의 증분은 해당 stage 뿐 아니라 다음 stage의 입력에 의해서도 변화할 수 있다. 즉, 최적회피기동문제는 Principle of Optimality가 성립하지 않는 형태이며, 이것은 Dynamic Programming 등과 같은 최적화 방법들은 적용할 수 없음을 의미한다.

따라서 본 논문에서는 다음과 같은 두 개의 가설을 추가하여 회피기동문제를 이산화하고, 가능한 입력의 변화에 대한 가설을 만들어 이 가설들 중에서 최적인 것을 찾는 방식으로 최적해를 구하는 방법을 연구하였다.

[가정1] 기동입력 a는  $\Delta t$ 동안 일정한 값을 유지하며, 그 크기는  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  중의 하나이고,  $|a_i| \leq A$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ 이다. 단,  $i \neq j$ 이면  $a_i \neq a_j$ 이다.

[가정2] 유도종료점에서 유도탄의 cross-range rate  $v(t_f)$ 는  $\{V_0, V_1, \dots, V_m\}$  중의 하나이고,  $0 \leq V_i \leq V_{\max}$ ,  $i=0, 1, \dots, m$ 이다. 단,  $i \neq j$ 이면  $V_i \neq V_j$ 이다.

[가정1]과 [가정2]를 이용하여 최적회피기동문제를 변형하기로 하자. 우선 회피기동호밍구간  $t_0 \leq t < t_f$ 를 포함하는  $\Delta t$ 간격의 시구간(time interval)들의 집합  $\{[T_{i-1}, T_i], i=1, 2, \dots, f, t_0 \in [T_0, T_1], T_f = t_f, T_i = T_{i-1} + \Delta t\}$ 를 선정하고, j번째 시구간에서의 가속도의 크기를  $u_j$ , 즉  $u_j = a[T_{j-1}, T_j]$ 라 표기하자. 이제 i-번째 기동가설을 종말 cross-range rate와 기동가속도의 sequence, 즉  $x^i = \{u_1, u_2, \dots, u_i, v(t_f)\}$ 로 정의한다. 이제 최적회피기동문제는 식(10)의 종말조건을 만족하는 기동가설 중에서 식(7)의 비용함수를 최소화하는 것을 찾는 문제로 바꾸어 생각할 수 있다. 이 경우, 회피기동호밍구간의 크기가 유한하고, [가정1],

[가정2]에 의하여 유도탄이 가질 수 있는 기동입력의 개수 및 종말 속도도 유한하게 되므로 전체 기동가설의 개수는 유한개가 된다. 그러므로 최적회피기동문제의 해는 유한개의 가설 중에서 최적인 가설을 찾는 문제로 생각할 수 있으며, 따라서 반드시 해가 존재한다.

이제 최적 회피기동 문제는 모든 기동가설을 만들고 각각의 가설에 대한 비용함수를 계산하여 이를 최소로 만드는 것을 찾는 문제로 생각할 수 있다. 이 경우 초기조건에 대한 제한은 없고 종말조건에 대한 제한만 존재하므로 종말조건을 만족하는  $t = t_f$ 에서의 상태(유도탄의 위치, 속도)를 결정 한 후  $t = t_f$ 에서  $t = 0$ 으로 향하는 방향으로 기동가설을 만들어 가면 식 (1)-(2)에 의하여 유도탄의 비행궤적을 생성할 수 있다. 이렇게 생성된 비행궤적과 기동가설을 이용하여 식(7)-(9)에 따라 비용함수를 계산하면 해당 기동가설에 대한 비용함수의 크기를 알 수 있으므로 이중에서 최소인 것을 선택하면 그것이 최적해가 될 것이다. 일단 최적인 기동가설이 결정되면, 이 가설과 종말조건에 의하여 유도종료점의 유도탄의 위치, 속도, 가속도가 결정되고, 유도 구간중의 기동입력이 모두 확정되므로 회피기동 개시시점의 cross-range  $y^*(0)$  및 횡속도  $v^*(0)$ 를 구할 수 있다.

그러나, 이와 같은 방법으로 최적해를 구하기 위해서 고려하여야 할 기동가설의 개수는 계산하여야 할 time interval의 증가, 고려하여야 할 가속도 크기 집합  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 의 크기 증가, 고려하여야 할 종말 속도의 개수 증가에 따라 지수적으로 증가하므로, 본 논문에서는 표 1과 같이 기동가설 중에서 가설 가지치기를 적용하여 적절한 수준의 가설들을 남기고 이중에서 최적인 것을 선정하는 준최적 방법을 고려하였다.

