

하알함수를 이용한 Robust MRAC 설계

\*김진태, †최수영, †정준홍, \*\*이한석, \*\*\*이명규, †안두수  
 †성균관대학교 정보통신공학부, \*\*부천대학 컴퓨터 제어과, \*\*\*경성대학교 전기전자 및 컴퓨터 공학부

The Design of Robust MRAC via Haar Functions

†Jin-Tae Kim, †Sooyoung Choi, †Joonhong Jung, \*\*Han-Seok Lee, \*\*\*Myung-Kyu Lee, †Doo-Soo Ahn  
 †SungKyunKwan University, \*\*Bucheon College, \*\*\*Kyung Sung University

**Abstract** - This paper proposes a real-time application of rationalized Haar transform which is based on the rationalized Haar transform, operational matrix and rationalized Haar function's differential operation. In the existing method of orthogonal functions, a major disadvantage is that process signals need to be recorded prior to obtaining their expansions. This paper proposes a novel method of rationalized Haar transform to overcome this shortcoming. And the proposed method apply to the robust MRAC systems.

1. 서 론

기준 모델 적응 제어는 모델과 실제 플랜트의 입출력 신호를 이용한 제어신호를 플랜트에 가하여 기준모델의 출력과 플랜트 출력의 오차를 0이 되게 하는 적응제어 방법으로 일반적으로 적응규칙에 의하여 수행된다[1-3]. 제어기의 파라미터를 추정하는 적응규칙은 미분방정식의 형태로 표현되며, 이러한 미분방정식의 해를 구함으로써 제어기 파라미터를 조정하게 된다. 본 연구에서는 미소구간에서의 유리하알함수변환을 이용하여 현재구간의 데이터와 이전구간의 데이터들만을 사용하여 적분 함수를 계산할 수 있는 방법을 제안하며 하알함수를 이용하여 임의의 샘플링 시간을 취하여 계산할 수 있는 방법을 제안한다. 제안되는 방법들을 이용하여 이전의 적교함수가 가지지 못했던 실시간 계산이 가능하도록 할 것이며, Robust MRAC(MRAC : Model Reference Adaptive Control)에서 미분방정식으로 표현되는 제어기 파라미터 조정법칙을 실시간으로 대수적 알고리즘을 이용하여 수행할 것이다.

2. 유리하알함수

2.1 유리하알함수 및 유리하알변환 (7)

유리하알함수는 구간 [0,1)에서 정의되는 적교함수이며 구간에서 진폭이 ±1, 0의 값을 취한다.

$$RHar(0, t) = 1, \quad 0 \leq t < 1 \tag{1}$$

$$RHar(k, t) = \begin{cases} 1, & \frac{g}{2^p} \leq t < \frac{(g+1/2)}{2^p} \\ -1, & \frac{(g+1/2)}{2^p} \leq t < \frac{(g+1)}{2^p} \\ 0, & \text{그외 구간} \end{cases} \tag{2}$$

단,  $k=2^p+g, \quad p=0,1,\dots,\log_2 \frac{m}{2}, \quad g=0,1,\dots,2^p-1$

또한 유리하알함수는 다음과 같은 직교특성을 갖는다.

$$\int_0^1 RHar(i, t) RHar(j, t) dt = \begin{cases} 1, & i=j=0 \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\int_0^1 RHar(i, t) RHar(j, t) dt = \begin{cases} 2^{-p}, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

단,  $i=2^p+g, \quad p=0,1,\dots,\log_2 \frac{m}{2}, \quad g=0,1,\dots,2^p-1$

정의구간 [0,1)에서 적분 가능한 임의의 함수  $f(t)$ 는 다음과 같이 유리하알함수로 유한급수 전개할 수 있다.

$$f(t) = \sum_{i=0}^{m-1} F_i RHar(i, t) \tag{4}$$

유리하알계수  $F_i$ 는 식(3)의 직교특성을 이용하여 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$F_i = \int_0^1 f(t) RHar(i, t) dt$$

$$\approx q_i \sum_{n=0}^{m-1} RHar(i, n) f_n^* \tag{5}$$

단,  $q_i = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} [RHar(i, n)]^2}, \quad i=0,1,\dots,m-1$

식(5)를 유리하알변환 이라고 하며 이에 대응되는 식(4)를 유리하알역변환이라고 한다.

