2002년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2002.7.10-12

비최소위상 비선형 시스템의 새로운 제어 방법

**이주일, *송은한, *하인중
**Philips Research Lab, *서울대학교 전기공학부

A New Approach to Control of Nonminimum-phase Nonlinear Systems

**Ju-il Lee, *Eun-han Song, *In-joong Ha
**Philips Research Lab, *School of Electrical Engineering, Seoul National University

Abstract - MIMO 비최소위상 시스템에 대한 입출력 선형화 제어에 대해서 새로운 접근 방식을 제안한다. 처음에 몇가지 조건 하에서 비선형 궤환과 상태 변환을 하고 또한 magnitude & time scaling을 해서 일반적인 비선형 시스템을 특이 섭동 시스템으로 변환할 수 있다는 것을 보였다. 특히 제안된 방법에 의하여 변환된 특이 섭동 시스템에서 숨겨진 동적 특성이 fast subsystem의 역할을 하게 된다. 그 다음에는 잘 알려진 composite control 기법을 적용하여 시스템이 거의 선형적이고 비간섭적인 I/O 동적 특성을 갖게 하고 내부 상태가 안정화되도록 한다.

기존의 방식 보다 제안된 제어 방법의 가장 큰 이점은 적용될 수 있는 비최소위상 시스템의 범위를 보다 넓히게 되었다는 것이다. 게다가 특이 섭동 방법은 제어기 설계 과정을 단순화시켜 제어기 구현에 있어서 계산 시간을 단축시킨다.

1. 서 론

본 논문에서는 비최소위상 비선형 시스템에 대해서 새로운 입출력 궤환 선형화 제어 방법을 제안한다. 기존의 입출력 선형화 제어 방법을 불안정한 zero dynamics를 갖는 시스템에 적용하면 internally unstable 해지므로 이러한 방법은 미사일이나 비행기의 제어기법으로는 적합하지 않다. 따라서, 최근에는 이러한 입출력 선형화 기법을 비최소위상 시스템에 확장하여 적용하는 기법에 대한 논문이 많이 소개되고 있다 [1],[2],[3]. 또 [4]에서는 이런 방법을 STT 미사일에 적용하려는 선행 연구가 소개되기도 했다. 본 논문에서는 [4],[5]의 결과와 slightly nonminimum phase system의 특이섭동된(singularly perturbed) zero dynamics 에대한 기존의 연구결과 [6],[7]을 일반화 하는 것을 목표로 한다.

우선 본 논문에서는 어떤 가정하에서 입력과 상태 변환, 크기와 시간 scaling을 통하여 일반적인 비선형 시스템을 singularly perturbed system으로 변환할 수 있음을 보인다. 이러한 변환에 의하여 hidden dynamics는 빠른 부시스템(subsystem)이 됨을 보일 수 있다. 그런 후에 잘 알려진 composite control strategy를 적용하여 선형에 가까운 입출력 특성과 internal stability를 동시에 만족시키는 제어기를 구성한다.

2. 본 론

다음과 같은 형태의 MIMO 비선형시스템이 있다.

$$\begin{aligned} \Sigma_1: \dot{\xi} &= A\xi + Bv, \quad y = C\xi, \\ \Sigma_2: \dot{\eta} &= f(\xi,\eta) + \sum_{i=1}^{m} g_i(\xi,\eta)v_i, \end{aligned} \tag{1}$$

여기서,

$$\xi \triangleq [\zeta^1, \cdots, \zeta^m]^T \in R^r, \quad \zeta^i \triangleq [\xi^i_1, \cdots, \xi^i_{r_i}]^T \in R^{r_i}$$

$$A \triangleq diag\ A_i\ , \quad B \triangleq diag\ B_i\ , \quad C \triangleq diag\ C_i$$

이고, f, $g_1, \cdots, g_m$는 $R^r \times R^d$상의 smooth vector field이다. 그리고 $(A_{s_i}, B_{s_i}, C_{s_i})$는 Brunovsky canonical 으로

$$\begin{aligned} A_{s_i} &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in R^{r_i \times r_i} \\ B_{s_i} &\triangleq [0 \cdots 0\ 1]^T \in R^{r_i}, \\ C_{s_i} &\triangleq [1\ 0 \cdots 0] \in R^{1 \times r_i} \end{aligned} \tag{2}$$

이다.

[11,12]의 정의에 의해서 위의 시스템의 zero dynamics는 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{\eta} = f(0,\eta). \tag{3}$$

이제 여기서 필요로 하는 몇가지 가정을 하겠다.

