

ALS법에 의한 시스템동정

이동철 · 배종일 · 정형환 · 조봉관*

*부경대학교 전기·제어계측공학부 · **동아대학교 전기·전자·컴퓨터공학부

System Identification by Adjusted Least Squares Method

Dong-Cheol Lee · Jong-Il Bae · Hwung-Hwan Chung** · Bong-Kwan Jo*

*Dept. of Electric · Control & Instrumentation Eng. Pukyong Natl. Univ.

**Dept. of Electric · Electronic & Computer Eng. Dong-A Univ.

Abstract - A system identification is to measure the output in the presence of a adequate input for the controlled system and to estimate the mathematical model in the basic of input-output data.

In the system identification, it is possible to estimate the true parameter values by the adjusted least squares method in the input-output case of no observed noise, and it is possible to estimate the true parameter values by the total least squares method in the input-output case with the observed noise. In recent the adjusted least squares method is suggested as a consistent estimation method in the system identification not with the observed noise input but with the observed noise output.

In this paper we have developed the adjusted least squares method from the least squares method and have made certain of the efficiency in comparing the estimating results with the generating data by the computer simulations.

1. 서론

시스템동정이란 적당한 입력을 대상 시스템에 주어 그 출력을 관측하고 그 입·출력 데이터에 기초하여 시스템의 수학적 모델을 추정하는 것이다[1~4].

총래의 시스템제어 분야에 있어서 동정문제의 대부분은 모델구조(차분방정식, 전달함수의 형)를 미리 정해 두고 모델에 포함되는 미지 파라미터를 추정하는 문제로 취급했다. 파라미터 추정[5]에 대하여 지금까지 여러 가지 방법이 제안되고 있지만, 그 대표적인 것은 최소2승법(Least squares method, LS)이다[6].

시스템 동정에 있어서 입·출력에 관측 잡음이 없는 경우는 LS법에 의해 파라미터 참값을 구할 수 있다.

한편, 입·출력에 관측잡음이 있는 경우는 TLS(Total least squares)법에 의해 파라미터의 일치추정치(Consistent estimate)를 LS법과 TLS법의 중간적인 방법으로서 ALS(Adjusted least squares)법이 제안되고 있다.

본 논문에서는 총래의 최소2승법을 개선하여 ALS법에 대해 검토하고 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 추정결과를 논하였다.

2. 최소2승법

2.1 문제 설정

단일입력 단일출력의 선형 시스템을 고려하자. 이 시스템은 다음 차분방정식으로 나타낼 수

있다.

$$y_k = \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + \dots + \beta_n u_{k-n} - \alpha_1 y_{k-1} - \dots - \alpha_n y_{k-n} \quad (2.1)$$

여기서, 벡터를 식(2.2)과 식(2.3)과 같이 두면 식(2.1)은 식(2.4)과 같이 나타낼 수 있다.

$$m_{Ak}^T = [u_k, u_{k-1}, \dots, u_{k-n}, -y_{k-1}, \dots, -y_{k-n}] \quad (2.2)$$

$$x^T = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n] \quad (2.3)$$

$$y_k = m_{Ak}^T x \quad (2.4)$$

출력에 관측잡음이 있는 경우의 입·출력관계를 Fig. 2.1에 나타내었다.

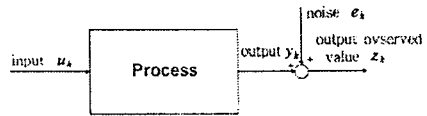


Fig. 2.1 System model with observed noise in output

관측잡음이 있을 경우의 벡터 b_m 을 식(2.5)와 같이 정의하면 식(2.6)을 얻을 수 있다.

$$b_m^T = [z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_{k+m}] \quad (2.5)$$

$$[A_m \quad -b_m] \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (2.6)$$

2.2 최소2승 추정치

최소2승법은 식(2.6)에 대해 식(2.7)을 최소화하는 x 를 구한다. 식(2.7)의 양변을 x 로 미분하면 식(2.8)이 된다.

$$J = [b - Ax]^T [b - Ax] = \|b - Ax\|_2^2 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -2A^T [b - Ax] \quad (2.8)$$

따라서, 미지 파라미터의 최소2승추정치 는 식(2.9)가 된다.

$$\hat{x}_{LS} = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (2.9)$$

따라서, $A^T A > 0$ 이면 x 가 식(2.10)과 같이 표현될 때 J 는 최소가 되어 그 최소치는 식(2.11)과 같다.

$$x = (A^T A)^{-1} A^T b \quad (2.10)$$

$$J_{\min} = b^T b - b^T A(A^T A)^{-1} A^T b \quad (2.11)$$

2.2 축차 최소2승법 (Recursive least squares method)

여기서 현재 추정치를 그 직전의 추정치와 새로운 데이터로부터 축차적으로 경신하면서 계산하는 방법을 고려하자. 이 방법을 온 라인(On-line)법이라고 한다. 식(2.9)에서

$$\hat{x}_{LS(k)} = (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T b_k \quad (2.12)$$