유리하알함수의 적분함수는 임의의 함수를 유리하알함수로 표현할 수 있는 것과 마찬가지로 유리하알함수로 다시 표현할 수 있다.

$$\int_0^t RHar(\tau) d\tau = P RHar(t) \tag{6}$$

여기에서 P를 유리하알함수의 적분연산자라 하며 식(7)과 같이 일반화된 식으로 나타낸다.

$$P_{(m \times m)} = \begin{bmatrix} P\left(\frac{2 \cdot \frac{m}{2}}{2^{\log_2 m}}\right) & -\frac{1}{2^{\log_2 m-1}} RHar\left(\frac{2 \cdot \frac{m}{2}}{2^{\log_2 m}}\right) \\ \frac{1}{2^{\log_2 m}} RHar\left(\frac{2 \cdot \frac{m}{2}}{2^{\log_2 m}}\right) & 0\left(\frac{2 \cdot \frac{m}{2}}{2^{\log_2 m}}\right) \end{bmatrix} \tag{7}$$

단,  $P_{(2 \times 2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{(m \times m)} : M \in R^{m \times m}$

여기서  $m$ 은 유리하알함수의 전개항수를 나타내며, 식에서 첨자는 해당 정방행렬의 크기를 나타낸다.

2.2 미소구간에서의 유리하알변환 (8)

시구간 [0,1)에서 유리하알함수 전개항수가  $m$ 일 때,  $j$  번째 미소구간을 다음과 같이 정의하면

$$A_j = [t_j, t_{j+1}) \tag{8}$$

단,  $t_j = j \cdot \frac{1}{m}$

미소구간에서의 유리하알변환은 다음과 같고

$$F(t_j) = \frac{1}{r} f(t_j) RHar^T(t_j) \tag{9}$$

단,  $r = \frac{1}{\log_2 m + 1}, \quad j=0,1,\dots,m-1$

미소구간에서의 유리하알역변환은 식(10)과 같다.

$$f(t_j) = F(t_j) \cdot RHar(t_j), \quad j=0,1,\dots,m-1 \tag{10}$$

$t=t_j^*$  시점까지의 유리하알함수의 적분은 다음과 같다.

$$\int_0^{t_i^-} RHar(t) dt = \left( P - \frac{1}{2m} I \right) RHar(t_i) = P_L RHar(t_i) \quad (11)$$

식(11)에서  $P_L$ 을 유리하알함수의 미소구간에서의 적분 연산행렬이라 한다. 또한  $t=t_i^-$  시점까지의 유리하알함수의 적분은 다음과 같다.

$$\int_0^{t_i^-} RHar(t) dt = \left( P + \frac{1}{2m} I \right) RHar(t_{i-1}) \quad (12)$$

유리하알함수에 대한 적분값은 연속함수이므로  $t=t_i^-$  에서 연속이므로 다음의 식을 유도할 수 있다.

$$P_L RHar(t_i) = \left( P + \frac{1}{2m} I \right) RHar(t_{i-1}) \\ RHar(t_{i-1}) = \left( P + \frac{1}{2m} I \right)^{-1} P_L RHar(t_i) = D_L RHar(t_i) \quad (13)$$

식(13)에서  $D_L$ 을 유리하알함수의 미소구간에서의 지연연산행렬이라 한다.

또한 미소구간에서의 함수의 적분에 관한 식은 다음을 이용하여 계산할 수 있다.

$$F(t_{j+1}) = \left[ F(t_j) + \frac{1}{m} F(t_j) \right] \cdot D_L \quad (14)$$

여기에서 구한  $F(t_{j+1})$ 을 미소구간에서 유리하알역변환하면 함수  $f(t_{j+1})$ 에 대한 적분값을 구할 수 있으며 식(14)에서 보듯이 현재구간에서의 적분값은 이전구간에서의 값들을 이용해서 구할 수 있음을 알 수 있다.

### 3. 하알함수를 이용한 Robust MRAC 설계

다음과 같이 단일 입출력 선형 시불변 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = A_P x_P(t) + B_P u(t) + v(t) \quad (15)$$

$$y_P(t) = C_P x_P(t) \quad (16)$$

$$u(t) = f(y_P, t) + d(t) \quad (17)$$

여기서  $x_P(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^1$ ,  $y(t) \in R^1$ 은 각각 상태벡터와 입출력 벡터를 나타내며  $v(t) \in R^n$ 은 외란을 나타낸다. 플랜트의 전달함수가 다음과 같을 때

$$\frac{y_P(s)}{u(s)} = k_P \frac{Z_P(s)}{R_P(s)} \quad (18)$$

외란을 다음과 같이 가정하자.[4,5]

$$\|f(y_P, t)\| \leq \alpha_1 |y_P(t)|, \|d(t)\| \leq \alpha_2 \quad (19)$$

여기서  $\alpha_1$ 과  $\alpha_2$ 는 임의의 양의 값을 나타낸다. 기준 모델의 전달함수를 다음과 같이 정의하자.