(가정1) (식11) 시스템의 원점 $\tilde{\eta}=0$은 불안정 (unstable)하다.

(가정2) $D_2 f(\xi,\eta) \in R^{d \times d}$는 (ξ,η) = (0,0,0) 에서 nonsingular이다.

(가정1)은 지금 우리가 다루고 있는 system이 비최소위상이므로 당연한 가정이 되겠고 (가정2)는 magnitude & time scaling을 통하여 식(1)에 내재하는 시스템의 잘 정의된 time scale decomposition을 얻기 위해서 필요하다.

이제 상태변수, 출력 y, 새로운 입력 v에 대해 다음과 같은 변수 크기 및 시간에 대한 scaling 변환을 하겠다.

$$\tilde{\xi}^i_j(t) \triangleq \left(\frac{1}{\omega_n}\right)^{j-1} \xi^i_j\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \ j=1,\cdots,r_i\ , \ i=1,\cdots,m, \tag{4a}$$

$$\tilde{\eta}(t) \triangleq \eta\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \tag{4b}$$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) &\triangleq [\tilde{u}_1(t), \cdots, \tilde{u}_m(t)]^T \\ &= \left[\frac{1}{\omega_n^{r_1}} u_1\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \cdots, \frac{1}{\omega_n^{r_m}} u_m\left(\frac{t}{\omega_n}\right)\right]^T, \end{aligned} \tag{4c}$$

$$\tilde{y}(t) \triangleq [\tilde{y}_1(t), \cdots, \tilde{y}_m(t)]^T = \left[y_1\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \cdots, y_m\left(\frac{t}{\omega_n}\right)\right]^T \tag{4d}$$

여기서 ω_n은 전체 closed-loop 시스템의 대역폭과 관련된 파라메터이다. 그리고 (1)의 시스템은 (4의 변환에 의해 다음과 같은 특이섭동 시스템의 형태로 변환된다.

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma}_1 &: \dot{\xi} = A\xi + B\tilde{v}, \quad \tilde{y} = C\xi, \\ \tilde{\Sigma}_2 &: \omega_n \dot{\tilde{\eta}} = \tilde{f}(\omega_n, \xi, \tilde{\eta}) + \sum_{i=1}^{m} \omega_n^{r_i} \tilde{g}_i(\omega_n, \xi, \tilde{\eta}) \tilde{u}_i, \end{aligned} \tag{5}$$

여기서,

$$\begin{aligned} &\xi \triangleq [\zeta^1, \cdots, \zeta^m]^T \in R^r, \qquad \zeta^i \triangleq [\xi_1^i, \cdots, \xi_{r_i}^i]^T \in R^{r_i}, \\ &\Omega \triangleq diag\Omega_i, \quad \Omega_i \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_n^{r_i - 1} \end{bmatrix} \\ &\tilde{f}(\omega_n \xi, \tilde{\eta}) \triangleq f(\Omega\xi, \tilde{\eta}), \ \tilde{g}_i(\omega_n, \xi, \tilde{\eta}) \triangleq g_i(\Omega\xi, \tilde{\eta}), \\ &\quad i = 1, \cdots, m. \end{aligned} \tag{6}$$

이며, $\tilde{f}$, $\tilde{g}_i$, $i=1,\cdots$은 $R \times R^r \times R^d$에서 smooth하다.

이제 다음과 같이 제어기를 “빠른”제어기와 “느린”제어기의 합이라 하자. [10]

$$\tilde{u}_i = \tilde{u}_i^s + \tilde{u}_i^f \quad , i = 1, \cdots, m \tag{7}$$

"느린“제어기 $\tilde{u}^s$를 아래와 같이 정한다.

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_i^s = K_i^s \zeta^i, \\ &\tilde{u}^s \triangleq [\tilde{u}_1^s, \cdots, \tilde{u}_m^s]^T \in R^m, \quad K^s \triangleq diag\ K_i^s \in R^m \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 양수 k_j^i는 다음의 다항식이 Hurwitz가 되도록 정한다.

$$d_i(s) \triangleq s^{r_i+1} + k_{r_i}^i s_i^{r_i} + \cdots + k_1^i s + 1, \quad i = 1, \cdots, m \tag{9}$$

여기서 간단한 계산으로 느린 subsystem $\tilde{\Sigma}_1$과 상기의 느린 제어기로 구성되는 폐루프 시스템의 대역폭을 ω_n을 이용하여 조절할 수 있다는 것을 보일 수 있다.[13]

한편 (가정1)으로부터 숨겨진 dynamics가 불안정하기 때문에 internal stability를 보장하지 못할 수도 있다. 이런 이유로 빠른 제어기 $\tilde{u}^f$는 internal dynamics를 안정화 시키는 역할을 수행하도록 설계한다.