여기서, P_k 를 식(2.13)과 같이 정의하면 식(2.14)가 된다.

$$P_k = (A_k^T A_k)^{-1} \quad (2.13)$$

$$= (A_{k-1}^T A_{k-1} + m_{Ak} m_{Ak}^T)^{-1} \quad (2.14)$$

식(2.14)에 역행렬보체(Matrix inversion lemma)를 이용하면 식(2.15)와 같이 나타낼 수 있다.

$$P_k = P_{k-1} - \frac{P_{k-1} m_{Ak} m_{Ak}^T P_{k-1}}{(1 + m_{Ak}^T P_{k-1} m_{Ak})} \quad (2.15)$$

식(2.12)는 식(2.16)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{LS(k)} &= (A_k^T A_k)^{-1} A_k^T b_k \\ &= \hat{x}_{LS(k-1)} + \frac{P_{k-1} m_{Ak}}{1 + m_{Ak}^T P_{k-1} m_{Ak}} \\ &\quad \times (z_k - m_{Ak}^T \hat{x}_{LS(k-1)}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

식(2.15)와 식(2.16)은 축차 최소2승법의 알고리즘이다. 망각계수(Forgetting factor) φ 를 이용하면 축차 최소2승법의 알고리즘은 식(2.17), (2.18)과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_{LS(k)} &= \hat{x}_{LS(k-1)} + \frac{P_{k-1} m_{Ak}}{\varphi + m_{Ak}^T P_{k-1} m_{Ak}} \\ &\quad \times (z_k - m_{Ak}^T \hat{x}_{LS(k-1)}) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$P_k = \frac{1}{\varphi} \left(I - \frac{P_{k-1} m_{Ak} m_{Ak}^T}{1 + m_{Ak}^T P_{k-1} m_{Ak}} \right) P_{k-1} \quad (2.18)$$

φ 값은 $0 \leq \varphi \leq 1$ 이지만, 일반적으로 1에 가까운 값, 예를 들면 0.95 또는 0.98이 이용된다.

3. TLS법

3.1 문제설정

입·출력에 관측잡음이 있는 시스템을 Fig. 3.1에 나타내었다.

TLS법은 식(3.1)과 같다.

$$[A \quad -b] \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (3.1)$$

단, $A \in R^{m \times p}$, $b \in R^m$, $x \in R^p$, $p = 2n + 1$

3.2 TLS추정치

행렬 $[A \quad -b]$ 가 식(3.2)와 같은 특이치분해(Singular value decomposition, SVD)[7]이 된다.

$$U^T [A \quad -b] V = \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

단, $U^T U = I$, $V^T V = I$,
 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq \sigma_{p+1}$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p+1})$$

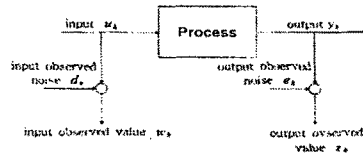


Fig. 3.1 System model with observed noise in input output

이때 행렬 V 를 식(3.3), (3.4)와 같이 분할하면 파라미터 추정치는 식(3.5)에서 구할 수 있다.

$$V = [v_1, \dots, v_p, v_{p+1}] = [V_1, v_{p+1}] \quad (3.3)$$

$$v_{p+1} = [v_1, \dots, v_p] \quad (3.4)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{TLS} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{v_{p+1}^T} v_{p+1} \quad (3.5)$$

4. ALS

4.1 문제설정

$$[A \quad -b] \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (4.1)$$

단, $A \in R^{m \times p}$, $b \in R^m$, $x \in R^p$,
 $p = 2n + 1$

4.2 ALS추정치

행렬 $[A \quad -b]$ 의 QR분해를 고려하자.

$$Q^T [A \quad -b] = \begin{bmatrix} R_A & \gamma \\ 0 & \gamma \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

단, R_A, R 는 상삼각행렬이며, Q 는 직교행렬이다.

다음은 행렬 R 과 벡터 x 를 식(4.3)과 같이 분할한다.

$$\begin{bmatrix} R_p & W_a \\ 0 & R_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ x_a \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (4.3)$$

단, $x_p \in R^{n+1}$, $R_a, R_p, W_a \in R^{(n+1) \times (n+1)}$,
 $x_a \in R^n$.