$$\frac{y_m(s)}{r(s)} = k_m \frac{Z_m(s)}{R_m(s)} \quad (20)$$

여기서  $R_m(s)$ ,  $Z_m(s)$ 는 각각  $n$ 차,  $m$ 차의 안정한 다항식이며  $k_m$ 은 양의 상수이다. 오차함수를 다음과 같이 정의하자.

$$e_1(t) = y_P(t) - y_m(t) \quad (21)$$

식 (21)은 플랜트의 출력과 기준모델 출력의 오차를 나타낸다. Lyapunov 방식과  $\sigma$ 변형에 의한 제어 규칙은 다음과 같다[4,5].

$$\dot{w}_1(t) = Fw_1(t) + hy_P(t), \quad w_1(0) = 0 \quad (22)$$

$$\dot{w}_2(t) = Fw_2(t) + hu(t), \quad w_2(0) = 0 \quad (23)$$

$$u(t) = \theta^T(t) \zeta(t) - \rho(t) e_1(t) \quad (24)$$

$$\zeta(t) = [y_P(t) w_1^T(t) w_2^T(t) r(t)]^T \quad (25)$$

여기서  $w_1(t)$ 와  $w_2(t)$ 는  $R^{n-1}$ 차의 벡터이다.  $(F, h)$ 는 가제어행렬이며,  $F$ 는 안정한 행렬이다. 제어기 파라미터 조정을 위한 적응규칙은 다음과 같다.

$$\dot{\theta}(t) = -\sigma \theta(t) - e_1(t) \zeta^T(t) \quad (26)$$

$$\dot{\rho}(t) = -\sigma \rho(t) + e_1(t)^2 \quad (27)$$

다음으로 샘플링 시간( $t_i$ )와 유리하알함수 전개항수( $m$ )이 주어질 때 제어기 파라미터의 적응 규칙을 2장에서 소개된 미소구간에서의 유리하알변환을 이용하여 구하여 보자. 식 (22), (23), (26), (27)을 미소구간에서의 유리하알변환을 적용하기 위하여 시스템을  $\tau = \frac{t}{t_m}$ 로 스케일링한 후 양변을 적분하면 다음과 같다.

$$w_1(\tau) = w_1(0) + t_m F \int_0^\tau w_1(\tau') d\tau' + t_m h \int_0^\tau y_P(\tau') d\tau' \quad (28)$$

$$w_2(\tau) = w_2(0) + t_m F \int_0^\tau w_2(\tau') d\tau' + t_m h \int_0^\tau u(\tau') d\tau' \quad (29)$$

$$\theta(\tau) = \theta(0) - t_m \sigma \int_0^\tau \theta(\tau') d\tau' - t_m \int_0^\tau e_1(\tau') \zeta(\tau') d\tau' \quad (30)$$

$$\rho(\tau) = \rho(0) - t_m \sigma \int_0^\tau \rho(\tau') d\tau' + t_m \int_0^\tau e_1(\tau')^2 d\tau' \quad (31)$$

단,  $t_m = m \cdot t_s$ (scaling factor)

양변의 벡터들을  $j$ 번째 미소구간에서 유리하알급수 전개하여 도입한 후 양변의 유리하알벡터를 소거하고 적분에 대한 유리하알계수값인 식(14)를 도입하면  $j$ 번째 미소구간에서의 식(28)~(31)의 값은 다음과 같이 계산할 수 있으며

$$W_1(t_j) = W_1^0 + t_m F \cdot \left[ W_1(t_{j-1}) + \frac{1}{m} W_1(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \\ + t_m h \cdot \left[ Y_P(t_{j-1}) + \frac{1}{m} Y_P(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \quad (32)$$

$$W_2(t_j) = W_2^0 + t_m F \cdot \left[ W_2(t_{j-1}) + \frac{1}{m} W_2(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \\ + t_m h \cdot \left[ U(t_{j-1}) + \frac{1}{m} U(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \quad (33)$$

$$\Theta(t_j) = \Theta^0 - t_m \sigma \cdot \left[ \Theta(t_{j-1}) + \frac{1}{m} \Theta(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \\ - t_m \cdot \left[ E_1 Z(t_{j-1}) + \frac{1}{m} E_1 Z(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \quad (34)$$

$$P(t_j) = P^0 - t_m \sigma \cdot \left[ P(t_{j-1}) + \frac{1}{m} P(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \\ + t_m \cdot \left[ E_1^2(t_{j-1}) + \frac{1}{m} E_1^2(t_{j-1}) \right] \cdot D_L \quad (35)$$