표 1 준최적해 탐색 알고리즘

**[STEP 1] (Hypotheses Initialization)**  $t = t_f$ 에서 유도탄의 속도에 대한 가설들을 만든다.

**[STEP 2] (Hypotheses Backward Branching)** 현재 시간을  $T_c$ 라 할 때, 각각의 가설들에 대하여  $[T_{c-1}, T_c]$ 에서의 가속도  $u_c$ 에 대한 가설을 부가함으로써  $\Delta t$ 만큼 가설을 확장한다. 즉, 시간구간  $[T_c - \Delta t, T_c]$ 에 대한 가속도가 추가된 sequence를 만든다. 이 때 유도탄의 운동은 식(1)-(2)에 의거하여 다음과 같이 back-propagation한다.

$$r(T_{c-1}) = r(T_c) - V_g \Delta t$$

$$y(T_{c-1}) = y(T_c) - v(T_c) \Delta t - \frac{1}{2} u_c \Delta t^2$$

$$v(T_{c-1}) = v(T_c) - u_c \Delta t$$

**[STEP 3] (P1 : 1st Hypotheses Pruning)** 이전 시간( $T_c$ )에 남아있는 가설 각각에 대하여 branching한 후 이들 중 적은 비용함수를 가지는 것부터  $N_{pp}$ 개만 남긴다.

**[STEP 4] (P2 : 2nd Hypotheses Pruning)** STEP3에서 추출된 가설들을 모두 모아 이들 중 적은 비용함수를 가지는 것부터  $N_{prun}$ 개의 가설만 남겨 저장한다.

**[STEP 5]**  $t = 0$ 에 도달할 때 까지 Step 2 - 4를 반복한다.

**[STEP 6]** 최후에 남은 가설들 중에서 비용함수를 최소화하는 것을 택한다.

#### 4. 최적 회피기동 예제 및 결론

본 절에서는 유도탄의 운동, 근접방어무기체계 조준점 결정, 함포 및 탄환의 운동 등을 2장에서 제시한 방법으로 모델링하고, 표1의 준 최적해 탐색 알고리즘을 이용하여 준최적 회피기동을 구하였다. 최적회피기동 문제를 구성하기 위하여 이용한 수치는 다음과 같으며, CIWS 함포 탄환의 운동모델은 전형적인 20mm 함포에 대한 값을 이용하였다.

- 유도탄모델:  $A = 40, Y_{max} = 100, V_{max} = 50, V_g = 300$
- 비용함수 관련변수:  $\alpha = 3, q_y = \begin{cases} 0.1 & \text{if } |y| < 0.7 Y_{max} \\ 50 & \text{else} \end{cases}$
- $q_v = \begin{cases} 0.1 & \text{if } |v| < 0.6 V_{max} \\ 50 & \text{else} \end{cases}$
- 기동가설관련변수:  $\Delta t = 0.1, t_f = 7, N_{prun} = 400, N_{pp} = 2$

비용함수의 각 항에 대한 가중치는 조준오차에 대한 비용을 주로 고려하되 유도탄의 cross-range 및 그 변화율이 지나치게 커지는 경우에는 이를 제한하도록 선정하였으며, 가설 가지치기 관련 변수는 가능한 다양한 비행궤적을 고려할 수 있도록  $N_{pp}$ 보다  $N_{prun}$  값이 크게 선정하였다.

그림 2는 근접방어무기체계의 조준점 결정 알고리즘이 등속도 운동 예측과 등가속도 운동 예측의 두 가지 방식을 이용하는 경우에 대하여 3장에서 제시한 방법으로 준 최적 해를 구한 것이다. 그림을 살펴보면 회피기동 가속도 명령은 전반적으로 bang bang 형태이며, 명령의 변화 주파수는 등속도 예측인 경우에는 저주파이고 등가속도 예측인 경우에는 고주파임을 알 수 있다. 또한 등속도 예측인 경우의 명령의 변화는 표적과의 거리가 가까워질수록 더 자주 발생함을 알 수 있고, 등가속도 운동 예측인 경우에는  $\Delta t$ 마다 변화하는 것을 볼 수 있는데 이는 본 예제에서 가정된 조건하에서 구현할 수 있는 가장 빠른 주파수이다. 이와 같은 결과는 등속도 운동 예측인 경우에 조준오차를 극대화하는 방법은 현재 가속도에서 가장 차이가 큰 방향으로 기동가속도를 인가하는 것이기 때문이다.

이상을 요약하면 근접방어무기체계에 대한 유도탄의 최적 회피기동 명령은 bang-bang 형태를 가지며 그 주파수는 근접방어무기체계의 조준점 결정 알고리즘에 의하여 결정된다고 할 수 있다.

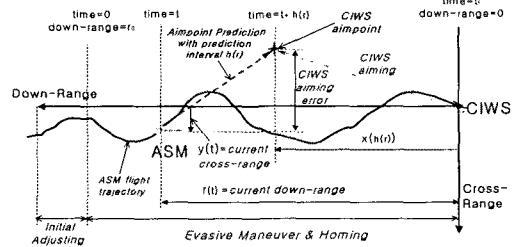


그림1 유도탄과 근접방어무기체계간의 교전 상황

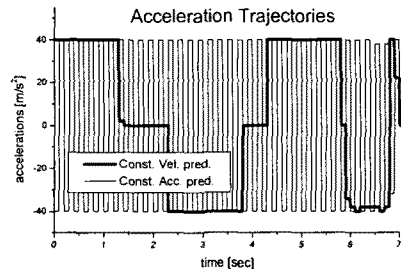


그림2 CIWS 조준점 결정방법에 따른 회피기동