불행히도 잘 알려진 composite 제어에서 빠른 제어기 설계 방법이 특이섭동 시스템에 바로 적용되지 않는다. 이는 ω_n이 매우 작은 경우에 (식9)에서 빠른 시스템 $\tilde{\Sigma}_2$이 boundary-layer 시스템에서 입력 $\tilde{u}$가 나타나는 “weakly controllable”하기 때문이다. 이 어려움을 극복하기 위해서 먼저 원점에서 $O(\omega_n^{(r_{min}+1)})$정확도를 가지는 $\tilde{\eta}$의 quasi-steady-state로 변수를 변화하도록 하자. 그런 다음 빠른 시스템이 제어가능하도록 크기 변환을 수행한다.

이런 목적으로 본 논문에서는 임시적으로 (5), (7)에서 $\tilde{u}^f$=0으로 한다.

$$\begin{aligned} \Sigma_1^f &: \dot{\xi} = (A + BK^s)\xi, \quad \tilde{y} = C\xi, \\ \Sigma_2^f &: \omega_n \dot{\tilde{\eta}} = \tilde{f}(\omega_n, \xi, \tilde{\eta}) + \sum_{i=1}^{m} \omega_n^{r_i} \tilde{g}_i(\omega_n, \xi, \tilde{\eta}) K_i^s \zeta_i, \end{aligned} \tag{10}$$

이제 다음의 형태를 갖고 있는 Σ_2^f에 대해 invariant manifold를 구하자.

$$\tilde{\eta} = \psi(\omega_n, \xi^a), \tag{11}$$

여기서, 함수 $\psi: R \times R^{r+m} \to R^d$는 ω_n, ξ^a에 대한 함수이면서 smooth function이다.

(11)을 (식10)에 대입함으로써, manifold 상태를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\omega_n \dot{\psi}(\omega_n, \xi^a) \\ &= \tilde{q}(\omega_n, \xi, \psi(\omega_n, \xi^a)) + \sum_{i=1}^{m} \omega_n^{r_i} \tilde{p}_i(\omega_n, \xi, \psi(\omega_n, \xi^a)) K_i^s \xi_i^a \end{aligned} \tag{12}$$

많은 경우에 manifold 상태를 직접 풀 수 없지만 ω_n에 대한 테일러 전개에 의해 어느 정도 $\psi(\omega_n, \xi^a)$를 근사화할 수 있다. 이를 위해서 다음 식을 정의한다.

$$H_f(\omega_n, \xi) \triangleq \tilde{f}(\omega_n, \xi, \psi(\omega_n, \xi)). \tag{13}$$

(정리1) (식12)의 시스템이 (가정2)을 만족하고 (식14)의 partial differential equation (PDE) 이 smooth한 해 ψ를 갖는다고 하자. 그러면 ψ는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi(\omega_n, \xi) &= \sum_{k=0}^{r_{min}} \gamma_k(\xi) \omega_n^k \\ &\quad + \left[\int_0^1 \frac{(1-\lambda)^{r_{min}}}{r_{min}!} D_1^{(r_{min}+1)} \psi(\lambda\omega_n, \xi^a) d\lambda \right] \omega_n^{r_{min}+1}, \end{aligned} \tag{14}$$

여기서, γ_0는 다음 식의 해이다.

$$\tilde{f}(0, \xi, \gamma_0(\xi)) = 0 \tag{15}$$

γ_k, $k = 1, \cdots, r_{min}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \gamma_k(\xi) = &\left[D_3 \tilde{f}(0, \xi, \gamma_0(\xi)) \right]^{-1} \{ -F_k(\xi a, \gamma_0(\xi), \cdots, \gamma_{k-1}(\xi)) \\ &+ D\gamma_{k-1}(\xi)((A + BK^s)\xi)) \}, \end{aligned} \tag{16}$$

그리고, 다음의 성질을 갖는다.