단,  $j=1, 2, \dots, m-1$

식(32)~(35)에서 구해진 미소구간에서의 유리하알계수를 미소구간에서 유리하알역변환하면  $j$ 번째 미소구간에서의 함수값  $w_1^*(t_j)$ ,  $w_2^*(t_j)$ ,  $\theta_1^*(t_j)$ ,  $\rho_1^*(t_j)$ 를 구할 수 있으며 다음 식을 이용하여  $j$ 번째 미소구간에서의 제어입력  $u^*(t_j)$ 를 실시간으로 구할 수 있다.

$$u^*(t_j) = \theta^{*T}(t_j) \zeta^*(t_j) - \rho^*(t_j) e_1(t_j) \quad (36)$$

단,  $\zeta^*(t_j) = [y_P(t_j) w_1^{*T}(t_j) w_2^{*T}(t_j) r(t_j)]^T$ ,  $j=0, 1, \dots, m-1$  식(32)~(35)에 대한 다음구간에서의 초기 조건 값은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$w_1(t_m) = w_1(0) + t_s F \cdot \sum_{i=0}^{m-1} w_1^*(t_i) + t_s h \cdot \sum_{i=0}^{m-1} y_P^*(t_i) \quad (37)$$

$$w_2(t_m) = w_2(0) + t_s F \cdot \sum_{i=0}^{m-1} w_2^*(t_i) + t_s h \cdot \sum_{i=0}^{m-1} u^*(t_i) \quad (38)$$

$$\theta(t_m) = \theta(0) - t_s \sigma \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \theta^*(t_i) - t_s \cdot \sum_{i=0}^{m-1} e_1^*(t_i) \zeta^*(t_i) \quad (39)$$

$$\rho(t_m) = \rho(0) - t_s \sigma \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \rho^*(t_i) + t_s \cdot \sum_{i=0}^{m-1} e_1^*(t_i)^2 \quad (40)$$

식(37)~(40)에서 구한  $w_1(t_m)$ ,  $w_2(t_m)$ ,  $\theta(t_m)$ ,  $\rho(t_m)$ 을 다음구간의 초기조건으로 이용하여 임의의 시구간으로의 확장이 가능하게 된다.

### 4. 시뮬레이션

다음과 같이 외란을 가지는 선형 시불변 시스템을 고

려하자[6].

$$\dot{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + v(t) \quad (41)$$

$$y_p(t) = [1 \ 0] x_p(t) \quad (42)$$

$$\text{단, } x_p(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad v(t) = \begin{bmatrix} 0.9\cos(2t) + 0.5y_p(t) \\ 0.5\sin(t) + y_p(t) \end{bmatrix}$$

기준모델은 다음과 같다.

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (43)$$

$$y_m(t) = [1 \ 1] x_m(t) \quad (44)$$

$$\text{단, } x_m(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad r(t) = 3$$

제어 규칙은 다음과 같다.

$$\dot{w}_1(t) = -5w_1(t) + y_p(t), \quad w_1(0) = 0 \quad (45)$$

$$\dot{w}_2(t) = -5w_2(t) + u(t), \quad w_2(0) = 0 \quad (46)$$

$$u(t) = \theta^T(t)\zeta(t) - \rho(t)e_1(t) \quad (47)$$

$$\zeta(t) = [y_p(t)w_1^T(t)w_2^T(t)r(t)]^T \quad (48)$$

제어기 파라미터 조정을 위한 적응규칙은 식(49)와 식(50)에 의하여 조정된다.

$$\dot{\theta}(t) = -0.01 \cdot \theta(t) - e_1(t)\zeta(t) \quad (49)$$

$$\dot{\rho}(t) = -0.01 \cdot \rho(t) + e_1(t)^2, \quad \theta(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (50)$$

다음으로 샘플링 시간( $t_s = 0.01$ )과 유리하알함수 전개 항수를 8항( $m=8$ )으로 하였으며 Matlab v6.0을 이용하여 시뮬레이션 하였고 50초까지의 데이터를 얻었다.

그림 1에는 기존의 방법을 이용하였을 경우의 기준 모델의 출력과 플랜트의 출력 값을 나타내었고, 그림 2에는 제안된 방법을 이용하였을 경우의 기준모델의 출력과 플랜트의 출력을 나타내었다.

