

적용 퍼지 슬라이딩 모드 제어를 이용한 도립진자의 제어

서삼준*, 서호준**, 김동식**
 *안양대 전기전자공학과, **순천향대 정보기술공학부

Control of Inverted Pendulum using Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control

Sam-Jun Seo, Ho-Joon Seo, Dong-Sik Kim
 Anyang University, SoonChunHyang University

Abstract - In this paper, to overcome drawback of FLC an adaptive fuzzy sliding mode controller is proposed. The fuzzy basis function to describe the fuzzy system is introduced. The system parameter in sliding mode are estimated by the indirect adaptive fuzzy control. Adaptive laws for fuzzy parameters and fuzzy rule structure are established so that the whole system is stable in the sense of Lyapunov stability. The computer simulation results for inverted pendulum system show the performance of the proposed fuzzy sliding mode controller.

1. 서 론

가변 구조 제어 이론은 본질적으로 불연속 제어입력을 인가함으로써 지연시간이 존재하는 실제 계통에 적용시에는 제어기 설계시 고려하지 않은 동특성이 여기되어 상태가 채터링하는 현상이 발생하고 도달 모드시에는 가변구조가 발생하지 않는 순수한 상태 전환 특성만을 갖기 때문에 견실성을 보장받지 못하는 단점을 가지고 있다.

이러한 단점을 보완하기 위해 잘 정의 안 되고 복잡한 시스템에 적합한 퍼지 논리 제어기와 슬라이딩 모드 제어를 결합한 퍼지 슬라이딩 모드 제어기가 제안되어 채터링을 감소시키고 도달 시간을 줄이도록 하였다.

일반적으로 퍼지 논리 제어기에 사용되는 제어 규칙은 전문가의 직관과 경험에 의해 얻어지며 언어적 규칙이나 퍼지 관계에 의해 표현된다. 그러나 퍼지 규칙은 체계적인 획득 방법이 없어 시행 착오법이나 숙련된 전문가의 직관과 경험에 주로 의존하여 퍼지 제어기의 실제 적용을 어렵게 한다. 따라서 본 연구에서는 퍼지 규칙을 스스로 생성하여 주는 최대 경사법을 이용한 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 제안하여 도립 진자 시스템에 적용하여 그 유용성을 입증하였다.

2. 슬라이딩 모드 제어

다음과 같이 주어지는 n 차 비선형 시스템을 고려해 보자.

$$\dot{x} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \quad (1)$$

여기서, $x \in R^n$ 는 상태벡터, $u \in R$, $y \in R$ 는 각각 입력과 출력이며, $f, g: R^+ \times R^n$ 는 연속 미분 가능한 비선형 함수(smooth nonlinear function)이다. 추종오차는 다음과 같이 정의하자.

$$e = x - x_d = (e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)})^T \quad (2)$$

가변 구조 제어 시스템의 동특성은 도달 모드와 슬라이딩 모드로 이루어지는데 원하는 슬라이딩 모드 동특성

은 적절한 스위칭 함수 $s(e)$ 를 설계함으로써 결정되는 데 본 논문에서는 다음과 같은 도달 법칙을 사용하였다.

$$\dot{s}(e) = -K \text{sgn}(s(e)), \quad K > 0 \quad (3)$$

여기서, 수렴속도는 이득 K 에 의해 결정된다.

가변 구조 형태의 제어 입력을 구성하기 위하여 다음과 같은 스위칭 평면을 정의하자.

$$s(e) = e^{(n-1)} + k_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + k_1e + k_0 \int edt = 0 \quad (4)$$

이와 같이 구성된 스위칭 평면의 계수는 다음과 같은 Hurwitz 다항식이 되도록 선정한다.

$$h(\lambda) = \lambda^n + k_{n-1}\lambda^{(n-1)} + \dots + k_1\lambda + k_0 = 0 \quad (5)$$

따라서, 스위칭 평면의 도함수는 다음과 같이 된다.

$$\dot{s}(e) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i e^{(i)} + f(x) + g(x)u - x_d^{(n)} \quad (6)$$

3. 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어

3.1 기존의 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어

퍼지 모델의 형태를 if~ then~의 언어 규칙 형태로 가정하고 각 언어 규칙의 후건부는 퍼지 기저 함수의 선형 결합으로 가정하면 퍼지 규칙들의 집합으로부터 비선형 함수의 추정치 $\hat{f}(x|\theta_f)$, $\hat{g}(x|\theta_g)$ 는 다음과 같이 가중 평균 비퍼지화 식으로부터 구해진다.