각각의 γ_k, $k = 0, 1, \cdots, r_{min}$는1, 오직 $\tilde{\xi}^1, \cdots, \tilde{\xi}_{k+1}^i$, $i = 1, \cdots, m$에 의존한다. (17)

여기서 $F_k, k = 1, \cdots,$ smooth function 이고 S_0는 다음과 같다.

(정리1)에 의하여 invariant manifold ψ의 유한 차수의 테일러 급수 근사는 (15),(16)의 식을 재귀적으로 풀어서 계산할 수 있다. 게다가 (가정2)에 의해 γ_k가 풀릴 수 있음이 정당화된다.

이제 시스템 Σ_1^s에 (16)을 사용하면 다음과 같이 된다.

$$
\begin{aligned}
&\omega_n \sum_{k=0}^{r_{\min}-1} \dot{\gamma}_k(\xi)\omega_n^k \\
&= \omega_n \sum_{k=0}^{r_{\min}-1} \omega_n^k D\gamma_k(\xi)\,((A+BK^s)\xi) \\
&= \sum_{k=0}^{r_{\min}-1} \frac{1}{k!} D_1^{(k)} H_f(0,\xi)\omega_n^k + \sum_{i\in\Gamma} \omega_n^{r_i} \tilde{g}_i(0,\xi_i,\gamma(\xi)) \\
&\quad + \omega_n^{r_{\min}} D\gamma_{r_{\min}}(\xi)\, B\, \tilde{u}^f
\end{aligned}
\tag{18}
$$

이제, invaraiant manifold ϕ의 $r_{\min}$ 오더 테일러 씨리즈 근사에 따른 truncation 오차를 나타내는 새로운 변수를 정의한다.

$$
\tilde{e} \triangleq \frac{1}{\omega_n^{r_{\min}}}\left(\tilde{\eta} - \sum_{k=0}^{r_{\min}} \gamma_k(\xi)\omega_n^k\right) \tag{19}
$$

그러면 (식20)과 (식21)으로부터 $\tilde{e}$에 대한 미분 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Sigma}_e:\ \omega_n \dot{\tilde{e}} &= \tilde{f}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e}) + \tilde{g}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e})\,\tilde{u}^f \\
&\quad + \tilde{r}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e},\tilde{u}^f)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

여기서,

$$
\tilde{f}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e}) \triangleq \frac{1}{\omega_n^{r_{\min}}}\left(f(\omega_n,\xi,\omega_n^{r_{\min}}\tilde{e} + \sum_{k=0}^{r_{\min}}\gamma_k(\xi)\omega_n^k) - f(\omega_n,\xi,\sum_{k=0}^{r_{\min}}\gamma_k(\xi)\omega_n^k)\right) \tag{21a}
$$

$$
\tilde{g}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e}) \triangleq [\,\tilde{g}_{e_1}, \cdots, \tilde{g}_{e_m}] - D\gamma_{r_{\min}-1}(\xi)B,
$$

$$
\tilde{g}_{e_i}(\omega_n,\xi,\tilde{e}) \triangleq \begin{cases} \tilde{g}_i(\omega_n,\xi,\omega_n^{r_{\min}}\tilde{e} + \sum_{k=0}^{r_{\min}}\gamma_k(\xi)\omega_n^k), & i\in I \\ 0, & i\notin I \end{cases} \tag{21b}
$$

$$
\tilde{f}_R(\omega_n,\xi) \triangleq f(\omega_n,\xi,\sum_{k=0}^{r_{\min}}\gamma_k(\xi)\omega_n^k) - \sum_{k=0}^{r_{\min}}\frac{1}{k!}D_1^{(k)}H_f(0,\xi)\omega_n^k. \tag{21c}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{g}_R(\omega_n,\xi,\tilde{e}) \\
&\triangleq \sum_{i\in I}\left(\tilde{g}_i(\omega_n,\xi,\omega_n^{r_{\min}}\tilde{e} + \sum_{k=0}^{r_{\min}}\gamma_k(\xi)\omega_n^k) - \tilde{g}_i(0,\xi,\gamma_0(\xi))\right)K_i^s\xi^i,
\end{aligned}
\tag{21d}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{r}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e},\tilde{u}^f) &\triangleq \frac{1}{\omega_n^{r_{\min}}}\Big(\tilde{f}_R(\omega_n,\xi) + \tilde{g}_R(\omega_n,\xi,\tilde{e}) \\
&\quad + \sum_{i\notin I}\omega_n^{r_i}\tilde{g}_i(\omega n,\xi,\omega_n^{r_{\min}}\tilde{e} + \sum_{k=0}^{r_{\min}}\gamma_k(\xi)\omega_n^k)\,(K_i^s\xi + \tilde{v}_i^f) \\
&\quad - \omega_n^{r_{\min}+1}D\gamma_{r_{\min}}(\xi)(A+BK^s)\xi + B\,\tilde{u}^f)\Big)
\end{aligned}
\tag{21e}
$$

함수 $\tilde{f}_e$는 smooth하고 다음과 같이 표현된다.