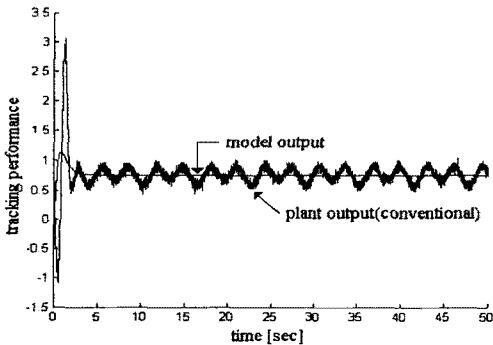


그림 1 기존의 방법에 의한 모델 출력과 플랜트 출력  
Fig. 1 Model & Plant Output by the Conventional Method

표 1에는 기존의 방법을 이용하여 Robust 기준 모델 적응 제어기를 설계하였을 때와 본 논문에서 제안하는 유리하알변환을 이용하여 Robust 기준 모델 적응 제어기를 설계하였을 때의 평균 자승 오차를 나타내었다. 표 1에서 보듯이 Robust 기준 모델 적응 제어에서도 본 문에 의한 방법이 보다 우수함을 알 수 있다.

표 1 평균자승오차 비교  
Table 1 Comparison of Mean Square Error

Method	Mean Square Error
Conventional	3.6898
Proposed	3.6402

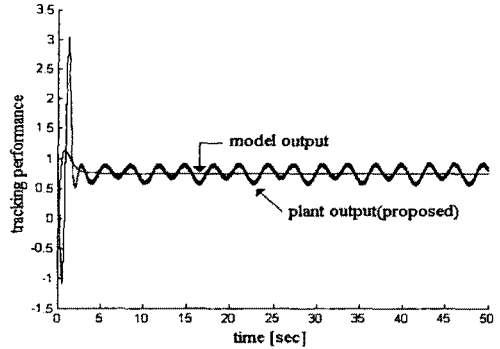


그림 2 제안된 방법에 의한 모델 출력과 플랜트 출력  
Fig. 2 Model & Plant Output by the Proposed Method

## 5. 결 론

기준 모델 적응 제어와 같이 실시간 처리를 요하는 시스템에 적교함수를 적용하기 위해서는 샘플링 되는 데이터를 이용하여 실시간으로 제어기를 구성할 수 있는 알고리즘이 필요하다. 본 논문에서는 이러한 문제를 해결하기 위하여 미소구간에서 유리하알변환을 적용할 수 있는 방법과 미소구간에서 함수의 미분값과 적분값을 계산할 수 있는 방법을 제안하였고, 유리하알변환을 이용하여 임의의 샘플링 시간을 위하여 실시간 계산을 수행할 수 있는 방법을 제안하였다. 본 논문에서는 제안하는 방법들을 이용하여 현재구간의 데이터와 이전구간에서의 데이터들만을 이용하여 실시간으로 기준 모델 적응 제어를 수행하는 과정을 보였다. 이는 본 논문의 방법이 일반화된 알고리즘으로 신뢰성 있게 적용될 수 있으며 보다 간단히 제어기를 설계할 수 있음을 보였다. 또한 본 논문의 방법은 실시간 처리를 요하는 제어 시스템에 적용이 가능할 것으로 사료되며 향후 실제 시스템을 구현할 경우 매우 유용할 것임이 기대된다.

## [참 고 문 헌]

- [1] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice Hall, 1989
- [2] Hans Buttler, *Model Reference Adaptive Control*, Prentice Hall, 1992
- [3] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Adaptive Control*, Addison Wesley Publisher, 1995
- [4] Hodong Seok, Joon Lyun, Theho Chung, "A Robust Model Reference Adaptive Controller Design", Proc. of the 1991 KACC, vol. 2, pp. 1073-1076, 1991
- [5] Peteros A. Ioannou, Jing Sun, *Robust Adaptive Control*, Prentice Hall, 1996
- [6] Y. H. Cho, H. S. Lee, D. S. Ahn, "On the improvement of Convergence performance of robust MRAC using BPF", Int. Conf. Intelligent Robots and Systems, pp. 41-45, 1999
- [7] 안두수, *WALSH 함수와 시스템 제어*, 북두출판사, 2000
- [8] 김진태 외, "블리펄스함수를 이용한 기준 모델 적응 제어기 설계", 대한전기학회 논문집 제 51D 권 제 1 호, pp. 1-7, 2002
- [9] 김진태 외, "미소구간 유리하알변환에 의한 선형계의 해석을 위한 새로운 접근방법", 대한전기학회 논문집 제 51D 권 제 6 호, pp ~, 2002