$$\hat{f}(x|\theta_f) = \frac{\sum_{j=1}^N \theta_{fj} \mu_{R_j}(x)}{\sum_{j=1}^N \mu_{R_j}(x)} \quad (3)$$

$$\hat{g}(x|\theta_g) = \frac{\sum_{j=1}^N \theta_{gj} \mu_{R_j}(x)}{\sum_{j=1}^N \mu_{R_j}(x)} \quad (4)$$

또한 비선형 함수 $f(x), g(x)$ 는 다음 식에 의해 계산된다.

$$\hat{f}(x|\theta_f) = \theta_f^T \xi_f(x) \quad (5)$$

$$\hat{g}(x|\theta_g) = \theta_g^T \xi_g(x) \quad (6)$$

여기서, θ_f 와 θ_g 는 각각 f, g 의 파라미터 벡터이고 ξ_f 와 ξ_g 는 퍼지 기저 함수 벡터로 각 요소에 대한 정의는 각각 다음과 같다.

$$\xi_f(x) = (\xi_{f1}(x), \xi_{f2}(x), \dots, \xi_{fM}(x))^T \quad (7)$$

$$\xi_g(x) = (\xi_{g1}(x), \xi_{g2}(x), \dots, \xi_{gM}(x))^T \quad (8)$$

$$\xi_{fj}(x) \triangleq \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{F_{ij}}(x_i)}{\sum_{j=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{F_{ij}}(x_i)} \quad (9)$$

$$\xi_{gj}(x) \triangleq \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{G_{ij}}(x_i)}{\sum_{j=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{G_{ij}}(x_i)} \quad (10)$$

최소 근사 오차 w 는 현재 추정하고자 하는 f 와 g

와 실제값의 오차들을 결합시킨 형태의 근사 오차이다.

$$w = (f(x) - \hat{f}(x|\theta_f^*)) + (g(x) - \hat{g}(x|\theta_g^*))u_{eq}^c \quad (11)$$

$s(e)$ 의 도함수 $\dot{s}(e)$ 는 다음과 같이 다시 정리될 수 있다.

$$\dot{s}(e) = (\hat{f}(x|\theta_f^*) - \hat{f}(x|\theta_f)) + ((\hat{g}(x|\theta_g^*) - \hat{g}(x|\theta_g))u_{eq}^c + g(x)u_s^c + w \quad (12)$$

$\hat{f}(x|\theta_f)$ 와 $\hat{g}(x|\theta_g)$ 는 식 (3)과 (4)로 주어지는 퍼지 시스템이므로 식 (13)은 다음 식으로 표현된다.

$$s = \Phi_f^T \xi_f(x) + \Phi_g^T \xi_g(x) u_{eq}^c + g(x)u_s^c + w \quad (13)$$

여기서, $\Phi_f = \theta_f^* - \theta_f$, $\Phi_g = \theta_g^* - \theta_g$ 이고 $\xi_f(x)$ 와 $\xi_g(x)$ 는 퍼지 기저 함수이다.

적용칙을 얻기 위하여 다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} \left\{ s^2 + \frac{1}{\gamma_1} \Phi_f^T \Phi_f + \frac{1}{\gamma_2} \Phi_g^T \Phi_g \right\} \quad (14)$$

Lyapunov 함수의 도함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\dot{s} - \frac{1}{\gamma_1} \Phi_f^T \dot{\theta}_f - \frac{1}{\gamma_2} \Phi_g^T \dot{\theta}_g \\ &= s\{g(x)u_s^c + w\} + \frac{1}{\gamma_1} \Phi_f^T [-\dot{\theta}_f + \gamma_1 s \xi_f] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_2} \Phi_g^T [-\dot{\theta}_g + \gamma_2 s \xi_g u_{eq}^c] \end{aligned} \quad (15)$$

θ_f^* , θ_g^* 는 상수이므로 $\dot{\theta}_f = -\dot{\theta}_f$, $\dot{\theta}_g = -\dot{\theta}_g$ 가 되므로 최종적으로 적용칙은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_f &= \gamma_1 s \xi_f(x) \\ \dot{\theta}_g &= \gamma_2 s \xi_g(x) u_{eq}^c \end{aligned} \quad (16)$$

식 (16)을 식 (15)에 대입하면 Lyapunov 함수의 도함수는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s\{g(x)u_s^c + w\} \\ &= |s| \left\{ -\frac{g(x)}{\hat{g}(x|\theta_g)} K + w \operatorname{sgn}(s) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

$\dot{V} < 0$ 가 보장되기 위해서는 K 값을 다음과 같이 정의하여야 한다.

$$K \geq \frac{\hat{g}^U}{g_L} \omega_{\max} \quad (18)$$

여기서 $g_L = \inf_{x \in U_s} g(x)$, $\hat{g}^U = \sup_{\theta_g \in U_g, x \in U_s} \hat{g}(x|\theta_g)$.

$w_{\min} \leq w \leq w_{\max}$ 이다.