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e}) = \\
&\left[\int_0^1 D_3 f(\omega_n,\xi,\lambda\omega_n^{r_{\min}}\tilde{e} + \sum_{k=0}^{r_{\min}}\gamma_k(\xi)\omega_n^k)d\lambda\right]\tilde{e}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

또한, 다음을 유도할 수 있다..

$$
\begin{aligned}
&\tilde{f}_e(0,\xi,\tilde{e}) \triangleq \lim_{\omega_n\to 0}\tilde{f}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e}) \ \textit{is well-defined}, \\
&\tilde{f}_e(\omega_n,\xi,0) = 0,\ \forall\omega_n\ge 0, \\
&\lim_{\omega_n\to 0}\tilde{r}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e},\tilde{v}^f) = 0
\end{aligned}
\tag{23}
$$

새로운 시간 변수를 $\tau \triangleq t/\omega_n$로 잡은 다음 $\omega_n=0$으로 하면 (식22)으로부터 boundary-layer 시스템을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$
\frac{d\tilde{e}}{d\tau} = \tilde{f}_e(0,\xi,\tilde{e}) + \tilde{g}_e(0,\xi,\tilde{e})\,\tilde{Y}^f, \tag{24}
$$

게다가, $\tilde{u}^f=0$에서 원점이 위의 시스템의 평형점 (equlibrium point)이다.

이제, 위의 boundary-layer 시스템의 안정성을 보장하기 위한 마지막 가정을 한다.

(가정3) (식24)의 boundary-layer 시스템과 다음과 같은 제어기를 고려한 페루프 시스템의 원점은 ξ에 uniformly exponentially stable이다.

$$
\tilde{u}^f = \Gamma^f(\tilde{e}),\quad \Gamma^f(0) = 0, \tag{25}
$$

지금까지의 결과를 요약하면 전체 제어기는 다음과 같은 두 개의 subsystem으로 나눌 수 있다.

(i) 시스템의 전체 성능을 결정하는 "느린" 제어기
(ii) internal stability를 보장하는 "빠른" 제어기

위와 같은 두 개의 제어기를 통하여 nonminimum phase 시스템의 경우에도 internal stability를 보장하면서 set point 트래킹 문제를 풀 수 있다.

보다 쉽게 알아 볼 수 있도록 전체 제어기를 원래의 상태와 시간에 대해서 서술하면 아래와 같다.

$$
u = \omega_n^{r_{\min}}\left(K^s\Omega^{-1} + \Gamma^f\Big(\frac{1}{\omega_n^{r_{\min}}}\big(\eta - \sum_{k=0}^{r_{\min}}\gamma_k(\Omega^{-1}\xi)\omega_n^k\big)\Big)\right) \tag{26}
$$

(42), (4), (19)의 식을 써서 (1)의 시스템과 (26)의 제어기로 구성된 전체 시스템을 변환하면

$$
\Sigma_0:\begin{cases}
\dot{\xi} = (A+BK^s)\xi + B\Gamma^f(\tilde{e}) \\
\omega_n\dot{\tilde{e}} = \tilde{g}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e}) + \tilde{f}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e})\Gamma^f(\tilde{e}) \\
\quad + \tilde{r}_e(\omega_n,\xi,\tilde{e},\Gamma^f(\tilde{e})) \\
\tilde{y} = C\xi
\end{cases}
\tag{27}
$$

$\omega_n \to 0$일 때 $\tilde{\Sigma}_0$는 다음의 시스템이 된다.

$$
\Sigma_0:\begin{cases}
\dot{\tilde{\xi}} = (A+BK^s)\tilde{\xi} \\
\hat{y} = C\tilde{\xi}
\end{cases}
\tag{28}
$$

그러므로 ω_n이 충분히 작으면 (26)의 제어기로 내적인 안정성과 거의 선형적이며 비간섭적인 I/O 동적 특성을 보장할 수 있다. 이를 바탕으로 다음 정리를 얻게 된다.