식(4.3)은 식(4.4), (4.5)와 같이 나눌 수 있다.

$$R_p x_p + W_a \begin{bmatrix} x_a \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (4.4)$$

$$R_a \begin{bmatrix} x_a \\ 1 \end{bmatrix} \cong 0 \quad (4.5)$$

식(4.5)의 R_a 를 SVD분해하면 식(4.6)과 같다.

$$U_a^T R_a V_a = \Sigma_a \quad (4.6)$$

단, $U_a^T U_a = I$, $V_a^T V_a = I$,
 $\Sigma_a = \text{diag}(\sigma_{a1}, \dots, \sigma_{an}, \sigma_{an+1})$
 $\sigma_{a1} \geq \dots \geq \sigma_{an} \geq \sigma_{an+1}$

V_a 를 식(4.7), (4.8)과 같이 분할하면 \hat{x}_a 는 식(4.9)에 의해 구할 수 있다.

$$V_a = [v_{a1}, \dots, v_{an}, v_{an+1}]$$

$$= [V_{a1}, v_{an+1}] \quad (4.7)$$

$$v_{an+1} = [v_{a1}, \dots, v_{an+1}] \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_a \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{v_{an+1}} v_{a+1} \quad (4.9)$$

식(4.9)를 식(4.4)에 대입하면 \hat{x}_p 를 계산하는 식이 구해진다.

5. 컴퓨터 시뮬레이션

5.1 시스템동정

아래의 모델에 대해 TLS와 ALS 추정법을 이용하여 파라미터 추정을 행하였다.

$$G_1(z) = \frac{z^{-1} + 0.5z^{-2}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}}$$

시스템은 Fig. 5.1에 나타냈다. 입력신호 $u(k)$ 와 출력관측잡음 $e(k)$ 는 서로 무상관 정규성 백색잡음이며, $u(k) \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $e(k)$ 의 평균치는 0, 표준편차는 출력신호의 $\frac{1}{10}$ 을 취한다.

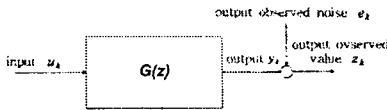


Fig. 5.1 System model of simulation

5.2 시뮬레이션 결과

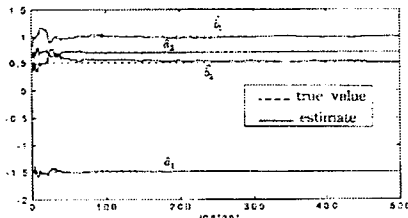


Fig. 5.2 Estimation of parameters by TLS method

6. 결론

본 논문에서는 출력만에 관측잡음이 있는 경우의 추정법으로서 LS법과 TLS법의 중간적인 방법 ALS법과 반복알고리즘에 대하여 검토를 행했다.

시뮬레이션에 대한 결과는 다음과 같다. 잡음이 적을 때, TLS법과 ALS법의 추정치는 대개 같지만, 잡음이 커지면 ALS추정치는 TLS추정치 보다 참값에 근사하고 있다. ALS법의 쪽이 매우 양호하다.

또 ALS법은 특이치분해를 행하는 행렬이 적기 때문에 속도는 TLS법 보다 빠르다.

출력만에 관측잡음이 있는 경우, ALS법은 파라미터의 일치추정치를 얻을 수 있고, 또 TLS법 보다 정밀도가 양호한 값을 얻을 수 있으므로 유용하다고 생각된다.

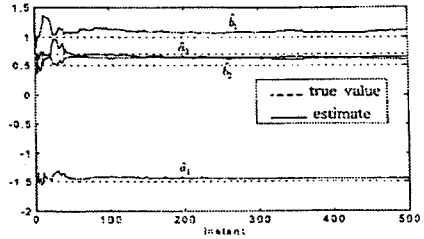


Fig. 5.3 Estimation of parameters by ALS method

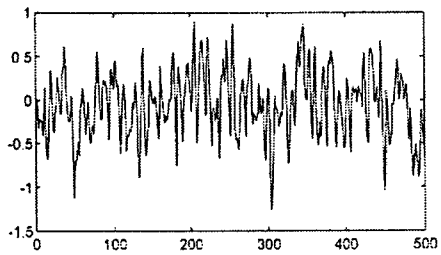


Fig. 5.4 $y - \hat{y}_{TLS}$

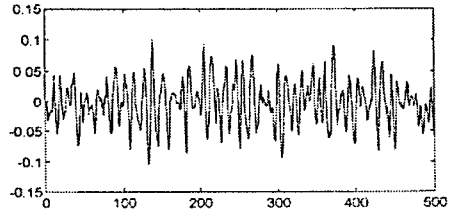


Fig. 5.5 $y - \hat{y}_{ALS}$

[참고문헌]

- [1] G. C. Goodwin and R. L. Payne, Theory and Practice of Recursive Identification, The MIT Press, 1981
- [2] L. Ljung, system Identification Theory for Hte User, Prentice-Hall, 1987
- [3] M. Aoki, State Space Modeling of Time Series(2nd ed.), springer, 1990
- [4] T. Soderstrom and P. Stoica, System Identification, Prentice-Hall, 1989
- [5] P. Eykhoff and P. C. Parks, "Special issue on Identification and system Parameter Estimation," Automatica, 26(1), pp.1-194, 1990
- [6] T. Nakamizo, Signal Analysis and System Identification, Corona Publishing Co., LTD., 1989
- [7] 伊理, 兎玉, 須田, 特異値分解とそのシステム制御への應用, Vol. 21, No. 8, pp. 763-772, 1982