K 는 불확실성이나 외란을 충분히 보상할 수 있는 크기로 설계자에 의하여 결정되는 값이다.

3.2 제안한 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어

본 연구에서 제어 규칙을 동조시키기 위한 적응 알고리즘은 시스템 궤적을 슬라이딩 모드에 머무르게 하는 제어 규칙의 결론부 파라미터를 수정하는 방법을 이용하였다. 최대 경사법(maximum gradient descent method)에 의해, 결론부 파라미터는 다음과 같이 수정된다.

$$\dot{K}_j = -\gamma \frac{\partial s \dot{s}}{\partial K_j} \quad (19)$$

여기서, Γ 는 적응 이득이다.

$$\begin{aligned} \dot{K}_j &= -\gamma \frac{\partial s \dot{s}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial K_j} \\ &= -\gamma \frac{\partial s \dot{s}}{\partial u_s^c} \frac{\partial u_s^c}{\partial K_j} - \gamma \frac{\partial s \dot{s}}{\partial u_{eq}^c} \frac{\partial u_{eq}^c}{\partial K_j} \end{aligned} \quad (20)$$

등가 제어 입력 u_{eq}^c 는 상태에만 의존하기 때문에 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial u_{eq}^c}{\partial K_j} = 0 \quad (21)$$

$\frac{\partial s \dot{s}}{\partial u_s^c}$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial s \dot{s}}{\partial u_s^c} = s g(x) \quad (22)$$

스위칭 제어 입력 u_s^c 으로 부터 $\frac{\partial u_s^c}{\partial K_j}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial u_s^c}{\partial K_j} = -\hat{g}(x)^{-1} \operatorname{sgn}(s) \frac{\mu_j}{\sum_{j \in J} \mu_j} \quad (23)$$

따라서 제어 규칙의 결론부 파라미터를 수정하는 적응 알고리즘은 다음과 같이 유도된다.

$$\dot{K}_j = \gamma \frac{g(x)}{\hat{g}(x)} |s| \frac{\mu_j}{\sum_{j \in J} \mu_j} \quad (24)$$

위 식에서 $g(x)$ 의 부호를 알 수 있다면 결론부 파라미터의 수정칙은 다음과 같이 근사화할 수 있다.

$$\dot{K}_j \cong \gamma |s| \frac{\mu_j}{\sum_{j \in J} \mu_j} \quad (25)$$

4. 컴퓨터 모의실험

제안된 적응 퍼지 슬라이딩 제어기의 유용성을 보이기 위하여 다음과 같은 도립 진자(cart-pole) 계통을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - \frac{m l \cos^2 x_1 \sin x_1}{m_c + m}}{\left(\frac{4}{3} - \frac{m \cos^2 x_1}{m_c + m} \right)} + \frac{\cos x_1}{m_c + m} u \end{aligned} \quad (26)$$

여기서, 상태 x_1 과 x_2 는 그림 4.1에서와 같이 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ 를 나타낸다. 또한 도립 진자의 각 파라미터는 표 4.1과 같다.

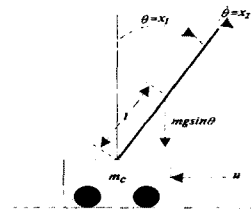


그림 1 도립진자 시스템

표 1 도립진자 시스템의 파라미터

	Symbol	Value
acceleration of gravity	g	9.8 m/s ²
mass of cart	m_c	1 kg
mass of pole	m	0.1 kg
length of pole	l	0.5 m

퍼지 기저 함수를 구성하는 소속 함수는 5개의 Gaussian 소속 함수를 사용하고 도립진자 시스템은 2

차 계통이므로 $m_1 = m_2 = 5$ 로 선정하였다.

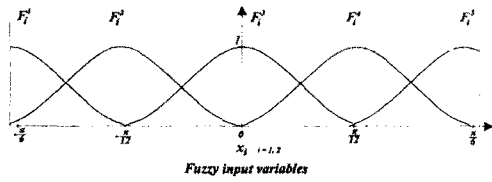


그림 2 퍼지 멤버십 함수

도립진자 시스템의 제어 목적은 상태들을 원점으로 수렴시키는 것으로 하고 초기치는 $x(0) = (0.2, 0)^T$ 로 하였다. 제안된 제어기의 적응 이득 γ 는 400으로 설정하였다.