(정리2) 가정 1~3이 성립하고 (9)의 식과 같이 K_i^j, $j=0,\cdots,r_i-1$, $i=1,$ 어리 m 하자. $\omega_n\le\omega_0$이고 $\|e(0)\|\le x_0$일 경우 (26)의 제어기로 어떤 양의 상수 $\omega_0, x_0, \rho_0, d_0, \sigma_0$ 대하여

$$
\|x(t)\|\le\rho_0,\quad \|y(t) - \bar{y}(t)\|\le d_0e^{-\sigma_0\omega_n t},\quad \forall t\ge 0,
$$

이 되도록 할 수 있다. 여기서

$$
\bar{y}(t) \triangleq \hat{y}(\omega_n t),\quad x(t) \triangleq [\xi^T\ \eta^T]^T \in R^n,
$$

$$
e_\xi(t) \triangleq \tilde{e}(\omega_n t),\quad e_{\omega(t)} = [e_\xi^T(t)\ e^{T(t)}]^T
$$

이다.

3. 결 론

본 논문에서는 일반적인 형태의 비선형 비최소위상 시스템의 제어기 설계과정을 기술하였다. 중요한 사항은 (i) magnitude & time scaling 변환으로 숨겨진 동적 특성을 fast subsystem으로 나타나게 한 것 (ii) composite control 방법으로 비최소위상 비선형 시스템에서 거의 선형적이고 비간섭적인 동적 특성과 내적인 안정성을 갖게 한 것이다. 그리고, 본 논문에서 소개한 방법은 기존에 알려진 방법 [1],[2],[3]에 비하여 보다 많은 종류의 비최소위상 시스템을 다룰 수 있었다.

(정리2)에서 서술된 바와 같이 본 논문에서 충분히 작은 ω_n에 대해서만 본 논문에서 제안한 방법의 이점이 이론적으로 보장되므로, 이 작은 ω_n에 의하여 transient response가 지나치게 느려질 수 있다. 하지만, tail-controlled missile의 가속도 제어, PVTOL 비행기의 hover control 같은 많은 실제 응용 분야에 있어서 (정리2)를 만족하면서 충분한 transient response를 얻을 수 있는 ω_n을 정하는 것이 가능하다.

[참 고 문 헌]

[1] L. Benvenuti, M. D. Di Benedetto, and J.W.Grizzle, ''Approximate Output Tracking for Nonlinear Non minimum Phase Systems with an Application to Flight Control,'' Journal of Nonlinear and Robust Control, vol. 4, pp. 397-414, 1994.

[2] F. J. Doyle, F. Allgower, and M. Morari, "A Normal Form Approach to Approximate Input Output Linearization for Maximum Phase Nonlinear SISO Systems," IEEE Tran. Automatic Control, vol. 41, no. 2, pp. 305 309, Feb. 1996.

[3] Allogwer, "Approximate Input Output Linearization of Nonminimum Phase Nonlinear Systems," Proceedings of European Control Conference, Brussels, July. 1997.

[4] J. I. Lee and I. J. Ha, ''Autopilot Design for Highly Maneuvering STT Missiles via Singular Perturbation like Technique,'' *IEEE Trans. Control System Technology*, vol. 7, no. 5, Sep. 1999.

[5] S. Y. Lee, J. I. Lee, and I. J. Ha,''Nonlinear Autopilot for High Maneuverability of Bank to Turn Missiles,'' *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, to appear, 2001.

[6] S. S. Sastry, J. Hauser, and P. V. Kokotovic, ''Zero Dynamics of Regularly Perturbed Systems May Be Singularly Perturbed,'' *Syst. Contr. Lett.*, vol. 13, pp. 299 314, 1989.

[7] A. Isidori, S. S. Sastry, P. V. Kokotovic, and C. I. Byrnes,''Singularly Perturbed Zero Dynamics of Nonlinear Systems,'' IEEE Trans. Automatic Control, vol. 37, no.10, pp. 1625 1631, Oct. 1992.

[8] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems* New York: Springer Verlag, 1990.

[9] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*. Second Ed., Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1974.

[10] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, *Signular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*. New YorkL Academic Press, 1986

[11] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Second Ed. Prentice Hall Inc. 1996

[12] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer Verlag, 3rd Ed., 1995.

[13] J.I. Lee and I.J. Ha, "A Novel Approach to Feedback Linearizing Control of Nonminimum Phase Nonlinear Systems and Its Application to Aircraft Control," *ECC '99*, pp.406 413, 1999.