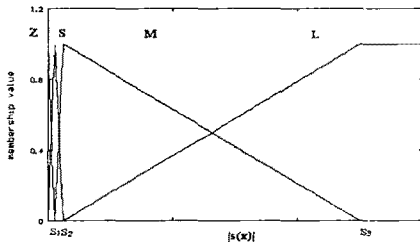


그림 3 스위칭 함수 $|s(x)|$ 의 멤버십 함수

그림 3에는 제안된 제어기에 사용된 $|s(t)|$ 의 소속 함수를 나타내었다. 여기서 $s_1 = 0.01$, $s_2 = 0.02$, $s_3 = 0.1$ 이다. 샘플링 시간은 0.001sec로 하고 0.5초 이후 부터는 정현파 외란 $2 \sin(20\pi)$ 를 인가하여 컴퓨터 시뮬레이션을 수행하였다.

그림 4에 가변 구조 제어기의 응답을 나타내었다. 가변 구조 제어기의 경우 스위칭 입력의 크기가 클수록 외란이나 불확실성에 강인성이 증가하고 더 큰 초기 편차에 대하여도 기준입력을 안정하게 추종하게 되지만 입력이 고주파 진동이 크게 되는 문제가 발생한다.

그림 5에 제안한 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기의 응답을 나타내었고 그림 6에는 제안한 제어기에 의해 동조된 제어 이득을 나타내었다. 제안한 제어기는 기존의 가변 제어기에 비해 빠른 수렴 속도를 보이면서도 채터링은 거의 나타나지 않았다. 적응칙에 의해 동조된 제어 이득들은 가변 구조 제어기의 제어 이득 보다 상당히 크지만 퍼지 규칙에 의해 추론된 K 값이 작아 채터링이 감소된다.

4. 결 론

퍼지 규칙은 체계적인 획득 방법이 없어 시행 착오법이나 숙련된 전문가의 직관과 경험에 주로 의존하여 퍼지 제어기의 실제 적용을 어렵게 한다. 따라서 본 연구에서는 퍼지 규칙을 스스로 생성하여 주는 최대 경사법을 이용한 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 제안하여 도립 진자 시스템에 적용하여 그 유용성을 입증하였다. 컴퓨터 모의실험 결과 제안한 제어기는 채터링이 일어나지 않으면서 제어 문제에 상충적인 응답의 속용성과 강인성을 모두 가지고 있으며 제어이득을 구하기 위한 제어 규칙이 필요없고 정확한 수학적 모델이 필요없기 때문에 제어기 설계가 간편할 뿐만 아니라 성능면에서 우수함을 알 수 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] L. X. Wang, J. M. Mendel, "Fuzzy basis Functions Universal Approximation and Orthogonal Least-Squares Learning". IEEE Trans. Neural Network, vol. 3, no. 5, pp. 807-814, 1992
- [2] Lin-Xing Wang, "A Course In Fuzzy Systems & Control", Prentice-Hall, 1997
- [3] M. U. Polycarpou, M. J. Mears, "Stable adaptive tracking of uncertain systems using nonlinearly parameterized on-line approximators". Int. J. Control, vol. 70, no. 3, pp.363-384, 1998
- [4] S. S. Ge, C. C. Hang, T. Zhang, "Adaptive Neural Network Control of Nonlinear Systems by State and Output Feedback". IEEE Trans., Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics, vol. 29, no. 6, pp.818-828, 1999

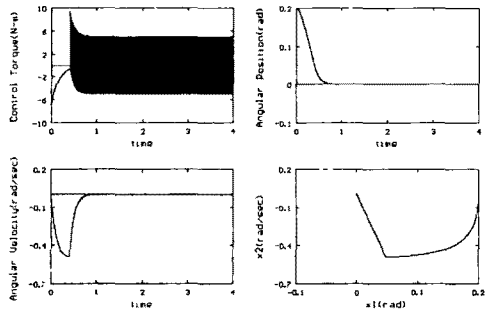


그림 4 가변 구조 제어기의 응답

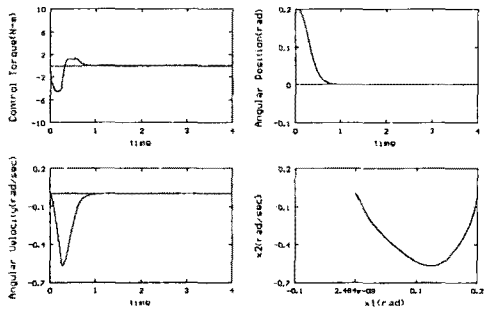


그림 5 제안한 제어기의 응답

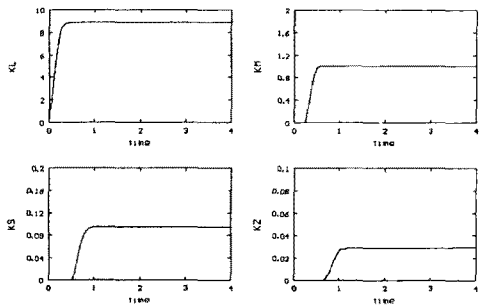


그림 6 동조된 제어 이득들